대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 18, No. 1, 123-135. Feb 2008

수학적 귀납법에 대한 학생들의 이해에 관하여

홍 진 곤* · 김 윤 경**

본 연구에서는 고등학교 과정에서 다루어지는 수학적 귀납법 증명의 대표적인 예제들을 이해하고 증명하는데 필요한 스키마를 분석하고, 그에 대한 학생들의 구성 여부를 조사하였다. 함수 스키마와 명제치 함수 스키마의 구성은 함의치 함수 스키마와 긍정 논리식 스키마의 구성에 선행하며 함의치 함수 스키마와 긍정 논리식 스키마는 수학적 귀납법 스키마를 위해 통합적으로 조절되어야 한다는 점도 확인하였다. 이를 바탕으로 하여 수학적 귀납법에 대한 학생들의 이해 수준은 1~4수준으로 설정될 수 있었다. 또한 이러한 이해 수준과 관련하여 수학적 귀납법을 학습하면서 겪는 학생들의 인지적 어려움이 분석되었다.

I. 들어가는 글

수학적 귀납법은 자연수에 관한 전칭 명제가 참임을 증명하는 매우 훌륭한 도구이기도 하지만, 그 개념을 이해하는 것은 곧 자연수 집합의 본질적인 구성 원리 중의 하나를 이해하는 것이라는 점에서도 중요한 의미를 가진다고 할 수 있다. 그러나 수학적 귀납법을 이용하는 증명을 학습하는 학생들은 그 원리의 이해에 있어서 많은 어려움을 겪고 있는 것이 현실이며, 그 어려움의 원인에 대해서는 보다 다양한 관점에서의 연구를 필요로 한다.

수학적 귀납법을 이용한 증명이 학생들에게 낯설고 어렵게 여겨지는 이유는 여러 선행연구에서 분석되어 왔는데, 명제 $p(n)$과 $p(n+1)$ 각각의 객관적인 참의 문제와 아무 상관없이 $p(n) \rightarrow p(n+1)$이라는 조건명제를 증명해야 하거나(Fischbein & Engel, 1989: 282), 증명해야 할 명제 $p(n)$을 먼저 가정해야 하는(Barbeau, 2000: 63) 등의 문제가 그 대표적인 것이라 할 수 있다. 또, 교수-학습을 위해 수학적 귀납법에 의한 증명 능력을 행동기술로 분석한 것은 Ernest(1984)에게서 찾아볼 수 있는데, 그는 수학적 귀납법에 의한 증명의 요소를 '$\forall n \ \ p(n)$'이라는 명제, '수학적 귀납법'이라는 증명 방법, '$p(1)$의 증명'이라는 출발점, '$p(n)$의 가정'이라는 귀납적 가정, '$p(n) \rightarrow p(n+1)$의 증명'이라는 귀납 단계의 다섯 가지로 분석하고 수학적 귀납법에 의한 증명 능력을 다음의 3가지 행동 기술로 분석하였다(Ernest, 1984: 176-177).

① 귀납의 출발점을 증명하는 능력.
② 귀납의 단계를 증명하는 능력.
③ 수학적 귀납법에 의한 증명을 바른 형태로 표현하는 능력.

* 건국대학교, dion@konkuk.ac.kr
** 건국대학교 대학원, rla9374@orgio.net

이와 같은 행동기술 분석이 실제 교수-학습 상황에서 교사가 학생들의 어려움을 구체적으로 파악하고, 요구되는 증명 능력을 학생 개개인의 상황에서 향상시킬 수 있도록 하는 데에 도움이 될 것임은 분명해 보인다. 이는 학교 현장에서 행동기술 분석법이 학생들의 수학적 능력을 평가하는 기준을 세울 때에 자주 이용되는 이유이기도 하다. 그러나 형식적으로 완벽한 증명 과정을 서술할 수 있는 학생이 자신이 서술한 증명의 절차가 왜 증명이 되는지를 이해하지 못한 채 기계적인 활동만을 반복하는 상황은 흔히 관찰되며, 이러한 상황은 위의 세 가지 행동기술만으로 수학적 귀납법에 의한 증명 능력을 모두 설명할 수 없음을 시사한다. 김남희(1992, p.87)는 이러한 행동기술 분석이 수학적 귀납법을 설명하거나 이미 획득된 지식이나 개념에 관계하여 수학적 귀납법이 설명될 수 있는 어떤 방식에 대해서는 암시해주지 않기 때문에 수학적 귀납법에 의한 증명에 대하여 보다 세밀한 개념분석이 필요하다며 이 행동기술 분석의 한계를 이미 지적한 바 있다.

다음은 "4 이상의 자연수 n에 대해 $n! > 2^n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하라"는 문제에 완벽한 답안을 작성한 어떤 고등학교 2학년 학생과 연구자가 대화한 내용의 일부이다.

교사: 완벽한 답안이라고 생각하니?

학생: 네. 빠짐없이 다 쓴 것 같은데...

교사: 자신 있게 풀었나 보구나. 그럼 두 번째 과정은 어떤 명제를 증명하려고 한 과정인지 설명해 줄래?

학생: 그냥 증명한 건데요... 무슨 말씀인지 잘 모르겠어요.

교사: 그럼 너는 지금 네가 작성한 증명대로라면 완벽한 증명이 되는 건지 이해가 되니?

학생: 네?

교사: 4 이상의 자연수는 무수히 많잖아. 그런데 이렇게만 쓰면 정말 4 이상의 모든 자연수 n에 대해 $n! > 2^n$이라는 것을 증명한 것이 될까 하는 거야. 어때, 증명이 된 걸까?

학생: 솔직히요... $n=4$일 때와 $n=k$, $n=k+1$일 때 세 가지 경우 다 안 빼먹고 써서 정답인 거 같긴 한데요... 이게 왜 증명이 되는 건지는 생각 안 해 봤어요. 아니, 잘 모르겠어요.

이 학생의 경우 답안지의 진술만으로 평가하자면 ① 귀납의 출발점을 증명하는 능력, ② 귀납의 단계를 증명하는 능력, ③ 수학적 귀납법에 의한 증명을 바른 형태로 표현하는 능력까지 세 종류의 능력을 모두 가진 것으로 평가받을 수 있었으나, 위의 짧은 면담만으로도 수학적 귀납법의 원리를 제대로 이해하고 있지 못함은 곧바로 드러난다. 그리고 이 학생 외에도, 수학적 귀납법을 수업 시간에 배운 지 열흘 정도 지난 고등학교 2학년 학생 73명을 대상으로 위의 문항을 테스트한 결과, 42명의 학생이 형식적으로는 완벽한 답안을 작성하였으나 그 중 절반이 약간 넘는 23명의 학생만이 그것이 완전한 증명이 됨을 확신한다고 답하였다.

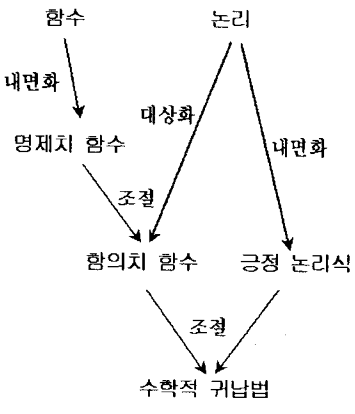
이와 같은 사례는 본 연구가 출발하는 문제의식을 설명한다. 즉, 수학적 귀납법의 증명 단계에서 겉으로 드러나는 학생들의 증명 과정에 대한 기술을 살펴보는 것만으로는 그 이해 정도와 증명 능력을 파악하기에 매우 부족하며, 수학적 귀납법을 이용한 증명 교육에서 학생들이 겪는 어려움을 이해하고 적절한 교육적 처방을 제시하기 위해서는 수학적 귀납법과 복합적으로 관련되어 있는 다양한 개념 및 그 이해 수준을 최대한 자세하고 발생적으로 분석할 필요가 있다는 것이다.

본 연구에서는 수학적 귀납법에 대한 Dubinsky (1994)의 발생적 분해를 기본적인 틀로 하여, 수학적 귀납법 개념의 이해와 증명 능력에 관

련된 스키마들을 분석하고 이를 바탕으로 학생들의 수학적 귀납법에 대한 이해 수준을 설정하려고 한다. 또한 이와 함께 수학적 귀납법을 이용한 증명과 관련한 학생들의 오류 사례를 분석하여 실제 교수-학습에서 겪는 어려움들을 설명하고 이해하는 관점을 도출하는 것도 부가적인 목표로 둔다.

II. 수학적 귀납법과 관련된 스키마

Dubinsky(1994, p.232)는 수학적 귀납법의 이해와 관련된 스키마로, 함수 스키마에서 내면화된 명제치 함수 스키마, 명제치 함수 스키마와 논리 스키마의 조절로 구성되는 함의치 함수 스키마, 그리고 논리 스키마의 내면화로 구성되는 긍정 논리식 스키마를 제안하였다. 그의 발생적 분해에 따르면 최종적인 수학적 귀납법의 스키마는 함의치 함수 스키마와 긍정 논리식 스키마의 조절로 구성된다. 다음 그림은 Dubinsky가 제시한 수학적 귀납법의 발생적 분해를 도식화한 것이다.



여기서 각각의 스키마에 포함된 수학적 능력은 다음과 같이 정리할 수 있다.

(1) 함수 스키마(function schema): 수식 계산, 기호 판독 등의 대수적인 조작 능력을 포함한다. 함수 스키마를 가지고 있다는 것은 수를 변형시키는 과정을 구성하는 능력을 갖추고 있다는 의미로, 여기에서의 함수 스키마는 특히 정의역의 주어진 값에 대하여 함수값을 계산하는 과정을 포함한다.

(2) 논리 스키마(logic schema): 주어진 주장을 증명해야 할 대상으로 인식하는 것을 의미한다. 여기에서의 논리 스키마는 논리적 필연성을 이해하는 과정을 포함한다.

(3) 명제치 함수 스키마(proposition-valued function schema): 증명해야 하는 주장을, 자연수를 정의역으로 하는 명제치 함수의 함수값 $p(n)$으로 구성하여 처리할 수 있음을 의미한다.

(4) 함의치 함수 스키마(implication-valued function schema): 증명해야 하는 주장이 $p(n)$일 때, 귀납의 과정에서 증명해야 하는 명제가 $p(n) \to p(n+1)$임을 인지하고 이를 구성할 수 있음을 의미한다.

(5) 긍정 논리식 스키마(modus ponens schema): $p \to q$임을 알고 있을 때 p라는 조건이 주어지면 필연적으로 q가 됨을 인식하는 스키마를 의미한다. 이 스키마는 함의치 함수 스키마와의 조절 과정을 거쳐 수학적 귀납법에 대한 스키마를 구성하게 된다.

이 절에서는 수학적 귀납법에 대한 학생들의 이해 수준을 세밀하게 파악하기 위한 기초 작업으로, 위의 발생적 분해를 이용하여 실제 고등학교 수업 현장에서 다루어지는 대표적인 수학적 귀납법 관련 예제에서 요구되는 스키마들을 분석해 보고자 한다. 분석하는 예제는 (1) 자연수 집합의 전칭명제인 수열의 유한합 공식과, (2) 자연수의 무한부분집합에서 성립하는 부등식, 두 가지이며, 관련 스키마 중 주어진 주장

을 증명해야 할 대상으로 인식하는 논리 스키마는 각 예제들에 따른 특수성을 갖지 않기 때문에 분석하지 않았다. 논리와 관련된 스키마의 분석은 별도의 연구로 이루어질 필요가 있다.

(예제 1) 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

이 성립함을 증명하여라.

[함수 스키마]

이 예제를 증명하기 위해 요구되는 기본적인 대수식 조작 능력, 특히 $\frac{1}{ab}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$와 같은 부분분수의 변형 능력을 가지고 있어야 한다.

[명제치 함수 스키마]

증명해야 하는 주장 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$이 자연수를 정의역으로 하는 명제치 함수 $p(n)$이며, $n=1, 2, 3\cdots$등에 대하여 명제 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$이 위 명제치 함수의 함수값임을 이해하여야 한다.

[함의치 함수 스키마]

$p(n)$으로부터 '$p(n) \rightarrow p(n+1)$'을 구성하고, 이것이 수학적 귀납법으로 증명해야 하는 명제 $q(n)$임을 인지할 수 있어야 한다. 이 때 명제 $q(n)$은 다음과 같다.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \text{ 이면}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2} \text{ 이다.}$$

명제 $q(n)$을 증명하는 데 필요한 대수식의 변형 능력은 함수 스키마에 포함되는 것이지만, 이 명제 $q(n)$이 두 명제 $p(n)$과 $p(n+1)$의 함의 관계로 이루어져 있어서 $p(n)$이 성립한다는 가정 하에 $p(n+1)$을 증명해야 함을 이해하는 것은 함의치 함수 스키마에 포함된다고 할 수 있다.

[긍정 논리식 스키마]

명제 $p(1)$과 $q(n)$: $p(n) \rightarrow p(n+1)$을 증명함으로써 모든 자연수 n에 대해 $p(n)$이 참이 됨을 이끌어내고 이 사실을 무리 없이 받아들일 수 있을 때, 수학적 귀납법과 관련된 긍정 논리식 스키마가 구성되었다고 할 수 있다.

(예제 2) 4 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$n! > 2^n$이 성립함을 증명하여라.

[함수 스키마]

이 예제를 증명하기 위해 요구되는 기본적인 대수식 조작 능력, 특히 부등식의 성질을 알고 다룰 수 있는 능력과 계승 및 지수 개념에 관한 이해와 계산 능력을 가지고 있어야 한다.

[명제치 함수 스키마]

(예제 1)의 경우에서와 같이 각각의 자연수 n에 대해 명제 $p(n)$을 구성할 수 있는 능력을 가지고 있어야 하며, 또한 $p(n)$이 4 이상의 자연수의 집합을 정의역으로 하는 명제치 함수임을 이해할 수 있어야 한다.

[함의치 함수 스키마]

$p(n)$으로부터 '$p(n) \rightarrow p(n+1)$'을 구성하고, 이것이 수학적 귀납법으로 증명해야 하는 명제 $q(n)$임을 인지할 수 있어야 한다. 이 때 명제 $q(n)$은 다음과 같다.

$n! > 2^n$이면 $(n+1)! > 2^{n+1}$이다.

(단, n은 4 이상의 자연수)

이 경우에도 명제 $q(n)$을 증명하는 것은

$p(n)$이 성립한다는 가정 하에 $p(n+1)$을 증명하는 것임을 이해하는 것이 필요하다.

[긍정 논리식 스키마]

명제 $p(4)$와 $n \geq 4$일 때 $q(n)$: $p(n) \rightarrow p(n+1)$을 증명함으로써 4 이상의 자연수 n에 대해 $p(n)$이 참이 됨을 이끌어내고 이 사실을 무리 없이 받아들일 수 있을 때, 수학적 귀납법과 관련된 긍정 논리식 스키마가 구성되었다고 할 수 있다.

III. 학생들의 이해수준 분석 과정

본 연구에서는 수학적 귀납법에 대한 학생들의 이해 수준과 오류의 유형을 분석하기 위해 지필검사와 면담 조사를 실시하였다. 대상 학생들은 서울 소재 A 고등학교의 이과 계열 2학년에 재학 중인 학생들로, 이들은 제 7차 교육과정에 따라 2학년에 들어와서 수학 I의 수열 단원을 통해 수학적 귀납법을 처음 배운지 1~2주가 경과한 상태였다. 이 학생들 중 앞의 절에서 분석한 두 개의 예제를 증명하기 위해 요구되는 기본적인 대수식 조작 능력을 갖고 있다고 판단되는, 즉 기본적인 함수 스키마를 갖고 있는 것으로 판단되는[1] 172명의 학생들을 선정하여, 이 학생들을 대상으로 지필검사를 먼저 실시하였다. 지필검사에 이은 면담조사는 지필검사의 답안에서 명료하지 않은 표현이나 연구자가 예상하지 못했던 흥미로운 답안을 보충 설명하고 분명하게 하기 위한 목적으로 일부의 학생들을 대상으로 하여 추가 실시되었다.

1. 지필검사

사용된 지필검사의 문제는 학생들이 수학적 귀납법에 관련된 스키마들을 가지고 있는지 확인하려는 것으로, 그 내용은 다음과 같다.

(예제 1) 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

이 성립한다.

(예제 2) 4 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $n! > 2^n$이 성립한다.

(Q1) 주어진 명제를 "모든 자연수 n에 대해 $p(n)$이 성립한다"의 형태로 이해하자.

(1-1) 명제 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$을 차례대로 써 보아라.

(1-2) 위의 세 명제 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$이 모두 참임을 계산을 통해 확인하여라.

(Q2) (Q1)의 명제 $p(n)$을 이용해 다음의 명제 $q(n)$을 만들 수 있다.

$q(n)$: $p(n)$이 성립하면 $p(n+1)$도 성립한다.

(2-1) 명제 $q(n)$을 문장으로 풀어 써 보아라.

(2-2) 명제 $q(n)$이 참임을 증명하여라.

(Q3) 명제 $p(1)$과 명제 $q(n)$이 모두 참임을 기억하고, 다음 질문에 답하여라.

(3-1) 명제 $p(5)$도 참이라고 결론을 내릴 수 있을까? 그렇게 생각한 이유를 설명하여라.

(3-2) 명제 $p(5.5)$도 참이라고 결론을 내릴 수 있을까? 그렇게 생각한 이유를 설명하여라.

(Q1), (Q2), (Q3)은 각각 명제치 함수 스키마,

1) 이러한 판단은 예제 1, 2를 해결하기 위해 필요한 기본적인 대수적 능력, 즉 부분분수의 변형, 부등식의 성질, 계승, 지수 개념 등을 포함한 문항으로 예비검사를 실시하여 이루어졌다.

함의치 함수 스키마, 긍정 논리식 스키마의 구성을 확인하고자 하는 서술형 문제이다. 각 문제들은 수학적 귀납법을 이용한 증명의 과정에서 요구되는 조작의 내용을 써 보거나 반성하게 함으로써 필요한 스키마들을 내면화하고 있는지의 여부를 판단하려는 의도를 가지고 있다.

학생들에게는 검사 전에 본 연구의 개괄적 요지를 설명한 후 자세한 안내를 하였으며, 풀이 과정이나 자신의 생각은 최대한 자세하게 서술하도록 하였다. 검사지에 나타난 질문에 순서대로 답하고 이전의 문제로 돌아가지 말 것을 지시하였으며, 지필 검사 시간은 20분이 소요되었다.

2. 면담조사

면담은 학생들의 답변을 보다 명확히 하고 상세화하기 위한 목적으로 이루어진 것으로, 특히 분석하기 애매한 답이나 문항별로 일관성 없는 답변을 제시한 학생을 중심으로 실시하였다.

예를 들면, 명제 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$을 차례대로 써 보게 한 (1-1)과 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$이 모두 참임을 계산을 통해 확인해 보게 한 (1-2)에 답할 때, (1-1)에서는 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$을 잘못 썼다가 (1-2)를 해결하는 과정에서 이를 수정하고 물음표를 한 학생의 경우, 면담을 통해 그 학생이 어떠한 과정을 통해 올바른 명제치 함수 스키마를 구성하게 되었는지 추측해 볼 수 있었다. 이와 같이, 학생들의 답안에서 불충분한 부분을 보충하여 첨삭하게 한 뒤 한 명당 5분 정도의 시간을 할애하여 불명확한 대답을 명확히 하는 형식의 면담이 주로 이루어졌다.

그 외에, 예상하지 못했던 흥미로운 답변을 한 학생 15명을 선정하여 한 명당 5-15분 정도의 시간으로 추가적인 시사를 얻기 위한 면담을 실시하였다.

3. 자료의 분석

자료의 수집과 1차 분석을 위해서, 학생들이 제출한 답지의 각 문항을 검토한 후, 나타난 오류의 유형들을 고려하여 채점 기준표를 작성하였다. 특히, 오답 중에서 전형적으로 나타나는 패턴에 대해서는 오답이라 하더라도 유형에 따라 다른 코드를 주었다. 학생들의 오류에 관한 분석은, 답지에 대한 1차 분석 후 추가로 실시된 면담 결과와 그들이 작성한 답지의 프로토콜을 바탕으로 하여 이루어졌다.

IV. 분석 결과

1. 명제치 함수 스키마

우선 (Q1)의 문항 (1-1)과 (1-2)에 대하여 올바른 답안을 작성한 학생은, 기본적인 함수 스키마를 갖고 있다고 판단되는 172명의 학생들 중 156명의 학생들로, 전체의 90.7%에 이르렀다. 그러나 이들 중 소수이긴 하지만 6명의 학생들은 $p(n) \rightarrow p(n+1)$을 서술하도록 한 (Q2)의 문항 (2-1)의 답안에서 $p(n+1)$을 다음과 같이 잘못 이해하고 있음을 발견하였다.

$$p(n+1):\ \frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

이와 같은 오답은 명제치 함수 스키마를 구성하지 못한 때문인지, 아니면 함의치 함수 스키마를 구성하지 못한 때문인지는 명확하게 판단할 수 없지만, (Q1)의 답안을 정확하게 작성한 156명 모두가 $p(n)$을 자연수를 정의역으로 하는 함수로서 구성하고 있는 것이 아니라는 판단은 가능하게 한다. 결국 이 6명의 학생들을 제외하면 기본적인 함수 스키마를 가지고 있는 학생들 중 87.2%에 해당하는 150명의 학

생이 명제치 함수 스키마를 구성하고 있다고 일차적으로 결론내릴 수 있다.

2. 함의치 함수 스키마

(Q2)의 문항 (2-1)에서 요구한 명제, '$q(n)$: $p(n) \rightarrow p(n+1)$'을 정확하게 구성한 학생은 전체 172명 중 92명으로, 약 53.5%에 이르렀다. 그러나 '$q(n)$: $p(n) \rightarrow p(n+1)$'을 증명하도록 요구한 문항 (2-2)의 답안을 분석한 결과, $q(n)$의 함의적 특성을 이해하고 $p(n)$을 가정한 상태에서 $p(n+1)$을 증명하려 한 학생은 이들 중 단지 21명에 불과하였다. 특히 그 21명 중에는 $q(1)$($p(1)$이 성립하면 $p(2)$도 성립한다), $q(2)$($p(2)$가 성립하면 $p(3)$도 성립한다), $q(3)$($p(3)$이 성립하면 $p(4)$도 성립한다), ...등의 몇 가지 경우에 대해서만 $q(n)$을 증명한 후 모든 자연수 n에 대해 $q(n)$이 성립할 것임을 주장한 학생들도 5명이 포함되어 있다. 결국 이와 같은 귀납적인 논증을 한 학생들을 제외하면 전체 학생들 중 16명만이 명제 '$p(n) \rightarrow p(n+1)$'을 정확하게 증명할 수 있었으나, 명제 $q(n)$을 자연수를 정의역으로 하고 함의관계가 포함된 명제를 치역으로 하는 함의치 함수의 구조로 일단 이해하는 학생은 귀납적 논증을 한 학생들까지 모두 포함하여 전체 학생의 12.2%에 해당하는 21명이라고 판단하였다.

한편, 문항 (Q2)에 대한 학생들의 답안을 분석한 결과, 함의치 함수 스키마의 구성과 관련하여 다음과 같은 세 가지 정도의 전형적인 오류 유형이 관찰되었다.

[F1] 모종의 함의관계는 인식하지만 $p(n)$으로부터 $p(n+1)$을 찾아내지 못하는 경우

문항 (1-1)에서 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ 등을 잘 구성했던 학생들 중에 명제 $p(n+1)$을 구성하지 못하는 경우가 다수 발견되었다. 구체적인 사례는 다음과 같은 것들이다.

<u>(2-1) 명제 $q(n)$을 문장으로 풀어 써 보아라.</u>
$p(1)$이 성립하면 $p(2)$도 성립한다.

<u>(2-1) 명제 $q(n)$을 문장으로 풀어 써 보아라.</u>
$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ 이면
$p(1)$, $p(2)$, $p(3)$이 성립한다.

이와 같은 답안을 작성하는 학생들의 경우, 함의치 함수 스키마의 구성 이전에 필요한 기본적인 대수식 조작 능력을 포함하는 함수 스키마가 구성되어 있지 않은 것은 아닌가 의심할 수도 있었다. 그러나 유사한 답안을 작성한 학생들 중 4명을 대상으로 면담조사를 한 결과 교사가 $p(n+1)$만을 서술해 보도록 요구하였을 때에는 대부분 올바른 답을 작성하였다. 그러면서도 함의 관계가 포함된 명제의 한 부분으로 $p(n+1)$을 써야 할 때에는 혼란스러움을 나타내었다. 결국 이와 같은 학생들의 경우에는 명제치 함수 스키마와 기존의 논리 스키마를 조절하여 함의치 함수 스키마를 구성하는 과정에서 어려움을 겪고 있는 것으로 해석해야 할 것이다.

[F2] $p(n+1)$을 $q(n)$으로 생각하는 경우

다음과 같은 유형의 답안이 이에 해당한다.

<u>(2-1) 명제 $q(n)$을 문장으로 풀어 써 보아라.</u>
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

<u>(2-1) 명제 $q(n)$을 문장으로 풀어 써 보아라.</u>

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

두 번째 답안의 경우는 $p(n+1)$을 $q(n)$으로 생각한 것과 함께, $p(n+1)$에 해당하는 명제 또한 올바르게 구성하지 못하였다. 그렇지만 이러한 답안을 작성한 학생의 경우에도, 면담조사에서 교사의 간단한 지적만으로 별다른 지도 없이 곧바로 자신의 답안을 수정하여 올바른 형태의 $p(n+1)$을 서술할 수는 있었다. 결국 이들에게 문제가 되는 것은 명제 '$q(n)$: $p(n)\rightarrow p(n+1)$'을 구성하여 서술하는 것이었으며, 이와 관련해서는 많은 어려움을 겪었다. 이와 같은 학생들은 함의치 함수 스키마를 구성하는 데 있어서 어려움을 겪고 있는 단계로 해석할 수 있을 것이다.

[F3] $q(n)$을 증명하지 않고 $p(n)$, $p(n+1)$의 각각을 증명하는 경우

명제 '$q(n)$: $p(n)\rightarrow p(n+1)$'을 증명하라고 요구한 문항 (2-2)에서 학생들의 정답률은 급격하게 낮아졌다. 앞서 언급하였듯이 $q(1)$, $q(2)$, $q(3)$,...등을 증명함으로써 $q(n)$의 일반성을 도출하려는 귀납적 논증을 시도한 학생들의 경우도 있었지만, 그러한 경우에도 명제 $q(n)$의 함의적 구조는 이해하고 있다고 볼 수 있을 것이다. 명제 $q(n)$의 함의적 구조를 이해하고 있지 못한 것으로 판단되는 학생들의 전형적인 답안은 명제 '$p(n)\rightarrow p(n+1)$'을 증명하는 것이 아니라 명제 $p(n)$과 $p(n+1)$ 각각을 증명하는 것이다. 다음은 이와 같은 유형의 한 사례이다.

(2-2) 명제 $q(n)$이 참임을 증명하여라.

$$p(1)=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} p(n)&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\ &=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(n+1)&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\ &=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &=1-\frac{1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

위와 같은 답안을 작성한 학생의 경우, 문항 (2-1)에서 명제 $q(n)$을 올바르게 서술하였음에도 불구하고 문항 (2-2)에서는 명제 $q(n)$을 증명하지 않고 명제 $p(n)$과 $p(n+1)$ 각각을 증명하였다. 이 학생의 경우에도 '명제 $p(n)$이 참임을 가정하면 명제 $p(n+1)$이 참'이라는 명제 $q(n)$의 함의적 구조를 이해하고 있지 못하는 것을 보여주는 사례라고 할 수 있을 것이다.[2)]

3. 긍정 논리식 스키마

명제 $p(1)$과 명제 $p(n)\rightarrow p(n+1)$이 참임을 이용하여 명제 $p(5)$가 참임을 이끌어낼 수 있는지를 묻는 (Q3)의 문항 (3-1)에 대하여 올바른 답을 한 학생은 전체 172명 중 55.2%에 불과한 95명이었다. 고등학생들 중에서 긍정 논리식 $[p\wedge(p\rightarrow q)]\rightarrow q$을 이해하지 못하는 학생은 거의 없을 것이라고 생각하였기 때문에 이는 다소 예상하지 못한 결과이었다.

특히, (Q1)에서 주어진 명제치 함수 $p(n)$에

2) 이전 단원에서 유사한 문제를 수학적 귀납법을 사용하지 않고도 사실상 '증명'해 왔다는 점은, 학생들이 명제 $p(n)$과 $p(n+1)$ 사이의 함의를 굳이 증명할 필요를 받아들이기 힘들게 하는 하나의 이유가 될 수도 있다. 수학적 귀납법과 관련한 예제는 다른 증명 방법으로 증명하기 어려운 문제인 것이 바람직할 것이나, 대부분의 교과서에 주로 사용되는 예제들은 그렇지 못하다.

직접 $n=5$를 대입하여 만든 구체적인 명제 $p(5)$가 참임을 증명하려고 시도한 학생은 42명으로, 전체의 24.4%이었다. 다음은 그와 같은 답안의 한 예이다.

(3-1) 명제 $p(5)$도 참이라고 결론을 내릴 수 있을까? 그렇게 생각한 이유를 설명하여라.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{5}{6}$$

이므로 참이다.

또한 아예 명제 $p(5)$가 거짓이라고 추측하거나 모르겠다고 답한 학생도 35명으로, 전체의 20.3%에 달하였다. 이들 중 5명을 대상으로 실시한 면담조사에서는 모든 학생이 기본적인 긍정 논리식을 이해하고 있는 것으로 밝혀졌으나 이들은 긍정 논리식을 $p(5)$가 참임을 증명하는 데에 사용하지는 못하였다. 이 학생들에게 다시 명제 $p(100)$이 참이라고 할 수 있을지 질문하였으나 이 경우에도 학생들은 긍정 논리식을 이용하지 않고 $p(100)$을 직접 구성하여 그것이 참인 이유를 설명하려고 시도하였다. 예를 들면, (예제 2)의 경우 $p(100)$에 해당하는 $100!>2^{100}$이 성립하는 이유를 다음과 같이 설명하였다.

$p(4)$에서부터 큰 쪽은 곱하는 수가 점점 커지지만 작은 쪽은 일정하게 2를 곱하기 때문에 부등식이 성립해요.

이와 같은 사례는 긍정 논리식 $[p\wedge(p\rightarrow q)]\rightarrow q$을 이해하고 있는 학생이라 하더라도 수학적 귀납법에서 요구하는 증명의 스키마로서 그것을 적용하는 것은 별개의 문제임을 보여 준다. 이는 또한 수학적 개념의 발생적 분해가 Gagné 식의 과제 분석과는 다른 시각을 제공하는 부분이라고도 할 수 있다. 즉, 수학적 귀납법과 같은 개념을 함수, 명제치 함수, 함의치 함수, 긍정 논리식 등으로 분해하는 것이 곧 그와 같은 하위 요소들의 합으로 수학적 귀납법의 개념을 단순히 환원할 수 있음을 의미하는 것은 아니라는 점에 주목해야 한다. 일상적인 논리에서도 쉽게 사용되는 긍정 논리식 스키마는 단순히 그 자체만으로서가 아니라 수학적 귀납법의 개념과 구조 안에서 함의치 함수 스키마 등과 조절(coordinate)됨으로서 수학적 귀납법의 스키마를 완성하는 반영적 추상화를 이루어야 하는 것이다.

한편, 긍정 논리식을 이용하여 $p(1)\rightarrow p(2)\rightarrow p(3)\rightarrow p(4)\rightarrow p(5)$의 과정을 밟아 $p(5)$가 참임을 이끌어낼 수 있었던 학생들 95명 중에서도 문항 (3-2)에서 "5.5가 자연수가 아니므로 $p(5.5)$가 성립한다고 말할 수 없다"고 답한 학생들은 56명에 불과하였다. 많은 학생들은 타당하지 못한 여러 이유를 들어 $p(5.5)$가 거짓일 것이라고 추측하였으며, 심지어 '모든 수 n에 대해 명제 $p(n)$이 참이므로 명제 $p(5.5)$도 참'이라고 서술한 학생들도 있었다. 다음은 주어진 명제가 자연수에 대해서만 정의되어 있음에도 불구하고 억지스럽게 $p(5.5)$를 정의하여 증명하려고 시도한 답안의 예이다.

(3-1) 명제 $p(5.5)$도 참이라고 결론을 내릴 수 있을까? 그렇게 생각한 이유를 설명하여라.

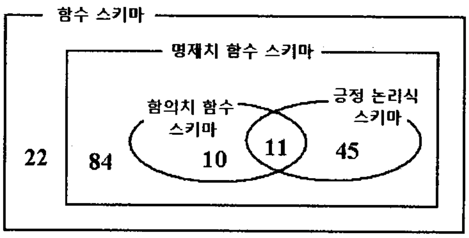
$(5.5)!>2^{5.5}=2^{5+\frac{1}{2}}$

$\left(\frac{55}{10}\right)!>32\sqrt{2}$ ... 참이 아닐 것이다.

이와 같은 오류를 보이는 학생들은 수학적 귀납법을 이용하는 증명이 자연수의 집합에서 정의되는 전칭 명제를 증명하는 것임을 정확하게 이해하고 있지 못한 것으로 판단할 수 있을 것이다. 결국, 전체 학생의 32.6%인 56명만이 수학적 귀납법과 관련된 긍정 논리식 스키마를 구성하고 있는 것으로 보인다.

4. 학생들의 이해 수준

본 연구의 지필검사와 면담조사를 통해 확인하고자 했던 것 중의 하나는 수학적 귀납법에 대한 학생들의 이해 수준을 위계적으로 분석하고자 하는 것이었다. 이를 위하여 수학적 귀납법을 이용한 증명의 스키마를 함수 스키마, 명제치 함수 스키마, 함의치 함수 스키마, 긍정 논리식 스키마 등으로 분해하여 학생들이 각 스키마를 구성하고 있는지의 여부를 조사하였다. 그 결과, 함수 스키마를 가진 전체 학생들 중 87.2%의 학생들이 명제치 함수 스키마를 가지고 있는 것이 확인되었고, 또 명제치 함수 스키마를 가진 학생들 중 일부만이 함의치 함수 스키마와 긍정 논리식 스키마를 가지고 있는 것이 확인되었다. 여기에서 함의치 함수 스키마를 가지고 있는 것과 긍정 논리식 스키마를 가지고 있는 것은 서로를 위한 충분조건이 되지는 않았으며, 두 스키마 모두를 구성하고 있는 학생은 전체 학생의 6.4%에 불과한 11명밖에 되지 않았다. 이 결과는 다음과 같은 벤 다이어그램으로 정리될 수 있다.



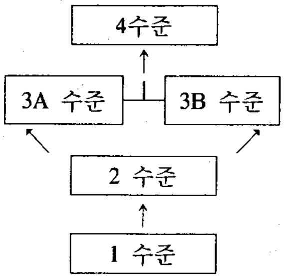
함수 스키마를 가진 학생: 172명 (100%)
명제치 함수 스키마를 가진 학생: 150명 (87.2%)
함의치 함수 스키마를 가진 학생: 21명 (12.2%)
긍정 논리식 스키마를 가진 학생: 56명 (32.6%)

위의 결과에서 우선 눈에 띄는 것은, 수학적 귀납법과 관련한 학습의 낮은 성취 중에서도 특히 학생들은 함의치 함수 스키마를 구성하는 데 있어서 가장 큰 어려움을 겪는다는 점이다. 수학적 귀납법의 증명에서 중요한 것은 증명해야 할 명제 $p(n)$을 직접 증명하는 것이 아니라 명제 $p(n)$과 $p(n+1)$ 사이에 함의관계를 줌으로써 정의되는 새로운 명제 '$q(n)$: $p(n) \rightarrow p(n+1)$'을 증명하는 것이다. 그러나 대부분의 학생들이 명제 $q(n)$을 증명하는 것은 물론이고 $q(n)$을 바르게 구성하는 것에서부터 많은 어려움을 겪고 있음이 확인되었다.

또한 주목해야 할 것은, 학생들이 쉽게 이해할 것으로 생각되는 긍정 논리식 스키마도 수학적 귀납법의 맥락에서 의미 있게 조절되어 통합되는 것은 쉽지 않다는 점이다. 함의치 함수 스키마와 긍정 논리식 스키마는 그 구성에 있어서 단선적인 위계 관계를 이루고 있지 않으며, 수학적 귀납법과 관련된 증명의 스키마를 학생들이 완전하게 구성하기 위해서는 이 두 가지의 스키마가 통합적인 구조로 조절되어야 함을 알 수 있었다.

이상의 결과를 종합해 보면, 수학적 귀납법에 대한 학생들의 이해 수준은 다음과 같은 네 단계로 상정할 수 있다.

1 수준: 기본적인 함수 스키마 구성 수준
2 수준: 명제치 함수 스키마 구성 수준
3A 수준: 함의치 함수 스키마 구성 수준
3B 수준: 긍정 논리식 스키마 구성 수준
4 수준: 수학적 귀납법 스키마 구성 수준



이와 같은 이해 수준의 분석은 수학적 귀납법을 이용한 증명 지도에 있어서 다양한 학생의 입장에서 겪는 어려움을 교사가 이해하고 보다 개선된 지도의 방법을 모색할 수 있는 시사점을 제공할 수 있을 것이다.

V. 맺는 글

수학적 귀납법을 이용한 증명을 학습함에 있어서 학생들이 겪는 어려움은 잘 알려져 있지만, 사실상 수학적 귀납법을 포함한 모든 수학적 증명의 학습은 학생들의 인식에 구조적인 변화를 요구한다는 점에 비추어 볼 때 이러한 학습의 어려움은 매우 다양한 관점에서 연구될 필요가 있는 문제이다.

본 연구에서는 Dubinsky의 발생적 분해를 틀로 하여 현재 우리나라의 고등학교 과정에서 다루어지는 수학적 귀납법 증명의 대표적인 예제들을 분석하고, 그것을 이해하고 증명하는데 필요한 스키마와 그에 대한 학생들의 구성 여부를 조사하였다. 그 결과 기본적인 함수 스키마를 가지고 있는 학생들 172명 중 87.2%가 명제치 함수 스키마를 구성하고 있었으며, 12.2%의 학생들만이 함의치 함수 스키마를, 또 32.6%의 학생들만이 긍정 논리식 스키마를 수학적 귀납법과 관련하여 구성하고 있음을 확인하였다. 또한 그 이해의 단계는 단선적이지는 않았지만 함수 스키마와 명제치 함수 스키마의 구성은 함의치 함수 스키마와 긍정 논리식 스키마의 구성에 선행하며 함의치 함수 스키마와 긍정 논리식 스키마는 수학적 귀납법 스키마를 위해 통합적으로 조절되어야 한다는 점도 확인하였다. 이를 바탕으로 하여 수학적 귀납법에 대한 학생들의 이해 수준은 1~4수준으로 설정될 수 있었다.

수학적 귀납법을 학습하면서 겪는 학생들의 어려움은 특히 함의치 함수 스키마의 구성과 관련하여 나타났다. 많은 학생들이 명제 $p(n) \to p(n+1)$을 구성하는 것 자체를 어려워했고, 명제 $p(n+1)$을 만들어내지 못하거나 $p(n) \to p(n+1)$을 증명하는 것 대신에 $p(n+1)$을 증명하려는 현상이 빈번하게 나타났다. 이와 같은 함의치 함수 스키마의 구성은 수학적 개념 형성에 필요한 반영적 추상화, 특히 대상화(objectification)와 관련이 깊다. 주어진 명제 $p(n)$으로부터 두 명제 사이의 함의 관계를 생각하고, 다시 그 함의 관계 자체를 사고의 대상으로 삼을 수 있어야 하기 때문이다. 명제 $p(n) \to p(n+1)$을 구성하고 증명하는 과정에서 나타나는 F1, F2, F3과 같은 전형적인 오류들은 모두 근본적으로는 이와 같은 함의 관계를 대상화하지 못하는 것에서 기인한다고 해석할 수도 있으므로, 다양한 개념들을 이용하여 이러한 대상화를 연습할 수 있는 내용을 수학적 귀납법을 위한 보충 과정으로 구상할 수 있을 것이다. 이러한 학습 과정은 추론과 증명 영역뿐만 아니라 규칙성과 함수 영역 등 다양한 내용과 관련되어 구성될 수 있다.

또한, 기본적인 긍정 논리식을 이해하고 있는 것과 이를 수학적 귀납법의 논리 전개에 적용하는 것은 확실하게 구분되는 능력이었으며 예상 밖으로 많은 학생들이 후자를 성공적으로 수행하지 못하는 것으로 밝혀졌다. 이러한 학생들의 어려움을 이해한다면, 명제 $p(n)$에서 $p(1) \to p(2) \to p(3) \to \cdots$과 같은 논리 전개 과정은 지금보다 더욱 명시적으로 강조하는 것이 '모든 자연수 n에 대해 명제 $p(n)$이 성립한다'는 전칭 명제와 자연수의 구성 원리를 학생들이 조화롭게 통합할 수 있게 하는 데 도움이 될 것으로 보인다.

끝으로, 본 연구에서 얻은 결과를 바탕으로

하는 지속적인 후속 연구가 이루어지기를 기대하며 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에서 학생들에게 제시된 문항은 모두 대수적인 명제들, 특히 학생들에게 익숙한 유형의 명제들이었다. 본 연구의 결과를 더욱 일반화하기 위해서는 학생들에게 익숙하지 않은 명제들, 기하와 해석학 분야의 명제들을 사용하여 본 연구의 결과와 유사한 경향성을 확인할 수 있는 보충 연구가 필요하다.

둘째, 본 고에서는 다루지 못했지만 학생들과의 면담 과정에서 수학적 귀납법이 '모든' 자연수에 대해 주어진 명제의 타당성을 보증한다는 것을 확신하기 힘들어 하는 학생들의 소수 사례를 발견하였다.[3] 무한 개념, 특히 실무한 개념과 관련되어 있는 것으로 보이는 이와 같은 학생들의 인지적 어려움은 무한집합이라는 자연수 집합 전체를 대상으로 하는 수학적 귀납법의 학습과 관련된 또 다른 연구 문제가 될 수 있을 것으로 보인다.

셋째, 본 연구는 Dubinsky의 발생적 분해가 수학적 귀납법의 학습과 관련된 학생들의 어려움을 이해하고 개선된 수업 모델을 구성하는 데에 많은 시사점을 제공할 수 있음을 확인하였다. 수학적 귀납법 외에도 학교수학에서 다루어지는 보다 많은 수학적 개념들에 대한 발생적 분해가 제시되고, 또 그것을 틀로 하여 학생들의 인지적인 어려움을 확인하고 오류를 교정할 수 있는 많은 모델이 제안되고 연구되기를 기대한다.

참고문헌

김남희(1992). 수학적 귀납법에 관한 교육학적 논의, **대한수학교육학회논문집 2**(1), 85-92.

Barbeau, E. J. (2000). *Mathematical fallacies, flaws, & flimflam.* Washington: MAA.

Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. in Schoenfeld, A. H. (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving,* 221-243. LEA Publishers. Hillsdale, New Jersey.

Ernest, P. (1984). Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 173-189.

Fischbein, E., & Engel, H. (1989). Psychological difficulties in understanding the principle of mathematical induction. in Vergnaud, G., Rogalski, J., & Artigue, M.(Eds.), *Proceedings of the 13th PME C* (vol. 1), 276-282. Paris, France.

3) 172명 중 2명의 학생이 그러한 반응을 보였다. 다음은 모든 자연수 n에 대해 p(n)이 성립하는 것을 확신하지 못한다는 한 학생의 대화 중 일부이다: "1일 때 성립하면 2일 때도 성립하고 2일 때 성립하면 3일 때도 성립하고, 이런 식으로 해서 정말 무한히 큰 자연수에 대해서도 그렇게 될 거라고 말하는 건 정확하지 않다고 생각해요. 엄청나게 큰 수 중 하나를 넣었는데 성립 안 할 수도 있잖아요. 엄청나게 큰 수에 대해서는 무한대나 극한 같은 개념이 있어야 할 것 같아요."

On the Students' Understanding of Mathematical Induction

Hong, Jin Kon (Konkuk University)
Kim, Yoon Kyung (Konkuk University, Graduate School)

This study analysed the schemata which are requisite to understand and prove examples of mathematical induction, and examined students' construction of the schemata. We verified that the construction of implication-valued function schema and modus ponens schema needs function schema and proposition-valued function schema, and needs synthetic coordination for successive mathematical induction schema. Given this background, we establish 1~4 levels for students' understanding of the mathematical induction. Further, we analysed cognitive difficulties of students who studying mathematical induction in connection with these understanding levels.

* **Key words** : mathematical induction(수학적 귀납법), understanding level(이해 수준), schema(스키마), proposition-valued function(명제치 함수), implication-valued function(함의치 함수)

논문접수: 2008. 1. 9
심사완료: 2008. 2. 20