대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 18, No. 1, 103-121. Feb 2008

5, 6, 7학년 학생들의 비례추론 능력 실태 조사

안 숙 현* · 방 정 숙**

본 연구는 비례 추론의 중요성을 바탕으로 5, 6, 7학년 학생들의 비례추론 능력을 알아보고자, 다양한 유형의 비례 문제와 비례가 아닌 문제로 구성된 검사지를 이용하여 5학년 155명, 6학년 153명, 7학년 190명의 반응을 분석하였다. 분석 결과, 비례문제 유형별로는 정비례 상황의 미지값 구하기 문제, 수리적 비교, 반비례 상황의 미지값 구하기 문제, 질적 예측 및 비교의 순으로 성취 정도가 높게 나타났으며, 비례가 아닌 문제에서는 비례 상황이 아님에도 불구하고 전체 약34%의 학생들이 비례관계를 적용하는 오류를 범하였다. 문제유형별로 학년별 학생들의 반응을 비교 분석함으로써 비와 비율 및 비례와 관련한 교수 · 학습 방향에 대한 시사점을 도출하였다.

Ⅰ. 서 론

일상생활에서 수학을 이해하고 사용할 수 있어야 한다는 필요성은 절실히 요구되어 왔으며 앞으로도 그러할 것이다(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). 비와 비율 및 비례는 일상생활 속에 깊숙이 관련되는데, 현행 교육과정에서는 6학년이 되어서야 관련된 내용을 배운다. 하지만, 형식적으로 배우기 훨씬 이전부터 다양한 상황에서 비형식적으로 만나는 실생활 내용이기도 하다(정은실, 2003a).

한편, 비와 비율 및 비례를 토대로 하는 비례추론 능력은 형식적 사고의 중요한 구성요소 중 하나이고(Hoffer & Hoffer, 1992), 이러한 능력의 획득은 학생의 인지발달에 이정표 역할을 한다(Cramer & Post, 1993). 수학적 성장에도 밑거름이 되는 비례추론의 기저에는 비와 비율 및 비례의 개념이 있는데, 초 · 중등학교에서 이러한 개념적 이해를 하지 못하면 대수, 기하를 비롯하여 양적인 사고와 이해가 필요한 다양한 교과에서의 학습에 지장을 받는다(Hoffer & Hoffer, 1992). 다시 말해, 비례 추론은 비와 비율 및 비례 개념을 바탕으로 하고 실생활뿐 아니라 중 · 고등학교에서 배울 수학의 주요한 기초가 되므로 학교수학의 중요한 부분이다.

그러나 '비' 라는 학습 대상은 수나 도형과는 다르게 두 양 또는 두 수를 다루면서도 그것을 하나의 대상으로 파악해야 하는 성질을 가지고 있으므로 초등학교 학생이 학습하기에 분명 어려운 대상이다. 그럼에도 불구하고 여러 여건상 교과서에서는 비의 표현 방법과 같은 외형적 특징과 알고리즘을 강조하고 있다(정은실, 2003b). 이러한 이유로 비례 추론의 중

* 대전탄방초등학교, ittzy@hanmail.net
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr

요성에도 불구하고 학생들은 비와 비율 및 비례 개념이 가지는 진정한 의미를 파악하지 못하고 절차적 지식만을 갖게 될 우려가 있다.

비와 비례에 관한 영역은 학교수학에서 차지하는 중요성으로 인해 오랫동안 수학교육 뿐 아니라, 과학, 발달 심리학 분야에서 연구의 초점이 되어 왔는데(이종욱, 2006; Lo & Watanabe, 1997), 비와 비례 개념 이해와 관련한 학생들의 어려움에 비추어 관련 연구가 비교적 많이 이루어지고 있다(예, Ben-Chaim et al., 1998; Cramer & Post, 1993; Heinz, 2000; Heller et al., 1990; Lamon, 1993). 국내에서도 비와 비례에 관한 다양한 관점에서 연구가 이루지고 있다. 이러한 연구들은 대부분 비와 비율 및 비례 학습에 관한 어려움과 중요성을 전제로 하고 있지만 대부분의 연구 초점이 비 관련 개념에 관한 다각적 분석 등과 같이 비 개념 자체인 경우가 많고(예, 장혜원, 2002; 정영옥, 2005; 정은실, 2003a, 2003b), 그에 비해 학생들의 실태를 살펴본 연구는 비교적 적다.

그러나 학교수학뿐 아니라 실생활에서도 필수적인 비례 추론과 관련한 학생들의 실태를 다양한 방법으로 살펴보는 것은 매우 중요하며, 이는 비와 비례의 교수·학습에 관련해서도 큰 의미를 가진다. 물론, 학생들의 비례 문제 해결 전략과 오류에 관한 연구도 수행된 바 있으나, 교과서에 제시된 형태의 세 개의 수가 주어지고 한 개의 미지값을 구하는 비례 문제 위주로 다루어 학생들이 비례문제를 푸는 전략과 오류를 분류하였다(예, 이영숙, 1998; 최효진, 2005). 그러나 이러한 문제 유형은 비례 추론의 한 유형일 뿐 비례 추론 전부를 나타낸다고 볼 수는 없다(권오남, 박정숙, 박지현, 2007).

한편, 홍수영(2006)은 비례 문제를 미지값 문제에 한정하지 않고, 비례추론의 영역을 계산 범주의 미지값 문제, 수리적 비교 문제영역과 의미범주의 절대적 변화와 상대적 변화, 공변량과 불변량 영역으로 세분화하여 각 영역의 반응 빈도수, 전략, 오류를 분석하였다. 그 결과, 계산 범주에 속하는 미지값 문제에서 학생들이 가장 높은 성취를 보이는 것을 확인하였다. 그러나 이는 비례를 학습하지 않은 5학년에 한정되었고 다양한 각도에서 비례추론 능력을 확인하는 데에는 한계를 가졌다.

결과적으로 비의 의미를 명확히 이해하고 있는지를 파악하기 위해 다양한 유형의 문제를 다룬 연구는 드물다. 특히 수리적 정보 대신 질적 정보가 주어졌을 때 알고리즘 접근과는 다른 사고과정을 통해 두 변수간의 관계를 비교하고 추론하는 유형을 다룬 연구는 거의 찾아볼 수가 없다. 그러나 질적 과제는 비례의 의미 이해를 확인할 수 있으므로 비례추론 연구의 매우 중요한 부분임을 간과할 수 없다.

뿐만 아니라, 비례추론에는 비례 상황과 비례가 아닌 상황을 구별하는 능력도 포함되지만, 비례 상황과 비례가 아닌 상황을 구분하는지를 살펴본 연구 또한 구체적으로 이루어지지 않은 실정이다. 그러나 비례추론이 실생활과 학교 교육의 다양한 영역에서 강조되고 있는 만큼, 학생들은 비례가 아닌 상황조차 과도하게 비례 관계로 일반화하는 경향을 보이기도 한다(Cramer, Post, & Currier, 1993; De Bock, Verschaffel, & Janssens, 1998; Van Dooren et al., 2003, 2005). 이와 같이 비례 상황을 식별하지 못한다면, 단순히 비례 문제를 해결할 수 있다고 해서 비례적 추론자라고 할 수 없으므로, 비례추론 능력에 관한 연구에서 비례 상황을 식별하는 능력을 확인하는 것도 필요하다.

이러한 필요성에 비추어볼 때, 학생들이 다양한 유형의 비례 문제에서 곱셈적 관계를 이해하고, 비례 문제와 비례가 아닌 문제를 구분하여 상황에 맞는 올바른 방법으로 문제를 해결

할 수 있는지를 통해 그들의 비례추론 능력을 살펴보는 것은 매우 의미 있는 일일 것이다. 이에, 본 연구는 다양한 유형의 비례 문제와 비례가 아닌 문제에서 학생들의 반응을 살펴보았다.

구체적인 연구 내용은 비례 문제 유형별(정비례 상황의 미지값 구하기 문제, 반비례 상황의 미지값 구하기 문제, 수리적 비교 문제, 질적 예측 및 비교 문제) 학생들의 반응이 어떠한지, 비례가 아닌 문제(항상 일정, 덧셈 관계, 합이 일정, 선형 관계)에서 학생들의 반응이 어떠한지를 살펴보는 것이었다. 또한, 비례추론의 바탕에 비와 비례에 대한 개념적 이해가 포함된다는 점을 고려하여, 비례를 학습하지 않은 5학년, 비와 비율 및 비례식을 학습한 6학년, 정비례와 반비례를 모두 학습한 7학년 학생들을 대상으로 하였다. 이를 통해, 비와 비율 및 비례와 관련한 교수·학습 방향에 시사점을 줄 수 있을 것이다.

II. 이론적 배경

1. 비와 비례 개념

초등학교 수학내용에서 분수를 포함하여 비와 비율, 비례만큼 수학적으로도 풍부하고 인지적으로 복잡하여 가르치기 어려운 영역도 없다(Smith, 2002). 이러한 비와 비율 및 비례 개념은 고립된 개념이 아닌 곱셈, 나눗셈, 분수 등의 다른 개념과 연결되어 있다.

비와 비율 개념은 고정된 곱셈적 관계와 순서가 있는 두 양 또는 두 수를 비교하는 것을 의미하는데 구체적으로 살펴보면 다음과 같다 (Baroody & Coslick, 1998).

· 곱셈적 관계: $\frac{3}{5}$같은 비율은 비교되는 양의 크기 뿐 아니라 두 양 사이의 관계를 나타내며, 그 관계는 곱셈적이다. 예를 들어, $\frac{3}{5}$에서 3은 5의 $\frac{3}{5}$이고, 5는 3의 $\frac{5}{3}$를 나타낸다.

· 고정된 관계: 함께 변하는 두 양의 관계가 변화 후에도 고정되어 있는 것을 말한다. 예를 들어, 정사각형의 한 변의 길이를 2배로 하면 대각선의 길이도 2배가 되는 고정된 관계가 있다. 반면, 정사각형의 한 변의 길이가 2배가 되었을 때 넓이는 4배가 되므로 비율이 아니다.

· 순서가 있는 관계: 비는 두 양을 특정한 순서에 따라 비교한다. 예를 들어, 400g에 3000원이라는 것과 3000g에 400원이라는 것과는 의미가 전혀 다르다. 즉, 비나 비율은 순서가 매우 중요하며 순서가 바뀔 경우 의미가 달라진다.

비례란 규칙적으로 변화하는 두 양 사이의 곱셈적 관계를 말하며, 이는 비의 불변(invariance of ratio)을 의미하는 정비례와 곱의 불변(invariance of product)을 의미하는 반비례로 구분된다(Behr, Post, & Lesh, 1992). 즉, 정비례는 x의 값이 n배가 되면 y의 값도 n배가 되며, $\frac{y}{x}$가 항상 일정한 관계이고, 반비례는 x의 값이 n배가 되면 y의 값이 $\frac{1}{n}$배가 되며, xy가 항상 일정한 관계이다.

비와 비례 개념의 진정한 의미는 상황이나 크기가 바뀌어도 그 안에 내재하는 관계가 같다는 구조의 불변성을 인식하는 것이며(정은실, 2003b), 이러한 개념을 도입할 때에는 지나치게 빠른 형식화보다 직관적 접근을 거쳐 점진적으로 수량화, 형식화 하는 것이 필요하다(정영옥, 2005).

2. 비 개념의 형성과 발달

비례적 사고는 학생들이 습득해야 하는 형식적 사고의 중요한 구성요소 중 하나로 간주되는데, 그 기저에는 비와 비율 및 비례의 개념적 이해가 있다. 결국, 비와 비율 및 비례의 이해가 선행되어야 비례적 사고가 원활히 이루어진다고 할 수 있다.

비와 비율 및 비례와 관련한 개념의 발달과 관련한 요소를 <표Ⅱ-1>과 같이 정리해보면, 우선 비 개념을 형성함에 있어 한 양을 다른 양에 비추어 바라보는 상대적인 관점이 선행되어야 하고(Lamon, 1999), 이러한 두 양 사이에 곱셈적 관계가 있으며 기준량에 따라 비교하는 양의 값이 달라지는 것을 발견하게 된다(Baroody & Coslick, 1998). 또한, 동치비의 개념을 형성하며, 일정하게 유지되는 상황의 성질이나 관계를 파악하고, 곱셈적 관계를 일정하게 유지하며 두 양이 계속 변할 수 있음을 알게 된다(유현주, 1995; Freudenthal, 1983; Heinz, 2000; Thompson, 1994). 즉, 상대적인 관점과 곱셈적 사고의 기반 아래 비 개념이 형성·발달된다고 할 수 있다.

<표Ⅱ-1> 비 개념의 발달 요소

	특 징
상대적인 관점의 사고	• 항상 다른 것에 대한 양을 의미하는 상대적인 지표임 예) '5명'이라는 양이 다른 양에 비교될 경우 다른 의미를 수반함: 2인용 차 안의 5명, 축구장 안의 5명, 8인용 엘리베이터 안의 5명
곱셈적 관계 인식	• 두 양 사이에 덧셈적이 아닌 곱셈적 관계가 있음을 인식 예) 3:5의 경우 5가 3보다 2 크다는 덧셈적 관계가 아닌, 3이 5의 $\frac{3}{5}$이고, 5가 3의 $\frac{5}{3}$배임을 아는 것
순서에 의한 비교	• 두 양을 비교하는 순서가 중요하며 기준량에 따라 비교양이 다름을 인식 예) 3:5와 5:3은 다름
동치비 개념 인식	• 두 비 사이에 같은 관계가 있음을 인식 예) 3:5와 6:10 은 비의 값이 같음
불변량과 공변량 인식	• 불변량의 인식: 비 둘 사이에 일정하게 유지되는 상황의 성질이나 관계를 인식 예) 레몬 쥬스 3컵과 라임 쥬스 2컵으로 만든 레몬라임 쥬스를 3배, 4배 해도 레몬 쥬스에 대한 라임 쥬스의 양이 일정함을 아는 것 • 공변량의 인식: 둘 사이에 일정한 곱셈적 관계가 유지되면서 두 양이 동시에 계속 변할 수 있는 것을 인식 예) 레몬 쥬스가 3컵에서 6컵, 9컵으로 증가하면 라임 쥬스도 2컵, 4컵, 6컵으로 변하는 것을 아는 것

3. 비례추론

가. 비례추론의 발달

비례추론은 수학적 추론의 한 형태로 공변량과 불변량에 대한 이해, 곱셈적 비교, 정보를 저장하고 처리하는 능력을 포함한다. 또한 추리와 예측에도 관심을 가지며, 질적·양적 사고를 모두 포함하는데, 우리 세계의 많은 부분이 비례 규칙에 따라 움직이기 때문에 이러한 비례추론 능력은 실세계 현상을 해석하는 데 매우 유용하다(Post, Behr, & Lesh, 1988).

비례추론은 다양한 유리수 개념을 기반으로 한다. 따라서 비례적 추론자는 곱셈적 관점으로 문제에 접근하는 유연성이 있어야 하며 문제 상황이나 다루기 힘든 수에 의해 근본적으로 영향을 받지 않는 안정적인 모습을 가져야 한다. 뿐만 아니라, 비례 상황과 그렇지 않은 상황을 구분할 수 있어야 한다.

사실 많은 교과서에서는 비례추론과 관련하여 주로 세 수를 제시하고 하나의 미지값을 구하는 형태의 문제를 다룬다. 그리고 이러한 문제를 해결하기 위한 알고리즘이 강조되고 있다고 해도 과언이 아니다. 그러나 미지값 구하기 문제는 비례추론의 한 유형에 지나지 않는다(권오남 등, 2007). 게다가 미지값 구하기 문제를 해결하는 과정에서 단순히 기계적 알고리즘을 적용하였다면 명백하게 비례추론이라고 할 수 없다.

비례추론은 비례 문제를 알고리즘으로 해결하는 것 이상을 의미하며, 곱셈적 관계의 이해를 바탕으로 한 넓은 범위를 포함하는 의미이다. 이러한 비례추론의 발달에 대해서 여러 학자들은 견해 차이를 가지기도 하지만, 모두 곱셈추론의 중요성을 기반으로 하고 있음을 알 수 있다.

보통 학생들이 비례 문제를 해결하는 과정을

통해 비례추론의 발달을 설명할 수 있다 (Koellner-Clark & Lesh, 2003). 학생들이 비례추론의 과정에서 사용하는 전략은 크게 질적 관계, 덧셈적 관계, 곱셈적 관계의 세 가지 범주로 구분된다. 이러한 전략들은 비례에 관한 학생들의 사고에 대해 정교화의 수준을 나타낸다고 할 수 있다(Olof, 2003).

첫째, 질적 추론 전략은 비형식적, 직관적 지식에 근거하며, '더 많은, 더 적은'과 같이 비교하는 용어에 기초한다. 이것은 더 정교화된 전략을 사용할 때에도 사라지지 않는 전략이다. 둘째, 덧셈전략은 비례추론의 발달 초기에 지배적으로 사용되며 구성(Building up) 전략으로 대표된다. 그러나 비례추론의 핵심이 곱셈적 관계의 이해라는 것을 고려하면 구성 전략을 사용하여 성공적으로 비례 문제를 해결하더라도 보다 정교한 비례추론의 단계에 이를 수 없음을 주의해야 한다. 또한 덧셈전략에서 곱셈전략으로의 변화는 비례추론의 발달에 있어 중요한 역할을 한다. 셋째, 곱셈 전략은 비 사이의 공변량과 불변량을 이해하고 정수비와 비정수비 문제에 이들을 적용할 수 있는 전략이다.

이와 같이 비례추론은 여러 발달 단계를 거치며 학습될 수 있다. 이와 관련하여 비례추론의 발달 경향성을 살펴보면, 우선 비례추론의 발달 초기에는 두 양 사이의 관계를 인식하지 못하고 한 가지 변수에만 초점을 맞추지만, 두 양 사이의 관계를 인식하면서 질적으로 추론이 가능해지고, 차츰 양적으로 수량화를 하게 되는 단계에서 처음에는 덧셈적으로 수량화를 하다가 곱셈적으로 관계를 파악하게 되면서 비례추론 능력의 발달이 완성된다.

나. 비례추론의 오용

초·중등 수학교육에서 비례추론의 중요성에 대해서는 재론의 여지가 없다. 이로 인해 비례 개념은 수학 뿐 아니라 과학교육에서도 주목받는 핵심개념이며 학교 교육에서는 비례 개념을 바탕으로 한 비례추론을 매우 강조하고 있다. 그러나 비례추론이 실생활에서 자주 사용될 뿐 아니라 학교교육에서도 강조되어 다루고 있기 때문에, 많은 학생들은 다양한 수학 영역에서 비례 관계가 아닌 상황에서조차 과도하게 비례추론을 동원하기도 한다(Van Dooren et al., 2005). 비례 관계의 지나친 일반화로 인한 이러한 현상은 '선형성의 착각(illusion of linearity)'이라는 용어로 언급되며 다양한 분야에서 연구가 진행되고 있다(예, Van Dooren et al., 2003).

우선, 가장 활발한 연구가 이루어진 영역은 기하와 측정 영역이다. 예를 들면, 120명의 7학년 학생들(12-13세)과 222명의 10학년 학생들(15-16세)의 기하와 측정 영역에서의 오류 경향을 확인한 연구에서는 학생들이 도형의 길이, 넓이, 부피를 다룬 문장제에서 비례 모델을 부적절하게 사용하는 경향이 매우 강하게 형성되어 있는 것으로 드러났다(De Bock et al., 1998).

최근에는 학생들의 비례추론의 과도한 일반화로 인한 오용에 관한 연구가 기하와 측정 영역 뿐 아니라 수학의 다양한 영역으로 확장되어 이루어지고 있다. 그 예로는 10학년(15-16세)과 12학년 학생들(17-18세) 225명의 확률 추론에서 선형성의 착각에 대한 경향을 확인한 연구(Van Dooren et al., 2003), 이전의 연구 결과에 비추어 2학년에서 8학년 총 1062명을 대상으로 비례 상황, 비례가 아닌 상황의 다양한 유형의 수리 문제에서 비례 관계의 과도한 일반화 양상을 광범위하게 살펴보고자 한 연구(Van Dooren et al., 2005) 등이 있다. 이러한 연구 결과를 살펴보면, 확률 영역에서도 과도한 비례관계의 적용이 이루어지고 있으며, 정규

수학 시간에 확률을 배운 학생들에게서도 이러한 비례추론의 오용이 나타나는 것을 볼 수 있다. 또한, 비례 문제와 함께 비례가 아닌 문제로 선형관계(linear), 덧셈관계(additive), 항상 일정한 관계(constant)의 3가지 형태의 수리 문제를 미지값 구하기 형식으로 제시한 연구에서도 비례 상황이 아님에도 불구하고 전체 학생의 $\frac{1}{3}$가량이 비례관계를 적용한 오답을 하였다. 이러한 경향은 2학년부터 상당부분 나타나고 5학년에서는 학생의 절반가량이 비례 오답을 하며 그 후 점차 감소하지만 여전히 8학년 학생의 $\frac{1}{5}$가량이 비례관계를 과도하게 일반화하고 있음을 보여주었다.

결국, 학생들의 비례추론 오용의 경향은 기하와 측정영역에 국한되지 않으며 다양한 영역에서 '비례의 함정'에 빠지고 있음을 알 수 있다. 따라서 주어진 상황을 비례 상황과 비례가 아닌 상황으로 구분하는 능력이 비례추론의 중요한 부분임을 간과할 수 없겠다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

본 연구는 대전시에 소재한 초등학교와 중학교를 표집대상으로 하였으며, 표집 대상 학교 중에서 학생들의 학력 수준과 가정의 사회 경제적 수준이 중간 정도에 속하는 지역에 위치하는 초등학교 6개교와 중학교 3개교를 선정하였다. 또한, 초등학교와 중학교는 같은 학구에 속하는 학교로 선정하였다. 선정한 초등학교 6개교에서 5, 6학년 각각 1개 반씩, 중학교 3개교에서 7학년 남녀반 각각 1개 반씩을 선정하여 5학년(192명), 6학년(188명), 7학년(190명), 학년별로 각각 6개 반씩 570명을 연구 대상으로 하였다.

그러나 본 연구는 비와 비례를 학습하지 않은 5학년, 비와 비율 및 비례식을 학습한 6학년, 방정식과 함수 단원에서 정비례와 반비례를 학습한 7학년을 대상으로 비례추론능력을 파악하는 것을 목적으로 하고 있으므로, 간단한 설문지 응답을 바탕으로 비례식을 학습한 5학년 37명과, 함수를 학습한 6학년 35명을 제외한 498명을 분석대상으로 하였다(5학년 155명, 6학년 153명, 7학년 190명).

2. 연구 방법 및 검사 도구

본 연구는 5, 6, 7학년 학생들의 비례추론 능력에 대한 실태를 파악하는 것을 목적으로 검사 도구를 통한 조사 연구 방법을 적용하였다. 검사 도구는 다양한 유형의 비례 문제와 비례 상황 인식을 확인하기 위해 비례가 아닌 문제로 구성되었으며, 문헌검토를 통해 선행연구에서 사용된 문항을 수정·보완하여 개발되었다. 구체적으로, 검사도구의 문항 개발을 위해 비례 문제 유형은 Cramer & Post(1993)에 의해 소개된 3가지 과제 유형에 근거하였고, 비례 상황 인식을 평가하기 위한 비례가 아닌 문제 유형은 Van Dooren 등(2005)의 연구에서 사용한 문제 유형에 근거하였다. 또한 검사문항은 문제 상황과 수적 구조를 고려하여 선정하였다.

최종적인 검사 도구는 <표Ⅲ-1>과 같이 정비례 상황의 미지값 구하기, 반비례 상황의 미지값 구하기, 수리적 비교, 질적 예측 및 비교의 4가지 유형에 해당하는 8문항과 비례가 아닌 문제 4문항으로 하여 총 12문항으로 구성하였다. 검사지의 신뢰도를 알아보기 위해 Cronbach의 α값을 구한 결과 0.6920으로 신뢰할 수 있는 것으로 나타났다.

<표Ⅲ-1> 검사 문항의 구성

	문제 유형*	검사 항목	문제 선정 기준		문항 번호	문항 수
			문제 상황	수적 구조		
비례 문제	미지값 구하기 (정비례)	두 비의 항상 일정한 관계 ($\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$)를 파악하고, a, b, c의 세 정보로 d의 값 구하기	혼합**	단위비율 정수비 변화인수 정수비	1	2
			속력	단위비율 비정수비 변화인수 비정수비	7	
	미지값 구하기 (반비례)	두 변수의 곱이 일정한 관계 (ab=cd)를 파악하고, a, b, c의 세 정보를 바탕으로 d의 값 구하기	균형 잡기	곱이 일정 (240) 변화인수 2배	4	2
			속력	곱이 일정(24) 변화인수 3배	10	
	수리적 비교	두 비율의 수치적 정보가 주어졌을 때, 두 변수를 고려하고 수치적 정보를 대입하여 비율 비교하기	혼합	단위비율 정수비 변화인수 정수비	2	2
			속력	단위비율 비정수비 변화인수 비정수비	8	
	질적 예측 및 비교	'더 많은', '더 적은'과 같은 질적인 정보를 이용하여 두 변수 사이의 상대적인 관계 파악하여 비교하기	혼합	$\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$ 에서 a<c이고 b>d 인 경우	5	2
			속력	$\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$ 에서 a>c이고 b<d인 경우	11	
비례가 아닌 문제	항상 일정 ($y=a$)	비례적 상황과 비례가 아닌 상황을 인식하고, 상황에 맞는 방법을 이용하여 문제 해결하기	빨래가 마르는 시간	3 6 일정 ↓ ↓ 일정 12 □	3	4
	덧셈관계 ($y=x+a$)		나이 차이	12 24 +24 ↓ ↓ +24 36 □	6	
	합이 일정 ($x+y=a$)		책의 전체 쪽수	9 18 9+36 ↓ = ↓ 18+□ 36 □	9	
	선형관계 ($y=ax+b$)		거리에 따른 택시요금	4 8 ×500+1000 ↓ ↓ ×500+1000 3000 □	12	
합계						12

* 모든 문제형태는 선택형(선다형)이므로 선택형 문항에서 나타나는 제한된 답의 한계를 극복하기 위해 기타의 답을 적을 수 있도록 하였으며, 풀이과정을 자세히 적도록 하여 학생의 반응을 구체적으로 확인할 수 있도록 함

** 두 물질을 일정한 비율로 혼합하는 상황

3. 자료의 수집 및 분석

검사지에 대한 제반 정보를 얻기 위해 예비 검사를 통해 문제점을 수정한 후, 2007년 9월 28일 또는 29일에 본 검사를 실시하였다. 검사는 연구자와 충분한 논의를 거친 담임교사가 60분간 직접 실시하였으며, 검사가 이루어진 후 검사지는 연구자가 직접 회수하였다.

수집된 검사지는 학생들의 비례추론 능력을 살펴보기 위해 면밀히 분석되었다. 이를 토대로 각각의 비례 문제에 대한 학생들의 반응을 정답(올바른 과정을 통한 정답, 잘못된 과정을 통한 정답), 오답(올바른 과정을 통한 오답, 잘못된 과정을 통한 오답), 무응답으로 구분하고, 각각의 빈도수와 백분율을 나타내었다. 또한 각 유형별로 올바른 과정을 통해 정답을 한 학생들의 빈도수와 백분율을 바탕으로, 각 유형별 평균 정답률을 구하여 비례 문제 유형별 학생들의 수행 정도와 학년간 유의미한 차이 여부를 살펴보았다. 뿐만 아니라, 학년별 각 학생

들이 8개의 비례 문제에서 획득한 점수[1]로 학생들의 비례 문제 수행 정도를 살펴보았다.

한편, 비례가 아닌 문제는 각 문항별로 정답, 비례오답, 다른 오답, 무응답으로 구분하고, 각각의 빈도수와 백분율을 나타내었다. 그리고 비례오답을 한 학생들의 비율을 학년별, 문항별로 비교하여 이를 바탕으로 학생들이 비례 상황을 인식하는지의 여부를 확인하였다. 본 연구는 이와 같은 자료 분석을 토대로 5, 6, 7학년 학생들의 비례추론 능력 실태를 확인하였다.

Ⅳ. 결과 분석

1. 비례 문제에서 학생들의 반응

비례 문제는 정비례 상황의 미지값 구하기, 반비례 상황의 미지값 구하기, 수리적 비교, 질적 예측 및 비교의 4가지 유형으로 세분하였다. 또한 각 유형별로 2문항씩 구성되었다. 문항별로 나타난 학생들의 반응을 분석하여 비례 문제 유형별, 학년별로 학생들의 반응 빈도수와 백분율을 나타낸 결과는 <표Ⅳ-1>과 같다.

검사지를 통해 나타난 학생들의 반응 중 올바른 과정을 통한 정답의 빈도수와 백분율을 토대로 문제 유형별 학생들의 비례 문제 수행 정도를 요약하면 <표Ⅳ-2>와 [그림 Ⅳ-1]과 같다. 이 때, 정답률은 문제 유형별 2문항에서 정답의 빈도수의 합을 바탕으로 구한 것이다. 5, 6, 7학년 학생들의 반응은 비슷한 양상으로 나타났다. 정비례 상황의 미지값 구하기 문제가 78.1%의 가장 높은 정답률을 보였으며, 수리적 정보가 제공되지 않은 질적 예측 및 비교 문제가 34.1%로 가장 낮은 정답률을 보였다. 또한 미지값 구하기 문제에서는 정비례 상황에 비해 반비례 상황에서의 정답률이 39.5%로 상대적으로 매우 낮은 것을 볼 수 있다.

<표Ⅳ-1> 비례문제에서 보이는 학생들의 반응 빈도와 비율

문제	학년	정답				오답				무응답	
		올바른 과정		잘못된과정		올바른 과정		잘못된 과정			
미지값 구하기 (정비례)	5학년(N=310)*	184	59.4%	0	0.0%	2	0.6%	122	39.4%	2	0.6%
	6학년(N=306)	261	85.3%	0	0.0%	3	1.0%	41	13.4%	1	0.3%
	7학년(N=380)	333	87.6%	0	0.0%	9	2.4%	38	10.0%	0	0.0%
	전체(N=996)	**778**	**78.1%**	**0**	**0.0%**	**14**	**1.4%**	**201**	**20.2%**	**3**	**0.3%**
미지값 구하기 (반비례)	5학년	106	34.2%	8	2.6%	2	0.6%	193	62.3%	1	0.3%
	6학년	96	31.4%	5	1.6%	1	0.3%	202	66.0%	2	0.7%
	7학년	191	50.3%	3	0.8%	5	1.3%	172	45.3%	9	2.4%
	전체	**393**	**39.5%**	**16**	**1.6%**	**8**	**0.8%**	**567**	**56.9%**	**12**	**1.2%**
수리적 비교	5학년	134	43.2%	58	18.7%	4	1.3%	113	36.5%	1	0.3%
	6학년	161	52.6%	22	7.2%	3	1.0%	117	38.2%	3	1.0%
	7학년	236	62.1%	28	7.4%	8	2.1%	103	27.1%	5	1.3%
	전체	**531**	**53.3%**	**108**	**10.8%**	**15**	**1.5%**	**333**	**33.4%**	**9**	**0.9%**
질적 예측 및 비교	5학년	75	24.2%	76	24.5%	2	0.6%	156	50.3%	1	0.3%
	6학년	125	40.8%	35	11.4%	4	1.3%	140	45.8%	2	0.7%
	7학년	140	36.8%	69	18.2%	3	0.8%	162	42.6%	6	1.6%
	전체	**340**	**34.1%**	**180**	**18.1%**	**9**	**0.9%**	**458**	**46.0%**	**9**	**0.9%**

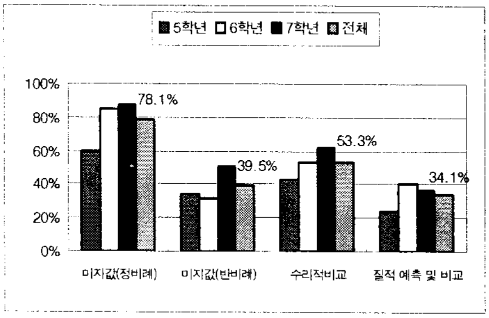
* N=학생수×2(문항수)로, 유형별 2문항의 빈도수의 합을 구한 것이다.

1) 비례 문제에서 올바른 과정을 통해 정답을 도출한 경우에 1점씩 부과하여 총 8점을 만점으로 한다.

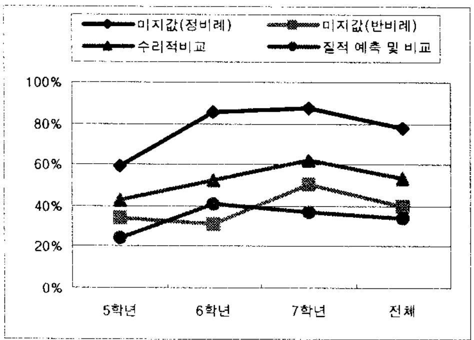
<표Ⅳ-2> 비례 문제에서 학년별 정답률

	미지값 (정비례)	미지값 (반비례)	수리적 비교	질적예측 및 비교
5학년	59.4%	34.2%	43.2%	24.2%
	∧	∥	∥	∧
6학년	85.3%	31.4%	52.6% ∧*	40.8%
	∥	∧	∥	∥
7학년	87.6%	50.3%	62.1%	36.8%
전체	78.1%	39.5%	53.3%	34.1%

∧사후검정 결과 유의수준 0.05에서 유의미한 차이를 나타낸 결과
∥사후검정 결과 유의수준 0.05에서 유의미한 차이가 없음을 나타낸 결과
*6, 7학년간 유의미한 차이는 없지만, 5, 7학년간에는 유의미한 차이가 있음



[그림Ⅳ-1]비례 문제 유형별 정답률



[그림Ⅳ-2]비례 문제에서의 학년별 정답률

학년별로 나타난 학생들의 정답률을 살펴보면 전반적으로 7학년, 6학년, 5학년 순으로 높게 나타났다([그림 Ⅳ-2] 참조). 분산분석 실시 결과 각 문제 유형별로 학년 간에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 이를 바탕으로 사후검정을 통해 특정 두 집단 간의 유의미한 차이를 확인하고자, Scheffe test를 실시한 결과는 <표Ⅳ-2>에서 확인할 수 있다. 이러한 결과는 학년이 올라갈수록 전반적으로 비례추론 능력이 향상되지만 부분적으로 그 능력에 차이가 없는 학년간이 있음을 보여준다.

구체적으로 미지값 구하기(정비례)에서는 6학년과 7학년 사이에 유의미한 차이가 없는 것으로 밝혀졌으며, 미지값 구하기(반비례)에서는 5학년과 6학년 사이에 유의미한 차이가 없음을 알 수 있다. 이는 비례의 학습시기를 고려할 때, 비례식을 6학년에서 배우고 반비례를 7학년에서 배우는 것과 무관하지 않다고 볼 수 있다.

한편, 수리적 비교에서는 5학년과 7학년 사이에 유의미한 차이가 있지만, 5, 6학년과 6, 7학년 사이에는 유의미한 차이가 없는 것으로 밝혀졌다. 이는 수리적 비교 문제와 같이 교과서에서 거의 다루지 않는 유형에서는 학년간의 차이가 비례의 학습여부와 명백히 일치하지는 않음을 볼 수 있다. 즉, 6학년에서 비와 비율 및 비례식을 배우지만 5, 6학년간 수리적 비교의 성취정도에 유의미한 차이가 나타나지는 않는다.

질적 예측 및 비교에서는 5학년과 6, 7학년 사이에 유의미한 차이가 있음을 볼 수 있는데, 이러한 차이는 비례의 학습여부와 인지적 발달 등의 이유로 볼 수 있다. 또한 6, 7학년 간에 통계적으로는 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났지만 6학년보다 7학년에서 오히려 정답률이 미약하지만 낮게 나타난 것은 주목할 만하다. 이러한 결과의 원인은 학생들 반응의 특징에서 언급하기로 한다. 이러한 유형에서의 정답률이 전체적으로 다른 유형에 비해 비교적 낮게 나타나고 특히 5학년에서의 정답률이 낮

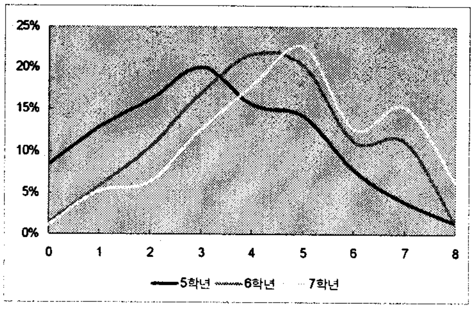
게 나타난 것은 눈여겨볼 필요가 있다. 이러한 결과는 수치적 정보가 제공되지 않았을 때 두 변수를 동시에 고려할 수 있는 상대적 관점의 사고가 부족하다는 점과 5학년 학생들의 안정된 비 개념 형성이 다소 미흡하다는 것을 보여준다고 할 수 있다.

학생들의 다양한 유형의 비례 문제에서의 수행 정도를 8개의 비례 문항에서 획득한 점수로 (8점 만점) 나타낸 결과를 학년별로 살펴보면 <표Ⅳ-3>, [그림Ⅳ-3]과 같다.

<표Ⅳ-3> 비례 문제에서의 획득 점수

획득점수*	5학년	6학년	7학년	전체
0점	8.4%	1.3%	1.1%	3.4%
1점	12.9%	5.9%	5.3%	7.8%
2점	16.1%	10.5%	6.3%	10.6%
3점	20.0%**	17.0%	12.6%	16.3%
4점	15.5%	21.6%	17.9%	18.3%
5점	14.2%	20.3%	22.6%	19.3%
6점	7.7%	11.1%	12.6%	10.6%
7점	3.9%	11.1%	15.3%	10.4%
8점	1.3%	1.3%	6.3%	3.2%
평균점수	3.22점	4.20점	4.74점	4.10점

* 비례 문제에서 올바른 과정을 통해 정답을 도출한 경우 각 1점씩 부과하여, 총 8점 만점으로 한다.
** 음영으로 표시된 부분은 학년별 획득 점수의 최빈수를 나타낸다.



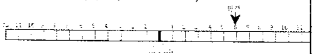
[그림Ⅳ-3] 학년별 비례 문제에서의 획득점수 분포

학년별 평균 점수는 5학년 3.22점, 6학년 4.20점, 7학년 4.74점, 전체 4.10점으로 평균적으로 절반가량의 문제에서 올바른 비례추론을 한 것을 볼 수 있다. 또한 학년이 올라갈수록 다양한 유형의 비례 문제를 해결하는 비례추론 능력이 다소 높게 나타나는 것을 알 수 있다. 이러한 경향은 [그림Ⅳ-3]을 통해 볼 수 있다.

구체적으로, 제시된 비례 문제와 문제별로 나타난 대표적인 학생 반응을 예로 들면 [그림Ⅳ-4]와 같다. 다양한 유형의 비례 문제를 해결하는 과정에서 나타난 학생들 반응의 특징을 요약해보면 다음과 같다.

첫째, 비례 문제 해결과 관련하여 교과서에서는 비례식을 이용한 방법만을 제시하고 있는데 반해, 미지값 구하기(정비례/반비례)와 수리적 비교 문제에서 비례를 배우지 않은 5학년 학생 뿐 아니라 비례식을 배운 6, 7학년 학생들도 비례식만이 아닌 다양한 방법을 이용하여 비례 문제를 해결하였다. 또한 5학년 학생들이 6, 7학년에 비해 낮은 성취 정도를 보이기는 했지만 5학년에서 비와 비례를 전혀 배우지 않은 것을 고려한다면 5학년 학생들이 주어진 수들 간의 곱셈적 관계를 파악하고 비형식적 전략을 사용하여 문제를 해결한 비율이 비교적 높은 것을 알 수 있다. 그리고 이러한 문제를 올바른 과정으로 해결한 학생들은 동치 비 개념의 형성은 물론 불변량과 공변량을 인식한 것으로 볼 수 있다.

둘째, 비례 문제를 해결하는 데 학생들이 보인 오답의 예를 살펴보면 다음과 같다. 미지값 구하기(정비례)에서는 곱셈적 관계인 두 양을 덧셈적으로 비교하여 구하고자 하는 값을 구하는 경우가 가장 많았으며([그림Ⅳ-4] 학생 반응 ③), 미지값 구하기(반비례)에서는 반비례 관계임에도 불구하고 정비례 관계를 적용하여 해결한 경우(학생 반응 ⑤)가 가장 많이 나타난 가운데 특히 5학년에서는 덧셈적으로 사고하는 경

비례 문항의 예		학생 반응의 예
[미지값 구하기(정비례)] 7. 수현이는 레몬즙과 설탕물을 혼합하여 레몬에이드를 만들려고 한다. 어제 레몬즙 2스푼과 설탕물 6스푼을 혼합하여 레몬에이드를 만들었다. 레몬즙 8스푼을 넣어 어제와 똑같은 맛의 레몬에이드를 만들기 위해서는 설탕물을 몇 스푼 넣어야 할까? ( ) ① 4스푼 ② 12스푼 ③ 14스푼 ④ 24스푼 ⑤ 기타 ( )	정답 예	① 레몬-2 ×4 레몬-8 설탕-6 ×4 설탕-□ =24
	정답 예	② (어제 레몬즙 : 어제 설탕물 = 레몬즙 : 설탕물) 2 : 6 = 8 : □ = 2×□=48 48 =48÷2= 24 답 : 설탕물 24 스푼
	오답 예	③ 레몬즙 2스푼과 설탕물 6스푼의 차이를 알아보면 6－2=4 그러므로 4스푼이 차이나게 설탕물을 만들어야 한다 8+4=12 그래서 12스푼이다
[미지값 구하기(반비례)] 4. 민경이는 아버지와 시소를 탔다. 시소의 받침점은 정확히 가운데에 있다. 민경이는 40kg이고 오른쪽 6번째 칸에 앉았다. 아버지가 80kg이라면 시소가 평형을 유지하기 위해 아버지는 왼쪽의 어디에 앉아야 할까? ( ) 	정답 예	④ 민경이=40kg 아버지=80kg 40×2=80 민경이: 6칸 아버지는 민경이의 2배이므로 6÷2=3 이니까 3번째 칸이다.
	오답 예	⑤ 민경이네 아버지께서는 12번째 칸에 앉아야 한다 그 이유는 민경이와 민경이네 아버지는 몸무게가 40kg이 (40kg) 차이난다. 민경이 40×2 해야지 아버지의 몸무게가 나온다 민경이는 6에 앉았으니깐 2를 ×하면 12가 나오기 때문에 12가 답이다.
	오답 예	⑥ 민경이는 40kg 고 아버지는 80kg인데 2배니깐 6에서 2를 빼면 된다. 6－2= 4
[수리적 비교] 8. 현수와 지성이는 매우 빠르게 자전거를 탄다. 현수는 4분 동안 6km를 달렸고, 지성이는 18분 동안 20km를 달렸다. 누가 더 빠르게 달렸는가? 아니면 같은가? ( ) ① 현수 ② 지성 ③ 빠르기가 같다. ④ 정보가 충분하지 않다. ⑤ 기타 ( )	정답 예	⑦ 6km를 4분으로 나누면 1분에 몇 km인지 알게된다. 4)60 ← 이기 때문에 현수는 1분에 1.5km를 달리고 지성이는 18)20000 이기 때문에 1분에 1.1km를 달리기 때문에 현수가 더 빠르다.
	오답 예	⑧ 현수 $\frac{2}{3}$ 지성 $\frac{9}{10}$ $\frac{20}{30}$ < $\frac{27}{30}$
	오답 예	⑨ 4분에 6km, 18분에 20km 둘이서로 2분이나 차이나기 때문에 똑같다.(빠르기가)
[질적예측 및 비교] 5. 미희와 진수는 달리기를 하고 있다. 미희가 진수보다 더 많은 거리를 달렸고, 진수는 미희보다 더 오랜 시간 달렸다. 누가 더 빠르게 달리고 있는가? 아니면 빠르기가 같은가? ( ) ① 미희 ② 진수 ③ 빠르기가 같다. ④ 정보가 충분하지 않다. ⑤ 기타 ( )	정답 예	⑩ 진수는 미희보다 더 오랜 시간을 달렸음에도 불구하고 미희보다 더 적은 거리를 달렸다고 하면 미희가 더 빠르다.
	정답 예	⑪ 만약 진수가 1km를 60분을 달렸고 미희가 2km를 30분을 달렸다면 1:60 < 2:30
	오답 예	⑫ 미희는 진수보다 많은 거리를 달리고, 진수는 미희보다 더 오랜 시간 달렸으면, 빠르기는 같다. 오랜시간과 많은 거리를 달리면 "오랜시간 = 많은거리" 가 되기 때문에 3번이 정답
	오답 예	⑬ 미희가 진수보다 많은거리를 달렸는데, 그거리가 몇 km, m 인지 알수가 없고, 진수는 미희보다 더오랜시간을 달렸는데, 몇시간, 몇분을 달렸는지 알수없다 정보가 부족하다

[그림Ⅳ-4] 제시된 비례 문제와 학생 반응의 예

우(학생 반응 ⑥)도 빈번히 나타났다. 이것은 일부 5학년 학생들의 비례추론 능력이 덧셈적 단계 또는 덧셈적 단계와 곱셈적 단계의 과도기에 머물러 있기 때문이기도 하다. 또한 수리적 비교에서는 비례식을 배운 6, 7학년의 경우 기준량과 비교하는 양을 혼동하거나 순서관계를 혼동하는 등 불완전한 비례추론을 하는 경우(학생 반응 ⑧)가 많았고, 5학년에서는 여전히 잘못된 덧셈적 수량화(학생 반응 ⑨)가 나타났다.

셋째, 상대적으로 학생들의 정답률이 매우 낮게 나타난 질적 예측 및 비교 문제에서 일부 학생들은 질적 정보를 가지고 두 변수의 변화관계를 정확히 설명하여 비교 또는 예를 들거나 그림을 그려 비교하였지만, 상당수의 학생들은 두 변수의 관계를 상대적 관점에서 비교하는 비례추론 능력이 부족했다. 학생들의 불완전한 비례추론의 예는 외형적 특징에 의존하여 두 변수의 변화 결과가 같다고 잘못된 판단을 하는 결과(학생 반응 ⑫) 등으로 나타났다. 또한 두 가지 변수를 동시에 조작하지 못하고 거리나 시간 변수 중 한 가지에만 초점을 맞추어 '많은 거리를 달린 미희가 빠르다.'와 같은 반응처럼 불완전한 비례추론 능력을 보이기도 했다. 이와 같이 한가지에만 초점을 맞춘 학생은 문항5에서 5학년 29.7%, 6학년 11.1%, 7학년 15.8%로 전체 18.7%가 해당되었고, 같은 유형인 문항 11에서도 전체 11.2%가 이와 같은 형태의 불완전한 비례추론을 하였다.

이러한 반응은 수리적 비교에서도 문항2와 문항8에서 각각 약 12%, 약 5% 나타났지만, 수치적 값이 주어지지 않은 질적 예측 및 비교에서 더욱 높은 비율이었고 5학년에서 비교적 많은 학생들에게서 나타났다. 이것은 상당수의 학생들, 특히 5학년 학생들이 두 가지 변수를 고려하여 비교하는 능력이 부족한 것을 보여준다고 할 수 있다.

한편, 수나 양이 주어지지 않아 계산 또는 비교를 할 수 없어 문제를 풀기에 정보가 충분하지 않다고 생각하거나 문제를 풀려고 시도조차 하지 않는 경향을 보이기도 했는데, 특히 7학년에서는 약 30%가량이 이에 해당되었다. 이러한 결과는 질적 예측 및 비교의 정답률이 6학년보다 7학년에서 낮게 나타난 원인으로 작용하기도 했다. 이는 학년이 올라갈수록 학생들이 수리적 정보에 보다 의존하는 경향이 있음을 미루어 짐작할 수 있게 한다.

2. 비례가 아닌 문제에서 학생들의 반응

비례가 아닌 문제의 4가지 상황[2)]에서 학생들은 정답, 비례 오답, 다른 오답, 무응답의 4가지 반응 양상을 보였다. 각 문항에서 학생들이 보인 반응 빈도수와 백분율은 <표Ⅳ-4>와 같다. 4문항에서의 평균적인 정답률은 5학년 54.0%, 6학년 55.4%, 7학년 69.1%로, 전체 60.2%이다. 반면, 주어진 문제가 명백하게 비례 상황이 아님에도 불구하고 비례적 방법을 적용하여 문제를 해결한 학생은 5학년 35.2%, 6학년 40.0%, 7학년 27.4%, 전체 33.7%로 나타났다.

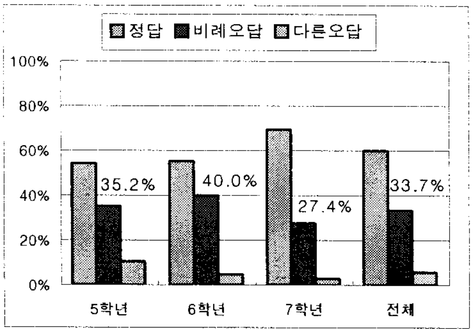
학년별로 나타난 학생들의 반응을 비교하여 나타낸 [그림Ⅳ-5]를 살펴보면, 다른 오답에 비해 비례오답의 비율이 5, 6, 7학년 모두 공통적으로 높게 나타나는 것을 알 수 있다. 특히, 비례오답의 비율은 5학년보다 6학년에서 증가하였다가 7학년에서 다시 감소하는 것을 볼 수 있다. 반면에 문제 상황을 이해하지 못하고 비례적 방법이 아닌 다른 방법으로 문제를 잘못 해결한 다른 오답의 비율은 학년이 올라갈수록 감소하였다.

2) 항상 일정, 덧셈 관계, 합이 일정, 선형 관계

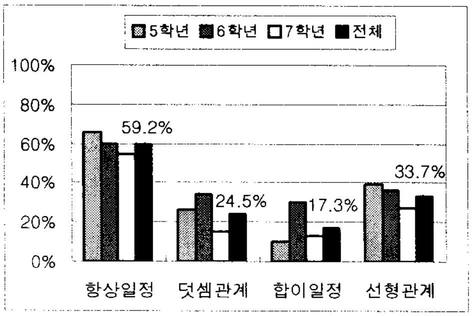
<표IV-4> 비례가 아닌 문제에서 보이는 학생들의 반응 빈도

		정답		오답				무응답	
				비례오답		다른오답			
항상 일정 (문항3)	5학년	44*	28.4%	101	65.2%	10	6.5%	0	0.0%
	6학년	57	37.3%	91	59.5%	5	3.3%	0	0.0%
	7학년	85	44.7%	103	54.2%	2	1.1%	0	0.0%
	전체	186	37.3%	295	59.2%	17	3.4%	0	0.0%
덧셈 관계 (문항6)	5학년	107	69.0%	41	26.5%	7	4.5%	0	0.0%
	6학년	98	64.1%	52	34.0%	3	2.0%	0	0.0%
	7학년	160	84.2%	29	15.3%	1	0.5%	0	0.0%
	전체	365	73.3%	122	24.5%	11	2.2%	0	0.0%
합이 일정 (문항9)	5학년	118	76.1%	15	9.7%	22	14.2%	0	0.0%
	6학년	94	61.4%	46	30.1%	13	8.5%	0	0.0%
	7학년	150	78.9%	25	13.2%	13	6.8%	2	1.1%
	전체	362	72.7%	86	17.3%	48	9.6%	2	0.4%
선형 관계 (문항12)	5학년	66	42.6%	61	39.4%	28	18.1%	0	0.0%
	6학년	90	58.8%	56	36.6%	7	4.6%	0	0.0%
	7학년	130	68.4%	51	26.8%	9	4.7%	0	0.0%
	전체	286	57.4%	168	33.7%	44	8.8%	0	0.0%
합계	5학년	335	54.0%	218	35.2%	67	10.8%	0	0.0%
	6학년	339	55.4%	245	40.0%	28	4.6%	0	0.0%
	7학년	525	69.1%	208	27.4%	25	3.3%	2	0.3%
	전체	1199	60.2%	671	33.7%	120	6.0%	2	0.1%

* 5학년은 N=155, 6학년은 N=153, 7학년은 N=190이다.



[그림IV-5] 비례가 아닌 문항의 반응 비율



[그림IV-6] 문항별 비례오답의 비율

[그림IV-6]을 살펴보면 주어진 문제 상황에 따라 비례오답을 한 학생들의 비율이 다르게 나타나는데, 비례 오답이 가장 많이 나타난 유형은 5, 6, 7학년 모두 항상 일정($y=a$)한 상황이었고 두 번째가 선형관계($y=ax+b$)로 나타났다. 또한 합이 일정($x+y=a$)한 상황인 문항 9에서 비례 오답의 비율이 가장 낮게 나타났지만, 6학년은 여전히 약 30%의 학생들이 비례오답을 했다.

심지어 6학년 학생 중 비례오답을 한 대부분의 경우에서 상황에 대한 고려 없이 주어진 수들을 비례식에 적용하여 문제를 해결하는 경향을 볼 수 있었다. 이것은 특히 비례식을 갓 배운 6학년 학생들이 다양한 상황을 비례적 상황으로 지나치게 일반화하는 경향이 있으며, 비례식을 기능적으로 사용하는 경우가 있음을 보여준다. 이와 관련하여 비례식을 학습한 말레이시아 9학년 학생들의 비례 문제 수행 결과를 바탕으로 Singh(2000)는 학생들이 비례 공식에 대해 관계적 이해보다 도구적 이해를 하고 있

음을 지적한 바 있다. 그리고 정행기(2000)의 연구결과에서 비례 상황 인식에 대한 6학년 학생들의 성취도가 4, 5학년 학생에 비해 현저히 낮게 나타났는데, 이는 6학년 학생들이 단지 문제 형태가 비슷하다는 이유로 습관적으로 비례식을 사용하기 때문에 나타난 결과로 볼 수 있음을 시사한 바 있다. 구체적으로, 비례가 아닌 문항과 각 문항에서 나타난 학생들의 대표적인 반응을 예로 들면 [그림Ⅳ-7]과 같다.

이와 같이 5, 6, 7학년 학생들이 비례가 아닌

비례가 아닌 문제	학생 반응의 예	
3. 엄마와 옆집 아주머니께서 똑같이 젖은 수건을 햇빛에 마르도록 빨래줄에 걸어두셨다. 엄마가 빨래줄에 수건을 3개 걸어두었고, 12시간 후에 완전히 말랐다. 옆집 아주머니가 수건을 6개 걸어두었다면, 얼마 후에 완전히 마를까? ( ) ① 72시간 후 ② 24시간 후 ③ 15시간 후 ④ 12시간 후 ⑤ 기타 ( )	정답 예	3개이든 6개이든 똑같이 젖은 상태에서 똑같이 공기중에 말린다면 6개도 3개처럼 12시간 후에 마를것이다.
	비례 오답 예	답은 24시간 후이다. 그 이유는 처음에 수건 3개를 걸어두었는데, 12시간 후에 완전히 말라버렸다. 그리고 또 수건 6개를 걸어 놓으면 ×4를 해야한다. 12시간 ÷ 3은 4이다. 그러니까 수건 하나가 말리는 시간이 4시간이다. 그래서 수건 6개 ×4를 해야지 24시간이 나온다
6. 희진이는 올해 12살이 되었고, 희진이 어머니의 나이가 36세이다. 희진이가 24살이 되면 어머니는 몇 세가 되는가? ( ) ① 72세 ② 60세 ③ 48세 ④ 36세 ⑤ 기타 ( )	정답 예	희진: 12살 희진이 어머니: 36세 $\xrightarrow{+12}$ 희진: 24살 희진이 어머니?
	비례 오답 예	희진 : 어머니 12 : 36 24 : $\boxed{72}$ 희진이 어머니의 나이는 희진이 나이의 3배다. 24×3=72 이기 때문에 희진이가 24살 때 어머니의 나이는 72세가 된다
9. 시현이는 책을 9쪽 읽고 36쪽이 남았다. 같은 책을 미진이가 18쪽 읽었다면 몇 쪽이 남았을까? ( ) ① 9쪽 ② 27쪽 ③ 45쪽 ④ 72쪽 ⑤ 기타 ( )	정답 예	36+9=45 = 책의 전체 쪽수 45쪽 45−18=27 $45 - 18 = 27$
	비례 오답 예	시현: 9쪽 … 36쪽 미진: 18쪽 … ?쪽) 같은책! 9 : 36 = 18 : □ 36×18=648÷9=72
12. 택시요금의 기본 요금은 1000원이다. 그리고 1km를 갈 때마다 500원씩의 요금이 부과된다. 이러한 방식으로 4km를 가는 데 3000원의 요금이 들었다. 만일, 8km를 간다면 얼마의 요금이 들겠는가? ( ) ① 4000원 ② 5000원 ③ 6000원 ④ 8000원 ⑤ 기타 ( )	정답 예	기본 - 1000원 1km - 500원 (4km - 2000원, 3000=(500×4)+1000) 8km — 기본요금1000 + 500×8 이므로 1000+4000=5000원
	비례 오답 예	4km가는데3000원이면은 8km가는데6000이다 이유는4×2를8이고 3000원의두배이기때문이다

[그림Ⅳ-7] 비례가 아닌 문제와 학생 반응의 예

문제에서 비례오답을 비교적 많이 한 것은 학생들이 비례 상황을 인식하는 능력이 부족함을 나타낸다. 또한 상황에 대한 충분한 이해 없이 지나치게 비례 상황으로 일반화하는 양상은 5학년보다 6학년에서 높게 나타나며, 7학년에서 다시 감소하는 것을 알 수 있다. 이러한 결과를 종합하면, 5, 6, 7학년 학생들이 비례가 아닌 문제에서 비례 상황을 구분하지 못하여 비례오답을 한 경우가 33.7%에 해당되는 것을 알 수 있다.

V. 결 론

본 연구는 다양한 유형의 비례 문제와 비례가 아닌 문제에서 5, 6, 7학년 학생들의 반응을 살펴봄으로써 학생들의 비례추론 능력을 확인하고자 하였다. 분석 결과를 통해 비와 비율 및 비례와 관련한 교수학습과 관련해 몇 가지 논의해 보고자 한다.

첫째, 비례 문제에서 학생들의 수행 정도는 미지값 구하기, 수리적 비교, 질적 예측 및 비교의 순으로 나타났다. 이는 학생들이 동치비를 만드는 것보다 두 비의 관계를 비례적으로 파악하여 비교·예측하는 것을 더 어려워 한다는 것과 수리적 정보가 주어지지 않았을 때 더 어려워한다는 사실을 보여준다. 이는 Singh(2000)가 비례를 학습한 9학년 학생을 대상으로 실시한 연구에서 성취 정도가 미지값 구하기>수리적 비교=질적 예측 및 비교로 나타난 것과 다소 차이가 있다. 이러한 결과는 본 연구에서 학생들이 수치적 정보가 없이 질적 정보만으로 비례추론을 하는 능력이 특히 부족하였음을 보여준다. 또한 학생들이 미지값 구하기 유형의 문제는 다양한 방법을 이용하여 해결할 수 있지만, 주어진 수들 간의 관계를 비교하거나 질적 정보만으로 상대적인 사고를 하는 능력이 다소 부족함을 보여준다.

그러나 비례추론 능력은 동치비를 만들어 미지값을 구하는 형태의 문제해결에 한정되지 않는다(NCTM, 2000). 사실, 이미 여러 연구에서 비례를 지도할 때나 평가할 때 단순히 미지값을 구하는 형태만을 제시해서는 안된다는 주장이 꾸준히 제기되었다(예, 홍수영, 2006; Singh, 2000). 그러나 현행 교육과정에서는 여전히 '비례식'이라는 단원을 통해 미지값 구하기 형태의 문제 위주로 형식적 접근을 취하고 있으며, 수리적 비교, 특히 질적 예측 및 비교 형태의 문제는 거의 다루지 않고 있는 실정이다. 이러한 현행 교육과정에서의 내용구성이 본 연구 결과와도 관련이 있다고 판단되는 바, 비와 비례에 대한 더 깊은 이해를 위해 교과서에서 다양한 유형의 비례 문제를 다루어 폭넓은 비례추론 능력을 형성할 수 있도록 할 필요가 있다고 본다.

둘째, 미지값 구하기에서 정비례 상황의 높은 성취율에 비해 반비례 상황에서는 상대적으로 낮은 성취율을 보였는데, 이러한 결과는 정비례와 반비례를 모두 학습한 7학년에서도 마찬가지였다. 이는 여러 선행 연구에서 정비례보다 반비례 관계를 어려워한다고 지적한 것과 일맥상통한다(예, 이영숙, 1998; Fisher, 1988). 이것은 실생활이나 학교 수학의 다양한 상황에서 정비례가 학생들에게 더 친숙하고, 반비례가 더 복잡한 구조로 이루어져 있기 때문이기도 하다. 이러한 점은 학생들에게 형식적으로 반비례를 다루기 전에 정비례와 반비례를 포함한 다양한 유형의 곱셈적 관계를 여러 가지 예와 함께 직관적으로 다루어 볼 수 있는 경험을 제공할 것과, 반비례 관계에 관한 보다 세심한 지도가 필요함을 시사한다. 이와 관련하여, 비례식과 정비례·반비례를 같은 학년에서 동시

에 다루는 방안도 고려해 볼 수 있다.

셋째, 앞서 언급한 바와 같이 학생들은 동치비를 만드는 것보다 두 비의 관계를 비례적으로 파악하여 비교·예측하는 것을 더 어려워한다. 특히, 수리적 정보가 주어진 경우에 비해 '더 많이', '더 적게'와 같은 질적 정보만 주어지는 질적 예측 및 비교 문제에서는 상대적으로 매우 낮은 정답률을 보였다. 이와 같이 질적 예측 및 비교 문제의 정답률이 낮게 나타난 것은 학생들이 수리적 정보가 제공되지 않고 질적 정보만으로 상대적인 사고를 하는 능력이 다소 부족함을 보여준다고 할 수 있다. 또한, 7학년 학생들이 인지발달은 더 높은 수준임에도 불구하고 5, 6학년에 비해 수리적 정보에 보다 의존하여 질적 정보를 이용한 비교를 시도조차 하지 않는 현상은 주목할 필요가 있다. 사실, 질적 추론은 특정한 양이 아닌 양 전체에 관계하기 때문에 양적 추론보다 더 일반적이며, 정확한 계산을 하기 전에 변화의 방향을 예측하거나 문제에서 주어진 조건에 합당한 지를 판단할 수 있게 해준다는 점에서 매우 중요하다. 따라서 다양한 상황에서의 질적 추론을 특히 강조할 필요가 있다(Post et al., 1988).

넷째, 비례추론 능력은 학생들이 비례적 상황과 그렇지 않은 상황을 구분하는 능력도 포함한다. 그런데, 비례가 아닌 상황의 4가지 문제에서 약 34%의 학생들이 문제 상황에 적절하지 않게 비례적인 방법을 이용하는 비례오답을 하는 결과를 보였다. 이것은 학생들이 비례가 아닌 다양한 수리적 상황을 정비례 상황으로 과도하게 일반화하는 경향을 보여준다. 이러한 연구 결과는 2~8학년 학생들의 $\frac{1}{3}$가량이 비례가 아닌 다양한 수리적 문제에서 비례 관계를 적용하여 문제를 해결하였다는 연구 결과와 매우 일치한다(Van Dooren et al., 2005). 이는 학생들이 관계를 파악하기 보다는 주어진 문제 상황에서 단순히 수 구조에 초점을 맞추어 비례관계를 적용하는 경향을 보여준다. 이러한 현상을 극복하기 위해 다양한 상황에서의 질적 추론이 강조되어야 하며, 비례 문제 해결 이전에 학생들에게 정비례·반비례 관계를 포함하여 비례가 아닌 상황을 동시에 경험시켜야 할 필요가 있다. 이를 통해 비례 상황을 보다 명확하게 인식하게 해야 한다.

실생활과 학교수학에서 비례추론이 차지하는 비중은 학생들의 비례추론 능력을 발달시켜주어야 할 필요성을 뒷받침해 준다. 즉, 비례추론의 중요성은 재론의 여지가 없다. 그러나 비례추론 능력의 발달은 전적으로 자연적인 성장에 의해 이루어지는 것이 아니기 때문에, 학생들의 비례추론 발달 단계와 학생들이 비례추론 과정에서 겪는 어려움을 고려하여 그들의 비례추론 능력을 향상시켜줄 수 있는 의도적인 노력이 필요하다. 이로써 학생들이 불완전한 비례추론 능력을 극복하고 다양한 영역에서 성공적인 비례추론자로 거듭나도록 하기 위한 다양한 연구와 시도가 지속되어야 할 것이다.

참고문헌

권오남·박정숙·박지현(2007). 중학교 교육과정에서 비례적 사고가 필요한 수학 개념 분석. **수학교육, 46**(3), 315-329.

유현주(1995). **유리수 개념의 교수현상학적 분석에 의한 학습지도 방향에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이영숙(1998). **비례 문제 해결 전략과 오류에 대한 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.

이종욱(2006). 4학년 아동의 비와 비례 개념 분석. **수학교육학연구, 16**(2), 157-177.

장혜원(2002). 초등학교 수학에서 비의 값과 비

율 개념의 구별에 대한 논의. **학교수학, 4**(4), 633-642.

정영옥(2005). 초등학교에서 비와 비례식 지도에 대한 고찰-한국, 미국, 일본, 중국을 중심으로-. **과학교육논총, 18**, 13-28.

정은실(2003a). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

______(2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. **학교수학, 5**(4), 421-440.

정행기(2000). **비례문제의 문제 상황과 내용 친숙성에 따른 초등학생의 비례 논리 발달 조사**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

최효진(2005). **중학교 1학년 학생들의 비례 문제 해결 전략과 함수 개념과의 관계**. 이화여자대학교 석사학위 논문.

홍수영(2006). **초등학교 5학년 학생의 비례 추론 이해**. 한국교원대학교 석사학위논문.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 권성룡 외 11인 공역 (2005). **수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게?** 서울: 경문사.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp. 296-333). NY: Macmillan.

Ben-chaim, D., Fey, J., Fitzgerald, W., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 247-273.

Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting research to teaching: Proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owen(Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan Publishing Company.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. Educational *Studies in Mathematics, 35*, 65-83.

Fisher, L. C. (1988). Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 157-168.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Heinz, K. R. (2000). *Conceptions of ratio in a class of preservice and practicing teachers.* Unpublished Doctoral Dissertation, The Pennsylvania State University.

Heller, P. M., Post, T. R., Behr, M., & Lesh, R. (1990). Qualitative and numerical reasoning about fractions and rates by seventh and eighth-grade students. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(5), 388-402.

Hoffer, A. R., & Hoffer, S. A. K. (1992). Ratios and proportional thinking. In T. R. Post(Ed.), *Teaching mathematics in grades* *k-8*(pp. 303-330). Boston: Allyn and Bacon.

Koellner-Clark, K. & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics, 103*(2), 92-99.

Lamon (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 41-61.

________(1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lo, J. & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 216-236.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역 (2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. 서울: 경문사.

Olof, B. S. (2003). *Making meaning of proportion: A study of girls in two icelandic classrooms*. Unpublished Doctoral Dissertation, The University of Wisconsin, Madison.

Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings. In A. F. Coxford & A. P. Shulte(Eds.), *The ideas of algebra, k-12*(1988 Yearbook, pp. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Singh, P. (2000). Understanding concepts of proportion and ratio among grade nine students in Malaysia. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 31*(4), 579-599.

Smith III, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In L. Bonnie(Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (2002 Yearbook, pp. 3-17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: SUNY Press.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 113-138.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition And Instruction, 23*(1), 57-86.

A Survey on the Proportional Reasoning Ability of Fifth, Sixth, and Seventh Graders

Ahn, Suk Hyun (Daejeon Tan-bang Elementary School)
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

The primary purpose of this study was to gather knowledge about 5th, 6th, and 7th graders' proportional reasoning ability by investigating their reactions and use of strategies when encountering proportional or nonproportional problems, and then to raise issues concerning instructional methods related to proportion. A descriptive study through pencil-and-paper tests was conducted. The tests consisted of 12 questions, which included 8 proportional questions and 4 nonproportional questions.

The following conclusions were drawn from the results obtained in this study.

First, for a deeper understanding of the ratio, textbooks should treat numerical comparison problems and qualitative prediction and comparison problems together with missing-value problems.

Second, when solving missing-value problems, students correctly answered direct-proportion questions but failed to correctly answer inverse-proportion questions. This result highlights the need for a more intensive curriculum to handle inverse-proportion. In particular, students need to experience inverse-relationships more often.

Third, qualitative reasoning tends to be a more general norm than quantitative reasoning. Moreover, the former could be the cornerstone of proportional reasoning, and for this reason, qualitative reasoning should be emphasized before proportional reasoning.

Forth, when dealing with nonproportional problems about 34% of students made proportional errors because they focused on numerical structure instead of comprehending the overall relationship. In order to overcome such errors, qualitative reasoning should be emphasized. Before solving proportional problems, students must be enriched by experiences that include dealing with direct and inverse proportion problems as well as nonproportional situational problems. This will result in the ability to accurately recognize a proportional situation.

* **Key words** : proportional reasoning(비례추론), missing-value problems (미지값 구하기), numerical comparison problems(수리적 비교), qualitative prediction and comparison problems(질적 예측 및 비교), direct/inverse proportion(정/반비례), nonproportional problems(비례가 아닌 문제)

논문접수: 2008. 1. 15
심사완료: 2008. 2. 12