대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 18, No. 1, 81-101. Feb 2008

중학수학에서의 입체도형의 부피와 겉넓이의 접근방법에 대한 고찰

홍 갑 주* · 최 영 기** · 안 숙 영*** · 김 건 욱****

본 연구에서는 중학교의 수학 7-나 과정에서 입체도형의 부피와 겉넓이를 다루는 방식을 조사하여 그 설명방식이 도형의 종류에 따라 달라진다는 점을 지적하고, 특히 구체물을 통한 실험적 방법에 의존하는 설명이 갖는 한계에 대해 논의하였다. 이에 대해 구의 측정에 대한 Archimedes의 연구로부터 입체도형의 부피와 겉넓이에 대한 접근의 목적과 방법에 있어서의 교육적 시사점을 모색하였으며, 이를 바탕으로 현행 접근방법에 대한 보완적인 접근방법 및 그 실제 적용에 있어서의 고려사항을 논의하였다.

Ⅰ. 서 론

교육과정상 수학 7-나 단계의 도형의 측정 단원에서는 각기둥, 원기둥, 각뿔, 구 등 여러 입체도형의 부피와 겉넓이가 다루어진다. 이 주제에 대한 현행 교과서의 접근방법을 살펴보면 도형의 종류에 따라 구체물을 통한 실험, 직관적인 수학적 추론, 엄밀한 수학적 추론 등 그 설명 방식이 제각기 다르다는 사실을 알 수 있다. 설명 방식의 이러한 차이는 그 도형마다의 관련된 수학적 배경지식에 크게 의존하는 것으로 이해할 수 있다. 그러나 학생들 입장에서는 이러한 설명을 접할 때 수학의 방법론에 대한 다소의 혼란을 가질 수 있을 것이며, 새로운 지식들을 이전의 지식들과의 혹은 서로간의 연관성 없이 개별적으로 받아들이게 된다는 한계가 있는 것으로 보인다.

물론 고등학교의 미적분학에서 회전체를 비롯한 도형의 부피는 다시 다루어지지만 미적분학을 모든 학생들이 배우는 것은 아니며, 더욱이 중학수학에서는 그 나름대로 가져야 할 수학적 경험이 있을 것이다. 이러한 점을 고려할 때 다소 덜 엄밀하더라도 구체물을 통한 실험적 방법과 미적분학을 통한 엄밀한 논증 사이에 있을 수 있는 수학적 추론방법에 대한 모색의 필요성이 제기된다.

역사적으로 굽어진 곡면으로 둘러싸인 입체도형의 부피와 겉넓이를 최초로 구한 것은 고대 그리스의 수학자 Archimedes의 업적으로 알려져 있다. 특히 원뿔과 구에 대한 그의 연구는 《구와 원기둥에 대하여》 I 권과 《Method》에서 살펴볼 수 있다. 《구와 원기둥에 대하여》 I 권에서 그는 원뿔에 대한 연구로부터 출발하여 구의 부피와 겉넓이를 엄밀한 방법으로 구한다. 《Method》에서는 자신이 증명했던

* 서울대학교 대학원, gapdol@empal.com
** 서울대학교, yochoi@snu.ac.kr
*** 신림고등학교, white733@dreamwiz.com
**** 구로중학교, hanalysis@empal.com

지레의 법칙을 불가분량을 이용하는 독창적인 기술과 결합한 "역학적 방법"을 통해 포물선 조각의 넓이, 구, 포물회전체를 비롯한 여러 입체도형의 부피 및 무게중심을 구하는데, 이 논문에는 그의 발견의 과정을 알 수 있는 단서 또한 담겨 있다.

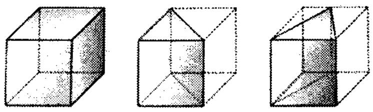
교육적인 관점에서 Archimedes의 연구는 극한에 대한 엄밀한 논의를 제외하면 중학수학 수준의 지식을 크게 벗어나지 않고 오히려 그 지식들을 절묘하게 조합하여 구의 측정에 이르는 방법을 보여준다는 점에서, 그리고 그가 단지 수학이론의 진술에 그치지 않고 자신이 어떻게 구의 측정에 대한 명제의 발견에 이르렀는지를 명시적으로 밝히고 있다는 점에서 주의 깊게 살펴볼 가치가 있다. 그의 연구는 학교수학, 특히 중학수학에서 입체도형의 측정에 접근하는 방법 뿐 아니라 추구해야 할 교육목표에 대한 어떤 시사점을 제공하는 것으로 보인다.

본 연구에서는 먼저 관련된 수학적 배경지식과 함께 현행 교과서의 접근방법을 살펴보고 설문조사를 통해 현행 접근방법과 관련하여 논의할 사항을 명확히 한다. 이어 Archimedes의 연구를 고찰하여 여러 측면에 걸친 교육적 시사점을 밝힌다. 마지막으로 그 결과를 바탕으로 하고 외국 교재들의 접근방법을 참고로 하여 입체도형, 특히 구의 부피와 겉넓이에 대한 보완적인 접근방법을 모색하고 실제 적용에 있어서 고려할 사항에 대해 논의하고자 한다.

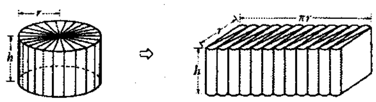
Ⅱ. 현행 교과서의 접근방법 및 구의 측정에 대한 설문

1. 교과서의 접근방법

현행 우리나라 교과서에서 입체도형의 부피와 겉넓이를 제시하는 방법은 일반적으로 다음과 같다. 각기둥의 부피는 우선 직육면체 부피의 절반으로서 삼각기둥의 부피를 구한 다음 각기둥을 삼각기둥들이 모인 것으로 간주함으로써 구한다. 원기둥의 부피는 각기둥의 변의 개수를 늘려 가면 원기둥에 점점 가까워진다는 것을 이용하거나 초등학교에서 원의 넓이를 구하는 방식과 유추적으로 원기둥의 밑면을 부채꼴로 잘게 나누어 만든 작은 입체도형들을 직육면체 비슷한 모양으로 재결합하는 방식을 이용한다. 또한 각기둥과 원기둥의 겉넓이는 그 전개도를 이용하여 평면도형의 넓이 문제로 환원하여 구한다.



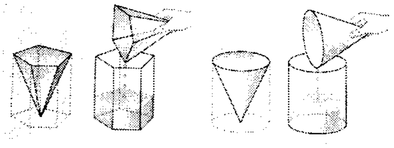
[그림 Ⅱ-1] 삼각기둥의 부피 구하기(조태근 외, 2001)



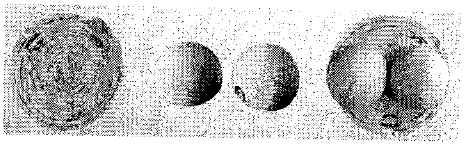
[그림 Ⅱ-2] 원기둥의 부피 구하기(이준열 외, 2001)

각뿔 혹은 원뿔의 부피는 그 모양의 그릇에 물이나 좁쌀 등을 채워서 밑면과 높이가 같은 기둥에 부은 다음 그 높이를 측정하는 방식으로 설명한다. 또한 그 겉넓이는 역시 전개도를 이용하여 구한다.

구의 부피는 각뿔이나 원뿔과 비슷하게 구를 물에 넣어서 넘치는 물의 양을 측정하거나 외접하는 원기둥 속에 넣고 빈틈에 들어가는 좁쌀의 양을 측정하는 등의 방법을 이용한다. 구의 겉넓이는 오렌지 껍질을 조각내어 그 지름과 같은 지름을 가지는 4개의 원 안에 모으거나 고무공을 띠 모양으로 잘라서 원 모양으로 늘어놓는 등의 방법으로 설명한다.



[그림 II-3] 뿔의 부피 구하기(조태근 외, 2001)



[그림 II-4] 구의 겉넓이 구하기(이준열 외, 2001)

이를 전체적으로 살펴보면 그 설명방식이 도형의 종류에 따라 달라지고 있음을 알 수 있다. 즉, 각기둥의 부피는 거의 완전한 수학적 추론을 통해 설명된다. 원기둥의 부피는 직관적인 극한과정 혹은 무한소 도형을 이용하여 다루어지는데 이는 완전히 엄밀하지는 않지만 개연성 있는 하나의 수학적 추론이라 할 수 있다. 그러나 뿔이나 구의 부피, 구의 겉넓이에 이르러서는 구체물에 의존하는 실험적인 방법에 의존하고 있다.

물론 설명방식이 일관되지 않는 데에는 도형의 종류에 따른 수학 수준상의 문제가 개입되어 있다. 우선 부피의 문제를 살펴보면 다음과 같다. 각기둥의 부피는 본질적으로 그 밑면을 이루는 다각형의 넓이에 의존하고 있으므로 비교적 완전한 수학적 설명이 가능하다. 다각형의 넓이는 삼각형들의 넓이로 결국 직사각형의 넓이로 잘 환원되어 설명된다. 비슷하게 원기둥의 부피는 학생들이 직관적인 수학적 추론으로 이미 다룬 바 있는 원의 넓이에 의존하므로 원과 같은 수준에서 논의가 가능하다. 그러나 삼각뿔의 경우 그것이 매우 단순해 보이는 도형이긴 하나, 다각형의 경우와는 달리 유한개의 조각으로의 분할과 재결합만을 통해 직육면체로 혹은 밑면의 넓이와 높이가 같은 다른 삼각뿔로 변형하는 것이 일반적으로 불가능하다는 사실이 (즉, 삼각뿔의 부피를 엄밀하게 정의하기 위해서는 극한의 개념이 도입되어야 한다는 사실이) 'Hilbert의 세 번째 문제'에 대한 Max Dehn의 증명을 통해 밝혀져 있다 (Boltianskii, 1978).[1] 따라서 그에 대한 엄밀한 취급은 현재 중학수학의 영역 밖의 것이다.

다음으로, 겉넓이의 문제에 대해서는 그 도형의 평면전개도가 존재하는가에 의해 설명방식이 나뉘고 있음을 알 수 있다. 즉, 다면체는 그 각각의 면들이 모두 평면다각형이므로 평면전개도가 존재한다. 원기둥이나 원뿔의 경우는 옆면이 곡면이지만 평면전개도가 존재하므로 평면도형의 넓이로서 그 겉넓이를 구할 수 있다. 그러나 구의 경우는 평면전개도가 존재하지 않으며, 구의 겉넓이의 설명이 실험에 의존하고 있는 것은 이런 이유로 볼 수 있다.[2]

그러나 중학교 수학의 수준상의 한계를 인정하더라도 입체도형의 측정에 대한 이러한 설명방식의 개선 혹은 보완을 위한 논의는 필요할 것으로 보인다. 우선 구체물을 통한 실험은 학생들이 구의 부피와 겉넓이의 크기에 대한 느낌을 가지게 하고 공식을 추측하는데 적합한 수단일 수 있다. 그러나 실험을 통한 설명만으로 그친다면 학생들은 수학과 실험과학의 방법론 사이에서 혼란을 가질 수 있다. 또한 이러한 설명만으로는 새로운 사실들이 기존의 지식

1) Euclid는 《원론》 XII 권의 명제 5에서 밑변의 넓이와 높이가 각각 일치하는 두 삼각뿔의 부피가 같음을 소진법을 이용하여 보였다. Dehn의 증명을 통해, 《원론》의 증명에서 사용된 소진법은 도형의 분할과 재결합이라는 단순한 방법이 존재했음에도 선택된 과잉한 방법이 아니었음을 알 수 있다.

2) 수학적으로 이것은 Gauss 곡률의 개념을 통해 설명할 수 있는데, Gauss 곡률이 모든 점에서 0인 곡면은 그 내적인 기하가 평면과 같고, 따라서 평면 위에 그 곡면을 펼쳐놓을 수 있다. 원뿔은 꼭짓점을 제외한 모든 점에 대해 그 점을 지나는 모선의 방향에서 곡선곡률이 0이고 이는 그 점에서의 Gauss 곡률을 0으로 결정한다. 구는 Gauss 곡률이 항등적으로 양이고 따라서 전개도가 존재하지 않는다.

들과 관련성을 가지지 못하고 개별적인 현상의 기술로만 남게 된다(홍갑주, 2008).

본 연구에서는 현행 교육과정 하에서 학생들이 구의 부피와 겉넓이에 대해 배운 후 그에 대해 어떤 내용을 기억하는지 알아보는 한편, 이후 논의할 보완적인 접근방법의 도입과 관련된 문제점들을 파악하기 위한 설문을 실시하였다. 이 중 우선 구의 부피와 겉넓이에 대한 결과를 아래에 정리하기로 한다.

2. 구의 부피와 겉넓이에 대한 설문

본 연구에서 실시한 설문의 대상은 서울시 모 고등학교 1학년 4개 학급에 걸친 103명의 학생들이며[3] 설문 시기는 12월 중반이다. 고 1 학생들을 대상으로 한 것은 수학 7-나에서 배운 지식이 어느 정도 시간이 지난 후 어떻게 구조화되어 기억에 남아있는지를 확인하기 위해서이자 본 연구에서 제안할 보완적인 접근방법의 도입시기가 교육과정상 수학 10 단계 전후에 적합한 것으로 판단되기 때문이다.

제시된 총 6개의 문항 중 구의 부피와 겉넓이에 대한 문항 1은 다음과 같다.

> 1. 다음 물음에 답하세요.
> (1) 반지름 r인 구의 부피와 겉넓이는 각각 얼마인가요?
> (2) 수업시간에 구의 부피와 겉넓이를 어떻게 구했나요? (초, 중, 고등학교 모두 포함.) 생각나는 것을 모두 적어주세요.
> (3) 구의 부피와 겉넓이 사이에는 어떤 관계가 있을까요?

(1)번에 대해 구의 부피를 $\frac{4}{3}\pi r^3$으로 올바르게 적은 학생은 총 9명(8.7%)이었으며 구의

<표 Ⅱ-1> 문항 1의 (1)번에 대한 응답분포

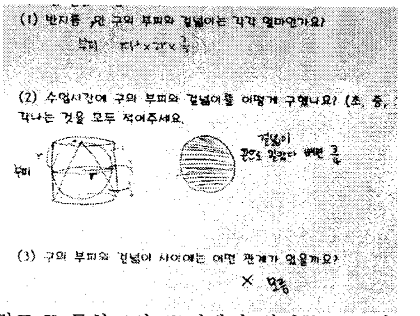
부피	겉넓이	빈도	부피	겉넓이	빈도	부피	겉넓이	빈도
$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$	1	r^3	$\frac{1}{2}r^5$	1	$2\pi r$	πr^2	2
$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{9}\pi r^2$	1	r^3	r^2	1	$\frac{1}{3}\pi r$	$\frac{4}{3}\pi^2 rh$	1
$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{8}{9}\pi r^2$	1	r^3	$2\pi r^2 h$	1	$\pi r^2\times$높이 $\times\frac{1}{3}$	·	1
$\frac{3}{4}\pi r^3$	πr^2	1	$\frac{4}{3}\pi r^2$	$4\pi r^3$	1	π^2	$2\pi^2$	1
$\frac{1}{3}\pi r^3$	$\frac{3}{4}\pi r^2$	1	$\frac{4}{3}\pi r^2$	$\frac{1}{3}\pi r$	1	$2^3\pi$	$2^4\pi^2$	1
$\frac{3}{4}\pi r^3$	$4\pi r^2$	1	πr^2	$2\pi r$	1	r^3		1
$\frac{4}{3}\pi r^3$	·	5	$\frac{1}{3}\pi r^2$	$\frac{3}{4}\pi r^2$	1	3.14×밑변×높이		1
$\pi r^2\times 2r\times\frac{2}{3}$	·	1	πr^2	$\frac{4}{3}\pi r^3$	1	πr^2		1
$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r$	1	$\frac{1}{3}\pi r^2$	·	1	$2\pi r$		2
$\frac{3}{4}\pi r^3$	·	4	$\frac{3}{4}\pi r^2$	·	2			
πr^3	$\frac{3}{4}\pi r$	1	πr^2	·	1			
$\frac{1}{3}\pi r^3$	·	1	$\frac{1}{3}r^2$	r^3	1			
$\pi r^2\times r$	πr^3	1	$2\pi r$	$2\pi r$	1	계		45

※ 마지막 네 항의 경우는 학생이 부피를 적은 것인지, 넓이를 적은 것인지 확인할 수 없음

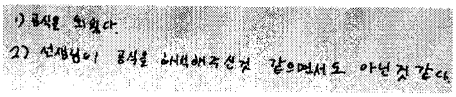
3) 출석한 120여 명의 학생들 중 설문에 전혀 응하지 않은 학생의 결과는 통계에서 제외하였다.

겉넓이를 $4\pi r^2$으로 올바르게 적은 학생은 총 2명(1.9%)이었다. 둘 다 올바르게 적은 학생은 단 1명뿐이었다. 학생들의 응답분포를 표로 정리하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

(2)번에 대해서는 총 20명(19.4%)의 학생이 응답을 했다. 이 중 3명의 학생은 귤껍질이나 테니스공을 오려 붙이는 등의 실험적 방법이 기억난다고 적었다. 2명의 학생은 원기둥에 내접하는 구를 그렸는데, 이 중 한 명은 더 이상의 설명이나 답을 제시하지 못하였으나 다른 한 명은 이 그림 위에 그 도형들 사이의 부피 비를 기억하여 적었고 이를 이용하여 (1)번에서도 정답을 적었다(그림 Ⅱ-5). 나머지 15명의 학생들 대부분은 "암기했다"는 요지의 답을 적었다.



[그림Ⅱ-5] 문항 1의 (2)번에서 원기둥, 구, 원뿔이 모여 있는 그림을 상기한 경우



[그림 Ⅱ-6] 문항 1의 (2)번에서 한 학생의 응답

(3)번에 대해서는 총 21명이 응답을 했다. 이 중 (1)번에서 부피와 겉넓이 모두 올바르게 적은 단 한 명의 학생만 "겉넓이:부피= $\frac{r}{3}$"이라고 답하여, 표기법은 틀렸지만 공식 사이의 관계를 올바르게 기술하였다. 과반수 학생들은 단순하게 "비례관계"(9명) 혹은 "반비례 관계"(3명)이라고 답하였다. 나머지 8명의 학생들은 수학적으로 의미 없는 답을 적었다.

문항 1을 통해 학생들 중 구의 부피와 겉넓이의 공식을 암기하고 있는 비율이 매우 낮다는 사실을 관찰할 수 있었다. 단지 답을 암기하지 못하는 것이 교육적으로 큰 문제는 아닐 수 있지만, 학생들이 그 답에 이르기 위한 추론방법을 거의 갖고 있지 못하며 그 답에 관련된 수학적 관계성들을 파악하지 못하고 있다는 점, 그리고 구의 부피와 겉넓이의 학습 이후에 배운 지식들을 구에 대한 지식에 연계하지 못하고 있다는 점은 심각하게 고려해 보아야 할 사항이다. 즉, [그림 Ⅱ-5]의 학생과 같이 원기둥, 구, 원뿔이 모여 있는 그림만 상기하더라도 구의 부피에 대해서 어느 정도 가까운 값을 추측할 수 있으며 구의 중심을 지나는 단면의 넓이가 πr^2임을 고려하면 구의 겉넓이에 대해서도 그러하지만[4] 대부분의 학생들은 이러한 수준의 수학적 추론의 흔적도 찾아볼 수 없는 답을 제시하였다. 또한 닮은 입체도형의 부피비가 크기의 세제곱에, 닮은 평면도형의 넓이비가 크기에 제곱에 비례한다는 8-나 단계의 교육내용을 상기하면 부피에 r^3을, 겉넓이에 r^2을 두는 것이 타당하지만 이렇게 적은 학생은 각각 23명(22.3%), 10명(9.7%)에 그쳤다.

[그림 Ⅱ-6]의 학생의 응답이 압축적으로 보여주듯이 이와 같은 현상의 일차적인 요인은 현 교육과정에서 구의 부피와 겉넓이 공식에 대한 수학적 설명을 충분히 제공하지 않는다는 데에 있는 것으로 보인다. 따라서 이 주제와 관련하여 7-나 단계의 학생들에게 가치 있는 수학적 논의가 무엇인지 모색할 필요성이 있다. 또 한편으로는 교육과정에서 7-나 단계에

4) 반구의 넓이는 그 밑면의 넓이보다 크며 구는 두 개의 반구로 분할되므로 구의 겉넓이는 그 중심을 지나는 단면의 넓이의 2배보다는 확실히 크다.

구에 대한 설명이 주어지는 것이 적합한지에 대한 논의도 필요할 것으로 보인다. 이 단계에서 이용할 수 있는 수학적 지식의 수준에는 한계가 있으며 학생들이 구 이후에 배우는 학습 내용을 구에 대한 지식에 자연스럽게 연계시키지 못하는 것으로 보이기 때문이다.

III. Archimedes의 연구의 교육적 시사점

여기서는 도형의 내적 관계성에 대한 Archimedes의 진술, 그리고 구의 측정에 대한 그의 수학적 접근방법에 대한 이해를 바탕으로 입체도형의 측정에 있어서의 교육적 주안점 및 수학적 접근방법에 대한 시사점을 얻고자 한다.

1. 도형에 내재한 관계성의 음미

《구와 원기둥에 대하여》 I 권에서 Archimedes가 Dositheus에게 보내는 서신[5)]은 자신이 보내는 새로운 정리들의 내용을 소개하는 것으로 시작된다. 그 내용은 구의 겉넓이는 구의 중심을 가로지르는 단면 넓이의 4 배라는 것, 구를 평면으로 잘라 얻은 임의의 조각의 겉넓이는 그 조각의 꼭짓점에서 그 조각의 밑면을 이루는 원의 가장자리까지 이르는 선분을 그 반지름으로 하는 원의 넓이와 같다는 것, 그리고 구의 대원을 밑면으로 하고 구의 지름을 높이로 하는 원기둥의 부피는 그 구의 부피의 3/2 배이고 겉넓이도 그 구의 겉넓이의 3/2 배라는 것이다. 이에 이어 Archimedes는 그 결과에 대한 자신의 놀라움을 다음과 같이 표현한다.

> 이 성질들은 모두 언급된 도형 속에 처음부터 내재해 있던 것이었으나 우리시대 이전의 기하학 연구자들에게는 알려지지 않은 것이었다. 이는 그들 중 아무도 이 도형들 사이에 대칭성[6)]이 존재함을 깨닫지 못했기 때문이다. 그러므로 나는 이 성질들을 다른 기하학자들이 얻은 통찰 그리고 내 생각으로는 가장 탁월한 업적인 Eudoxus가 입체도형에 대해 얻은 정리들 즉, 임의의 각뿔은 자신과 같은 밑면과 같은 높이를 가진 각기둥 부피의 3분의 1이라는 것, 그리고 임의의 원뿔은 자신과 같은 밑면과 같은 높이를 가진 원기둥 부피의 3분의 1이라는 것과 비교하기를 망설이지 않았다. 이 성질들 역시 도형 속에 애초부터 내재한 것이지만 Eudoxus 이전의 많은 중요한 수학자들 모두 이 성질들을 몰랐으며 누구에게도 발견되지 못했기 때문이다(Dijksterhuis, 1987:142).

Dijksterhuis(1987:143)에 의하면 Archimedes가 느낀 놀라움은 도형의 정의 자체에는 들어있지 않지만 그 정의가 만들어 내는, 매우 단순함에도 불구하고 오랫동안 발견되지 않은 풍부한 성질을 발견하게 되었을 때 수학자들이 느끼게 되는 감정의 전형이다. 언급된 입체도형들 사이에 이렇게 통약 가능한 단순한 비가 존재한다는 것은 구의 단순한 정의로부터는 곧바로 예측하기 어려운 일이지만 분명 그 정의 속에 내재해 있는 성질이다. 더욱이 이것은 실험적 방법으로는 확립될 수 없으며 오직 수학적 분석을 통해서만 확립될 수 있는 사실이다. Archimedes의 놀라움 속에는 구에 내재한 이러한 성질 뿐 아니라 수

5) Archimedes는 알렉산드리아에서의 유학생활을 마치고 그의 고향인 시라쿠사로 돌아가서 죽을 때까지 그곳에서 연구활동을 계속했던 것으로 보인다. 그러나 Archimedes의 남아있는 저술 중에는 알렉산드리아의 동료들에게 보낸 서신으로 시작하는 형식을 띤 것이 많이 있는데, 이는 그가 서신을 통해 알렉산드리아 동료들과의 학문적 교류를 유지했기 때문이다(Dijksterhuis, 1987:33).

6) Dijksterhuis는 여기서 "대칭성(symmetry)"이란 단어는 어원적으로나, 역사적으로나 '통약가능성(commensurability)'의 의미로 보아야 한다고 주장하고 있다.

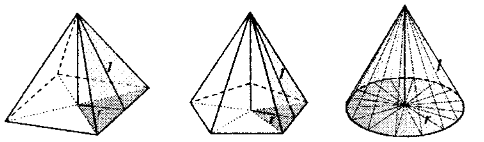
학적인 분석이 가진 힘에 대한 감홍이 담겨져 있었을 것이다.

여기서 Archimedes가 느꼈던 놀라움은 그와 같은 주제를 다루고 같은 결과를 배우고 있는 중학교의 학생들도 공유해야 할 것이라 생각된다. 그러나 수학적 결과에 대한 이러한 감상에 이르기 위해서는 단지 그 결과를 아는 것 뿐 아니라 Archimedes와 같이 그 결과에 이르는 추론의 과정을 직접 경험할 필요가 있을 것이다. 아래에 살펴볼 그의 접근방법은 학교수학의 여러 수준에 걸쳐 시사하는 바가 있다.

2. 유추관계 및 무한소의 발견술적 활용

《구와 원기둥에 대하여》 I 권에서 Archimedes가 구의 겉넓이와 부피에 이르는 전체 증명과정을 요약해보면 다음과 같다. 먼저 논문의 첫 부분에는 볼록 곡선의 길이와 볼록 곡면들의 넓이 비교를 위한 공리들을 설정하여[7] 곡면에 대한 그의 논의 전반의 논리적 기반으로 삼는다. 명제 1~6에서는 원의 외접다각형과 내접다각형으로 임의의 오차 이내로 원의 둘레에 가까이 갈 수 있음을 보인다. 이 결과를 바탕으로 명제 7~16에서는 구를 다루기 위한 기본 단위도형으로서 원뿔과 원뿔대의 옆넓이를 구한다. 즉, 그는 원뿔 옆면의 넓이가 그 원뿔의 밑면에 내접하는 정다각형과 외접하는 정다각형 각각을 밑면으로 하는 두 각뿔의 옆넓이 사이에 있음을 보이고, 극한을 다루는 그의 전형적인 논법 중 하나[8]를 통해 원뿔의 옆면은 밑면의 반지름 r과 모선 l의 기하평균(즉, $\sqrt{lr}$)을 반지름으로 하는 원의 넓이와 같음을 명제 14에서 밝힌다. 또한 원의 넓이가 반지름의 제곱에 비례한다는 사실로부터 원뿔의 옆면과 밑면의 넓이 비가 $l:r$이라는 명제 15가 얻어지는데, 구의 측정에 이르는 이후의 증명들에서 실제로 이용되는 것은 이 형태이다.

명제 15의 표현은 Archimedes가 원뿔의 겉넓이를 이해한 방식에 대한 어떤 단서를 제공한다. 다음과 같이 생각 해 보자(그림 Ⅲ-1). 정각뿔의 이등변삼각형 모양 옆면의 높이를 l이라 하고, 밑면의 중심(밑면의 외접원의 중심)에서 밑면의 가장자리까지의 길이를 r이라 하자. 이때 한 옆면과, 밑면상의 그 '그림자' 즉, 정사영의 넓이 비가 바로 $l:r$ 이다. 두 삼각형은 밑변이 같고 높이의 비가 $l:r$ 이기 때문이다. 이는 다른 옆면에 대해서도 마찬가지이므로 정각뿔의 전체 옆면의 넓이와 밑면 전체의 넓이 비 역시 $l:r$ 이다. 즉, (옆면 전체의 넓이) =(밑면의 넓이)$\times \frac{l}{r}$ 이다. 이 사실은 옆면의 높이가 l이고 밑면의 중심에서 가장자리까지의 길이가 r인 모든 정각뿔에 대해 성립한다. 이제 모선의 길이가 l이고 밑면의 반지름이 r인 원뿔을 변의 개수가 무수히 많은 정다각형 위에 세워진 뿔로 본다면 원뿔에 대해서도 (옆면의 넓이):(밑면의 넓이) $=l:r$ 라는 관계가 성립할 것이라 생각할 수 있다. 원뿔 밑면의 넓이는 πr^2이므로 (옆면의 넓이) $=\pi r^2\times \frac{l}{r}=\pi rl$ 이다.



[그림 Ⅲ-1] 원뿔 옆면의 겉넓이

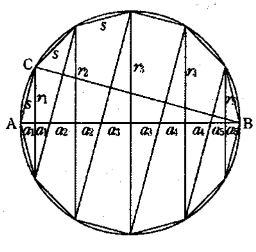
7) 평면에 대한 것으로 "양 끝점을 공유하는 곡선들 중 선분이 가장 길이가 짧다는 것", "양 끝점을 공유하고 한쪽으로 굽어진 두 곡선 중 하나가 다른 하나의 안쪽에 있을 때 안쪽의 곡선이 길이가 더 짧다"는 것을, 곡면에 대한 것으로는 이와 유추적인 것을 공리로 두었다.

8) Archimdes의 극한을 다루는 기법에 대한 Dijksterhuis(1987:130-133)의 분류에 따르면 "압축법(the Compression Method) 중 비율형식(Ratio Form)".

교육적인 관점에서 이러한 설명은 원뿔의 옆면과 밑면과의 관계에 대한 관찰을 통해 원뿔 옆면의 넓이 공식에 새로운 의미를 부여해 준다는 점에서 그리고 다각뿔 옆면의 넓이와 원뿔 옆면의 넓이를 공통적인 관점에서 이해할 수 있도록 해 준다는 점에서 의미가 있다. 더욱이 Archimedes가 이렇게 무한소 도형을 발견의 과정에 활용했을 것이라는 추측은 구의 측정에 이르는 이후의 명제들을 살펴볼 때 더욱 그럴듯하게 보인다.

구의 겉넓이를 구함에 있어서 Archimedes는 구를 안쪽과 바깥쪽에서 근사하는 도형으로서 정 $4n$각형을 회전시켜 만든 회전체를 사용했으며, 이때 이 회전체를 원뿔대의 옆면들을 모아 만든 도형으로 간주하였다. 실제로 원뿔대에 대한 명제 16까지의 결과들이 명제 21~33에 걸쳐 다음과 같은 기하학적 논의에 의해 구의 겉넓이와 연결된다.

[그림 III-2]의 내접회전체에서 i번째 원뿔대의 겉넓이는 $\pi(r_{i-1}+r_i)s$이므로[9](명제 16) 전체 겉넓이는 $2\pi(r_1+r_2+\cdots+r_5)s$이다. 직각삼각형의 닮음에 의해 $\frac{r_1}{a_1}=\frac{r_2}{a_2}=\cdots=\frac{r_5}{a_5}$ $=\frac{\mathrm{BC}}{s}$. 따라서 $2\pi(r_1+r_2+\cdots+r_5)s$ $=2\pi(a_1+a_2+\cdots+a_5)\mathrm{BC}=\pi\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}$ $<4\pi\left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2$. 비슷한 논의를 통해 외접회전체의 겉넓이는 $4\pi\left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2$보다 크다는 것을 보일 수 있고, 최종적으로 명제 33에서 극한을 다루는 그의 논법 중 하나[10]를 통해 구의 겉넓이가 $4\pi\left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2$임을 증명한다.



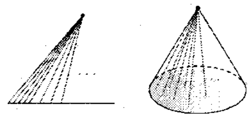
[그림 III-2] 구의 내접회전체의 단면

여기서 Archimedes가 증명 이전에 이 명제를 어떻게 발견할 수 있었는지는 그의 논문 《Method》를 통해 알 수 있다. 그 논문의 명제 2에서 역학적 방법을 통해 구의 부피가 그 중심을 가로지르는 단면을 밑면으로 하고 그 구의 반지름을 높이로 하는 원뿔 부피의 네 배임을 보인 후 Archimedes는 바로 이 결과를 통해 자신이 구의 겉넓이에 대한 추측에 이를 수 있었음을 다음과 같이 밝힌다.

> 나는 이 정리로부터 구의 겉넓이는 그 대원의 넓이의 네 배임을 알아채게 되었다. 즉, 나는 원의 넓이가 그 둘레를 밑변으로 하고 반지름을 높이로 하는 삼각형의 넓이와 같다는 사실[11]로부터, 그와 같은 방법으로 임의의 구는 그 겉넓이를 밑면으로 하고 반지름을 높이로 하는 원뿔과 같을 것이라고 생각했다(Heath, 2002).

삼각형과 원뿔은 Polya(1990:13-15)가 명시한 바와 같은 분명한 유추관계에 있다.[12] 또한 원과 구 역시 어떤 유추관계에 있다. Archimedes는 밑변이 원의 둘레와 같고 높이는 원의 반지름과

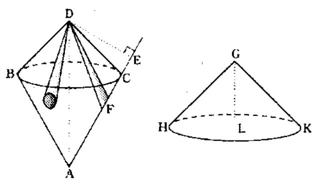
9) 여기서 1번째 원뿔대는 A를 꼭짓점으로 하는 원뿔을 가리킨다. 즉, $r_0=0$ 으로 둔다.
10) 마찬가지로 압축법 중 비율형식.
11) Archimedes가 그의 논문 《원의 측정》에서 제시한 첫 번째 명제이다.
12) 즉, 선분의 모든 점과 그 선분이 포함된 직선 밖의 한 점을 연결하면 하나의 삼각형을 얻을 수 있다. 이와 비슷하게, 원의 모든 점과 그 원이 포함된 평면 밖에 있는 한 점을 연결하면 하나의 원뿔을 얻을 수 있다.



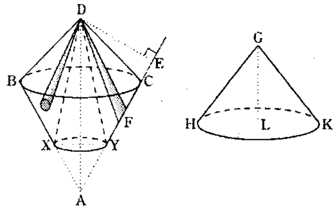
같은 삼각형은 원과 넓이가 같듯이, 밑면이 구의 겉넓이와 같고 높이가 구의 반지름과 같은 원뿔이 구와 부피가 같을 것이라고 추측하고 구의 부피 공식으로부터 구의 겉넓이에 대한 공식을 발견한 것이다. 단, 일상생활의 유사함에 대한 수학에서의 유추관계의 차이점에 대해 Polya가 지적한 바[13]와 같이 그것이 수학적 논의로서 가치 있으려면 Archimedes가 생각한 원과 구의 유추관계가 무엇인지 명확히 해 두어야 할 것이다.

Aaboe & Berggren(1996)에 의하면 Archimedes가 생각한 원과 구 사이의 유추관계의 발견, 그리고 더 나아가 구의 부피에 대한 엄밀한 증명을 이끈 것은 어떤 무한소 도형을 통한 두 도형에의 접근이었다. 그들은 그 근거를 주로 《구와 원기둥에 대하여》 I 권의 명제 18과 20의 기술에서 찾는다.

명제 18은 두 원뿔 ABC와 DBC로 이루어진 "입체마름모[14]" ABCD의 부피는 원뿔 ABC의 옆면과 같은 넓이의 밑면을 가지고 꼭짓점 D에서 ABC의 모선(의 연장선) 위에 내린 수선의 길이를 높이로 가지는 원뿔의 부피와 같다는 것이다(그림 Ⅲ-3). 또한 명제 20은 큰 입체마름모 ABCD에서 그림과 같은 작은 입체마름모 AXYD를 뺀 나머지 도형의 부피는 원뿔대 XYBC의 옆면과 같은 넓이의 밑면을 가지고 앞에서와 같은 수선의 길이를 높이로 가지는 원뿔의 부피와 같다는 것이다(그림 Ⅲ-4).



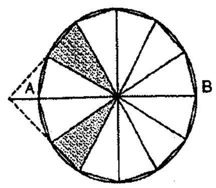
[그림 Ⅲ-3] 《구와 원기둥에 대하여》 I 권 명제 18



[그림 Ⅲ-4] 《구와 원기둥에 대하여》 I 권 명제 20

이 명제들은 얼핏 보아 직관적이지 않고 기억하기도 힘들다. 그러나 이 입체도형들이 각각 꼭짓점 D를 꼭짓점으로 하고 반대쪽 뿔의 옆면에 무한소 밑면을 가진 뿔들로 이루어져 있다고 생각하면 이 명제들의 의미는 분명해진다. 즉, 그 뿔들의 높이를 유지하면서 밑면을 모은다면 명제에서 말하는 새로운 원뿔이 구성되는 것이다.

이 명제들은 구의 겉넓이를 구한 명제 33으로부터 구의 부피를 구하는 명제 34를 유도하는 과정에 이용되는 핵심적인 사실이다. Archimedes는 구의 겉넓이를 구할 때는 원뿔대의 합으로 이루어진 회전체를 통해 구를 근사했지만 구의 부피를 구할 때는 명제 18과 20에서 구성된 입체도형들(즉, 입체마름모, 그리고 입체마름모의 차)로 구성된 회전체를 통해 속이 찬 구를 근사한다(그림 Ⅲ-5). 이는 Archimedes가 구의 부피와 구의 겉넓이 사이의 관계성을 통해 구의 부피를 구함에 있어서 구 전체를 그 표면에 작은 밑면을 가지고 구의 중심에 꼭짓점을 가진 가는 뿔들의 모임으로 간주했을 것임을 말해준다.

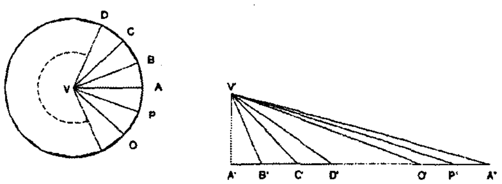


[그림 Ⅲ-5] 《구와 원기둥에 대하여》 명제 34
(Aaboe & Berggren, 1996)

13) "유추란 일종의 유사함이지만 일상생활에서의 유사함과 비교할 때 더 명확한, 더 개념적인 수준에서의 유사함이다. 즉, 두 체계가 유추관계에 있다고 말하기 위해서는 그들의 각 부분에서, 명확히 정의할 수 있는 어떤 관계에 대해 서로 일치한다는 것을 밝혀야 한다."

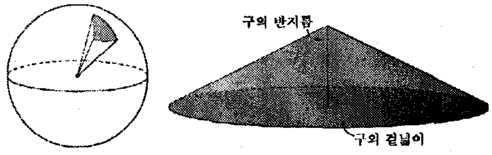
14) "입체마름모(solid rhombus)"는 두 원뿔의 밑면을 맞붙여서 만든 도형을 Archimedes가 가리켜 부른 말이다.

한편 원의 넓이가 그 둘레를 밑변으로 하고 반지름을 높이로 하는 직각삼각형의 넓이와 같음을 보이는 《원의 측정》의 명제 1의 증명에서 Archimedes는 원을 내접·외접하는 정다각형으로 근사한다. 그 정다각형들은 원의 중심을 한 꼭짓점으로 하는 삼각형들로 분할되고, 높이를 유지한 채 한데 모여 하나의 큰 삼각형으로 간주됨으로써, 결국 명제에서 언급하는 직각삼각형과 넓이가 비교된다. Aaboe & Berggren (1996)는 이 증명은 그가 원을 가느다란 삼각형들로 구성된 도형으로 파악했었을 것이라고 믿게 해 주며, 이로부터 그가 유추를 통해 구를 가느다란 원뿔들의 합으로 간주하는 착상에 이를 수 있었을 것이라 주장한다.



[그림 Ⅲ-6] 원의 둘레와 넓이
(Aaboe & Berggren,1996)

이제 이상의 논의를 수학적 유추에 대한 Polya의 기준에 부합하도록 정리하면 다음과 같다. 원은 평면에서 한 점부터의 거리가 같은 점들의 모임이고, 구는 공간에서 그러하다. 원이 높이가 같은 가느다란 삼각형으로 분해가 되듯이, 구는 높이가 같은 가느다란 뿔로 분해가 된다. 삼각형들이 밑변과 높이를 유지한 채 변형되어도 넓이가 변하지 않듯이 뿔은 밑면과 높이를 유지한 채 변형되어도 부피가 변하지 않는다. 삼각형들의 높이를 유지한 채 꼭짓점을 하나로 모으면 앞의 인용문에서 Archimedes가 생각한 삼각형이 만들어지며, 뿔들의 높이를 유지한 채 꼭짓점을 하나로 모으면 그가 생각한 원뿔이 만들어진다.



[그림 Ⅲ-7] 구의 겉넓이와 부피

우리나라의 일부 교과서[15]에도 이와 같이 구를 원뿔로 바꾸는 착상을 통해 구의 부피로부터 겉넓이를 구하는 방법이 제시되지만 원과의 유추관계를 통해 도입되고 있는 것은 아니며 그 가치가 크게 부각되지도 않는다. 무한소 도형으로의 분할을 통해 원을 삼각형으로 구를 원뿔로 변형하는 이러한 접근의 이점은 원의 넓이와 둘레 구의 부피와 겉넓이 사이의 관계성을 명확히 보여준다는데 있다. 즉 (원의 넓이)= $\frac{1}{2}$×(원의 둘레)×(원의 반지름) 이며, 비슷하게 (구의 부피)= $\frac{1}{3}$×(구의 겉넓이)×(구의 반지름) 이다. 원의 둘레와 넓이와 마찬가지로 구의 겉넓이와 부피 사이의 관계성도 그 각각의 계산에 선행하여 확립된다. 구의 부피와 겉넓이 중 하나를 알면 나머지 하나는 이 식을 통해 유도할 수 있다.

많은 학생들은 구의 부피에서의 비례상수 4/3과 구의 겉넓이에서의 비례상수 4를 단순히 암기하려고 하며 그마저도 어려움을 겪는다. 그러나 구의 겉넓이와 대원의 넓이, 구의 겉넓이와 부피 사이의 관계성의 파악 하에 이 값들은 단순히 암기할 대상이 아니라 그 관련성을 상기함으로써 필요할 때 복구할 수 있는 값이 된다. 또한 이렇게 결론을 얻는 과정은 학생들에게 수학에서의 유추의 의미와 그 활용 방법을 보여주는 좋은 예이다.

15) 금종해·이만근·이미라·김영주(2001), 황석근·이재돈(2001) 등.

Ⅳ. 보완적 접근방법 및 실제 적용시의 고려사항

본 장에서는 지금까지 살펴본 Archimedes의 연구와 외국 교재들의 접근방법에 대한 추가적인 조사를 바탕으로 입체도형의 측정에 대한 보완적인 방법을 모색하고, 실제 적용에 있어 고려해야 할 사항에 대해 논의하고자 한다.

1. 보완적 접근방법

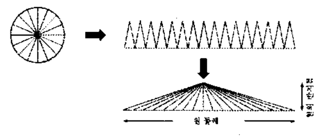
현 교육과정에 대한 보완적 접근방법은 교육과정상의 단계에 따라 다음의 두 가지로 생각할 수 있다. 하나는 7 단계에서 구체물을 이용한 실험에 의존하여 뿔과 구의 측정을 지도하는 현행 교육과정의 틀 안에서 Archimedes가 이용했던 원과 구의 유추관계, 그리고 그것을 구체화시켰던 무한소 도형으로의 분할 등의 수학적 추론 과정을 경험하도록 하는 것이다. 다른 하나는 학생들이 닮음과 Pythagoras 정리를 학습한 이후인 9 단계 혹은 그 이후에 '수학적인' 실험을 제공하고 Cavalieri의 원리를 활용하여 뿔과 구의 부피를 정확하게 구하는 것이다. 이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

가. 7 단계에서 도입 가능한 보완적 접근방법

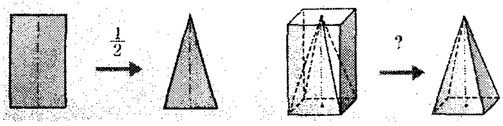
앞서 살펴본 바와 같이 현행 교육과정상 7 단계에서 뿔과 구의 부피와 겉넓이를 설명하기 위해 구체물을 통한 실험에 의존하는 것은 그에 대한 엄밀한 설명에 필요한 수학적 배경지식의 수준을 고려할 때 불가피한 측면이 있다. 그러나 Archimedes의 연구는 이 수준에서도 학생들에게 제공할 가치가 있는 수학적 논의들이 있음을 보여 주었다. 이것은 다음의 세 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 구의 부피와 겉넓이 사이의 내적인 연관성이다. 이는 구를 밑면의 넓이가 구의 겉넓이와 같고 높이가 구의 반지름과 같은 원뿔로 변형함으로써 알 수 있었다. 둘째, 이러한 사실의 발견에 이르게 했던 바, 원과 구와의 유추관계이다. 이 유추관계는 원과 구의 무한소 도형으로의 분할을 통해 분명해졌다.[16] 셋째, 구, 원뿔, 원기둥의 부피 사이에, 그리고 구와 대원의 넓이 사이에 존재하는 단순한 비에 대한 감상이다. 그 도형들의 관계 속에 이렇게 단순한 비가 존재한다는 것은 도형들의 정의 자체만으로는 예측하기 힘든 놀라운 사실이다. 그러한 비는 대략적인 값이 아니라 논증을 통해 확립된 완전히 정확한 값을 나타내는 것이며, 이러한 논증이 가능한 것은 타 학문과 구별되는 수학만의 특징임을 학생들에게 강조하여 지도할 필요가 있다. 이를 통해 학생들에게 "구의 부피는 외접하는 원기둥 부피의 2/3이다"라는 구의 부피에 대한 또 하나의 구체적인 의미도 제공할 수 있을 것이다.

한편 뿔의 부피를 도입함에 있어서 한 일본 교과서(赤 攝也 외, 2006)의 발문은 참고할만하다. 이 교과서에서는 [그림 Ⅳ-1]과 같은 그림을 제시하며 "삼각형의 넓이는 밑변과 높이가 각각 같은 직사각형 넓이의 1/2입니다. 사각뿔의 부피도 밑면의 넓이와 높이가 각각 같은 사각기둥의 부피의 1/2라고 말할 수 있겠습니까." 하고 묻는다. 이 교과서 역시 뿔의 부피에 대한 설명은 실험적 방법에 의존하고 있으나 이

16) 원을 무한소 도형으로의 분할을 통해 삼각형으로 변형하는 과정을 도입할 때, 학생들이 초등학교에서 원의 넓이를 직사각형으로 변형하여 넓이를 구할 때 사용했던 그림을 약간 변형한 오른쪽과 같은 그림을 이용할 수 있을 것이다.



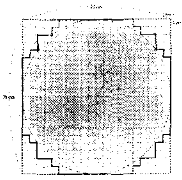
러한 발문은 뿔과 유추관계에 있는 평면도형인 삼각형에 대한 결과를 상기시킴으로써 뿔의 부피를 자연스러운 맥락에서 도입하고 학생들의 호기심을 자극하는데 도움이 될 것으로 보인다. 또한 더 나아가서는 앞서 언급한 원과 구 사이의 유추관계를 설명하는데 도움이 될 것으로 보인다.



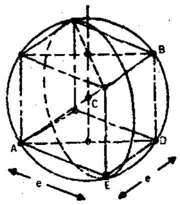
[그림 Ⅳ-1] 뿔의 부피에 대한 발문
(赤 攝也 외, 2006:184)

나. 9 단계 혹은 그 이후에 도입 가능한 보완적 접근방법

교육과정상 학생들이 닮음과 Pythagoras 정리를 배운 9 단계 혹은 그 이후의 단계에서는 입체도형에 대한 수학적인 추론을 보다 적극적으로 도입할 수 있을 것으로 보인다. 우선 7 단계에서와 같은 구체물을 통한 실험이 아니라 학생들의 기존 지식을 이용하는 수학적인 실험을 생각할 수 있다. 원의 넓이에 대해서는 현행 교육과정의 6-나 단계에서 격자판 위에 원을 올려두고, 원 안에 포함되는 단위 정사각형의 개수와 원을 포함하는데 필요한 단위 정사각형 개수의 사이에 있는 값으로서 그 값을 추정하는 활동을 제시하고 있다(그림 Ⅳ-2). 이와 비슷한 맥락에서 구의 부피를 추정하는 수학적인 실험을 제시할 수 있을 것이다. 예를 들어 SMSG(1960b)의 수학 교재에서는 구의 부피공식을 소개하기에 앞서 구에 내접·외접하는 정육면체의 부피를 각각 구하여 구의 부피 V가 $\frac{8\sqrt{3}}{9}r^3 < V < 8r^3$ 임을 관찰한다.[17] 이러한 활동은 구의 부피는 정육면체의 부피와 비교할 수 있는 양이며 따라서 r^2이 아니라 r^3과 관련된다는 것을 인식하게 하는데 도움을 줄 것으로 보인다. 이 교재에서는 구의 겉넓이에 대해서도 내접·외접하는 정육면체의 겉넓이 사이에 있는 값으로서 그 값을 추정하는 활동을 제시하고 있다.



[그림 Ⅳ-2] 원의 넓이 추정
(교육인적자원부, 2002b:62)



[그림 Ⅳ-3] 구의 부피 추정
(SMSG, 1960b)

또한 7 단계 수준에서는 원뿔이나 구의 정확한 부피 자체를 얻지는 못하였으나, 9 단계 정도의 수학지식을 전제하면 Archimedes의 연구인 《Method》에서 찾아볼 수 있는 불가분량의 방법을 통해 그 값을 정확히 구할 수 있다. 현대에 이르러 그 방법은 'Cavalieri의 원리'라는 이름으로 잘 알려져 있다.[18] 불가분량법에서는 도형의 넓이와 부피의 측정을 위해 두 개의 주어진 도형들을 이루는 불가분량의 요소들 사이

17) 이때 구에 내접하는 정육면체의 부피를 구하기 위해 Pythagoras 정리와 제곱근 계산이 이용되어 7 단계의 수준을 벗어나게 된다.

18) 1635년에 발간된 Cavalieri의 책, 《Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota》을 통해 널리 알려졌다.

의 일대일대응 관계를 수립한다. 입체도형에 대한 Cavalieri의 원리를 기술하면 다음과 같다.[19)]

> 두 입체도형이 같은 높이를 가지며, 두 밑면에 평행하며 같은 높이에 있는 두 단면의 넓이 비가 일정하다면 두 입체도형의 부피 비도 그와 같다.

Cavalieri는 이 불가분량들이 두께를 가지는지 아닌지에 대해 명백히 하지 않았으며 그에 대한 설명도 일관되게 하지 않았다.[20)] 그러나 엄격함에 대한 논의와 별개로 Cavalieri의 원리의 실용적인 효과는 분명하다. 즉, 새로운 도형의 부피는 부피를 이미 알고 있는 다른 도형과의 대응하는 단면의 넓이 비를 통해 곧바로 구해지므로 그 원리를 통해 부피 계산에 필요한 극한 과정을 숨길 수 있다는 것이다(Edward, 1979:105). Cavalieri의 원리를 활용하면 삼각뿔의 부피, 일반적인 뿔의 부피, 구의 부피를 일관성 있게 구할 수 있다. 실제로 본 연구의 <부록>에 요약한 바와 같이 SMSG(1960a) 교과서, 그 정신을 이어받은 Moise & Downs(1964)의 10학년용 기하교재, UCSMP(1997)에서 개발한 기하교재[21)]에서는 그 원리를 공리로 받아들여 이 입체도형들의 부피를 구하고 있다. 단, 이때 닮은 도형의 성질과 Pythagoras의 정리가 사용되므로[22)] Cavalieri의 원리의 본격적인 활용은 우리나라의 현행 교육과정상 9 단계 혹은 그 이후에 가능할 것이다.

이상과 같이 닮음과 Pythagoras 정리를 전제로 하면 학생들이 뿔과 구의 측정을 위해 사용할 수 있는 추론이 7 단계에 비해 훨씬 다양해지고 정교해진다. 특히 삼각뿔, 원뿔, 구의 부피에 대한 일관성 있는 접근방법을 제공해 주는 Cavalieri의 원리의 도입이 가능해진다.

또한 중학교 기하와 고등학교의 미적분학을 매개하는 맥락에서 《구와 원기둥에 대하여》 I 권에 제시된 Archimedes의 엄밀한 증명 역시 교육적으로 유용하게 활용할 수 있을 것으로 보인다. 입체도형의 부피와 겉넓이에 대한 교육과정 전체를 볼 때, 구의 부피와 겉넓이는 7-나 단계에서 실험적 방법으로 다루어진 후 고등학교 과정에서 정적분에 이르기 전까지는 더 이상의 논의 없이 받아들여진다. 미적분학은 강력한 수학적 도구이며 많은 문제를 일률적인 방법으로 해결하도록 해 주지만, 한편으로 함수 개념과 그 조작에 크게 의존함으로써 계산이 다루고 있는 원래의 도형들이 가진 기하학적 성질의 풍부함을 감추어 버리는 역할도 한다. 예를 들어 고등학교 미적분학에서 구의 부피는 원 $x^2+y^2=r^2$을 회전하여 생기는 회전체의 부피로서 정적분 $\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx$ 의 값으로 구해질 뿐이다. 더욱이 구의 겉넓이는 일반적으로 고등학교 교육과정에서 다시 다루어지지 않는다. Archimedes의 증명을 살펴보면 소진법과 이중귀류법을 통한 엄밀한 논의가 전개

---

19) 역사적으로는 Cavalieri가 Archimedes의 훨씬 후대의 사람이지만, 수학적으로는 Archimedes의 역학적 방법을 Cavalieri의 원리의 일반화로 간주할 수 있다(홍갑주, 2008:133-134).

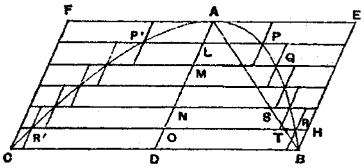
20) Cavalieri는 중세의 이론가들과는 달리 불가분량의 정확한 본질과 그 존재성에 대해서는 관심이 적었다. 그에 의하면 엄격함은 수학보다는 철학의 고려 대상이었다(Edward, 1979:104).

21) UCSMP(The University of Chicago School Mathematics Project): 시카고 대학의 수학교육과를 중심으로 초중등 학교수학을 향상시키기 위한 목적으로 1983년에 시작된 프로젝트로 국제적인 협의회를 개최하며 초중등학교의 교과과정을 개발 등을 하고 있다(UCSMP, 1997).

22) 밑면이 닮은 두 뿔의 같은 높이에서의 모든 단면끼리도 닮음이라는 사실의 증명 등에 닮은 도형의 성질이 이용된다. 또한 구의 단면의 넓이를 계산하는데 Pythagoras의 정리가 사용된다.

되기는 하지만 그 증명의 착상은 개별 도형 혹은 도형들 사이의 기하학적 성질 자체에 대한 깊은 성찰로부터 얻어진 것임을 알 수 있다. 구의 부피와 겉넓이에 대한 Archimedes의 증명은 소진법과 이중귀류법에 의한 극한의 엄밀한 논의 부분을 극한에 대한 직관적인 논의(즉, [그림 Ⅲ-2]에서 내접 정다각형의 변의 수를 $4n$, 이때 BC의 길이를 l_n이라 두면, n이 커질 때 내접 회전체의 겉넓이는 구에 가까워지고 l_n은 지름 AB에 가까워진다)로 바꾼다면, 그 밖에 이용되는 지식은 삼각형의 닮음비, 원주각의 성질, 원뿔의 옆넓이 등 모두 중학교에서 다루는 평면기하학의 기본적인 사실들이다. 이러한 점을 고려하면 Archimedes의 증명은 교육과정상 고등학교 수학 I 단계에서 수열의 극한 개념을 익힌 후 그 기하학적 응용으로서 다루어질 수 있을 것으로 보인다. 학생들에게 이 증명은 중학교에서 단편적으로 배웠던 지식들의 가장 훌륭한 종합이면서, 극한 및 정적분의 기초적인 개념을 도입하는 시기에 있어서 흥미로운 출발점이 될 수 있을 것이다.

한편 구의 부피에 대한 Archimedes의 증명에는 적당한 근사도형을 통해 주어진 도형을 원하는 오차 이내로 근사한다는 개념은 포함되어 있으나 정적분을 규정하는 또 하나의 중요한 특징인 '비슷한 문제들 전체에 적용되는 일반적인 절차'는 결여되어 있다(Edwards, 1979:75). 그러나 교육적으로는 이러한 한계를 오히려 정적분 개념의 도입시에 그 개념의 핵심을 학생들에게 명확히 보여주기 위한 소재로서 활용할 수 있을 것으로 보인다. 특히 Archimedes의 증명이 수업의 소재로서 흥미로울 수 있는 이유는 그 스스로도 자신의 연구의 후기에 이르러 이러한 한계를 극복하려고 시도했다는데 있다. 즉, 그의 비교적 후기의 논문으로 알려진 《원뿔곡선체와 타원회전체에 대하여》에서 그는 포물회전체, 쌍곡회전체, 타원회전체를 절단하여 만든 입체도형에 대해 납작한 원기둥들을 쌓아 만든 내접도형과 외접도형을 이용하여 그 부피를 구하며(그림 Ⅳ-4), 이때 부피를 구하는 문제는 어떤 급수의 합을 구하는 문제로 귀결된다. 비록 현대적인 함수의 개념을 이용한 것은 아니지만 이러한 접근방법은 개별 도형의 특정한 기하학적 성질을 떠나 일반적인 계산을 통해 부피의 측정에 이르는 것으로서 현대적인 구분구적법, 나아가 정적분의 형태에 보다 가까워 진 것이라 할 수 있다(Edwards, 1979:62-67).



[그림 Ⅳ-4] 포물회전체를 절단한 조각의 부피
(Heath, 2002:312)

현재 학생들이 배우는 정적분의 개념 속에는 주어진 도형에 대한 근사도형을 통해 그 도형의 넓이에 한없이 가깝게 접근한다는 목표와 구간 위에서 함수의 그래프 아래에 갇혀 있는 기둥들의 합으로서 여러 도형을 일률적으로 근사한다는 해결방법이 동시에 포함되어 있다. Archimedes의 접근방법에 대한 이러한 고찰은 넓이와 부피의 문제에 대한 정적분으로의 이행이 학생들에게도 자연스러운 일이 아닐 수 있으며, 정적분의 정의는 당연한 것으로 주어질 것이 아니라 수학적인 발명의 맥락에서 지도되어야 함을 시사한다.

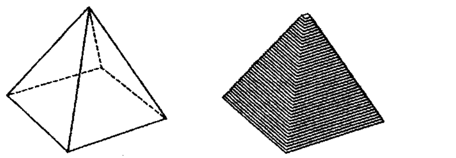
2. 실제 적용시의 고려사항

이와 같은 보완적인 접근방법을 실제로 교육현장에 적용함에 있어서 다음과 같은 사항에 대한 논의가 선행되어야 할 것으로 보인다.

첫째, 입체도형의 측정의 기본적인 배경지식으로서 현행 교육과정에서 '부피'와 '겉넓이'의 의미가 충분히 설명되고 있는가의 문제이다. 현재 우리나라 교육과정에서 입체도형의 부피와 겉넓이는 6 단계에서 처음 도입되는데, 직육면체의 부피는 직육면체를 이루는 쌓기나무의 개수를 세어 구하는 것으로 정의되고, 겉넓이는 직육면체의 여섯 면의 넓이의 합으로 정의된다 (교육인적자원부, 2002a). 이후 부피와 겉넓이의 일반적인 의미를 명확히 정의하지 않은 채, 7 단계에서는 굽어진 곡면을 포함하는 경우를 포함하여 다양한 입체도형의 부피와 겉넓이의 공식을 도입한다. 이와는 달리 외국의 몇몇 기하 교재에서는 부피와 겉넓이의 개념을 가능한 명확히 정의하고자 시도한다. 예를 들어 Serra(2003)의 기하교재에서는 부피는 입체도형이 차지하는 공간의 양으로, 겉넓이는 입체도형을 둘러싸는 모든 면의 넓이의 합으로 정의한다. 또한 UCSMP(1997)의 기하교재에서는 입체도형의 겉넓이와 부피를 탐구하기에 앞서 겉넓이는 둘레의 길이처럼 경계를 측정한 값이고 부피는 넓이처럼 도형으로 둘러싸인 공간의 양을 측정한 값이라고 정의하고 있다. 비록 초보적인 수준에서이지만, 이러한 정의를 분명히 제시하지 않는다면 학생들은 겉넓이와 부피의 속성에는 관심을 갖지 않고 계산공식에만 의존하게 될 수 있다. 특히 Archimedes의 유추를 올바르게 이해하기 위해서는 부피와 겉넓이에 대한 정의를 바탕으로 입체도형의 '부피'와 '겉넓이'가 각각 평면도형의 '넓이'와 '둘레의 길이'에 대응하는 양임을 인식하여야 한다. 이러한 점에서 볼 때 현행 교육과정의 전반에 걸쳐 겉넓이와 부피 등의 용어가 어떻게 사용되고 있으며, 학생들이 이것을 어떻게 받아들이고 있는지에 대한 조사와 논의가 필요할 것으로 보인다.

둘째, Cavalieri의 원리를 교실 수업에 적극적으로 활용할 때 그것을 어떤 맥락에서 도입하느냐의 문제이다. 미적분학에서는 Cavalieri의 원리가 하나의 정리로서 증명되지만 학교수학에서는 그 원리를 증명의 결과가 아니라 증명의 전제로서 받아들이게 되며 이때 그 원리가 학생들에게 단지 강요나 암기사항이 되지 않도록 해야 할 것이기 때문이다. 실제로 SMSG (1960a), Moise & Downs(1964), UCSMP(1997) 등의 기하교재에서는 그 원리를 공리로서 받아들이기 전에 먼저 그 원리가 왜 성립하는지부터 설명하면서, 비록 Cavalieri의 원리를 공리로서 도입하려 하고 있지만 사실은 이 원리는 하나의 정리임을 강조하고 있다. 그 설명은 대략적으로 다음과 같다.

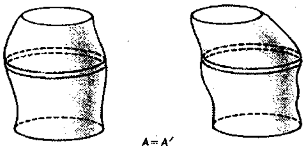
어떤 물체 예컨대 정사각뿔에 대해 얇은 정사각형 모양 카드들을 쌓아 만든 근사모형을 생각하자(그림 Ⅳ-5). 그 근사모형의 꼭대기에서 바닥까지 구멍을 뚫고 가느다란 막대를 끼운 다음 이리 저리 기울인다. 이 때 근사모형의 모양은 바뀌겠지만 그 부피는 카드들 부피의 합이므로 변하지 않는다.



[그림 Ⅳ-5] 정사각뿔과 카드로 만든 근사모형 (Moise & Downs, 1964)

이제 두 입체도형이 주어져 있고, 같은 높이에서의 두 단면은 항상 넓이가 같다고 하자. 두 입체도형 각각에 대해 앞에서와 같이 카드로 만든 근사모델을 생각하면 양쪽의 서로 대응하는 카드는 부피가 같다(그림 Ⅳ-6). 아주 얇은 카드를 사용하면 주어진 도형에 아주 가까운 모델을 만들 수 있다. 결국 충분히 얇은 카드를 사용함으로써 원하는 만큼 가까이 근사할 수

있다. 그러므로 두 입체도형의 부피는 같다.



[그림 IV-6] 같은 높이에서 단면의 넓이가 항상 같은 두 입체도형(Moise & Downs, 1964)

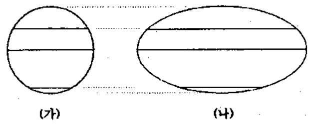
이러한 설명 이후에 Cavalieri의 원리는 다음과 같이 공리로서 도입된다.

> 여기에서 유도되는 원리를 'Cavalieri의 원리'라 부른다. 우리가 그것을 증명한 것은 분명 아니다. 단지 왜 그것이 개연적인지 설명한 것뿐이다. 따라서 우리는 그것을 공리의 형태로 다음과 같이 나타내기로 한다. … (Moise & Downs, 1964).

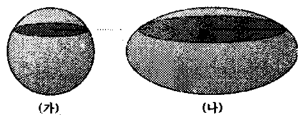
이 설명은 엄밀한 증명은 아니지만, 이후의 교육과정에서 정적분으로 부피를 정의함에 있어서 중요한 두 개의 요소를 포함하고 있다. 즉, 주어진 입체도형의 부피를 단면의 넓이의 합이 아닌 두께를 가진 카드들의 부피의 합으로 간주한다는 것, 그리고 근사도형과 원래 도형의 부피가 같다고 말하기 위해 카드를 얇게 함으로써 원하는 만큼 오차를 줄일 수 있음을 보인다는 개념이다. 이러한 진행 방식은 학생들 수준에서 이용 가능한 수학적 추론의 도구를 증명 없이 제공하되, 그 증명이 기반하고 있는 수학적 핵심은 놓치지 않는 한편, 학생들의 잠재적인 오개념을 방지하려는 시도로서 의미 있는 것으로 보인다.

셋째, 학생들이 가지고 있는 넓이와 부피의 기존 관념이 Cavalieri원리의 도입과 관련하여 어떤 관계에 있는가의 문제이다. 앞서 언급한 본 연구의 설문에서 문항 5와 6은 이에 대한 기초적인 검사로서 다음과 같았다.

5. 도형 (가)와 (나)를 같은 높이에서 자른 선분의 길이는 (나) 쪽이 언제나 (가)의 2배입니다. 도형 (가)의 넓이를 5 라고 하면 (나)의 넓이는 얼마일까요?

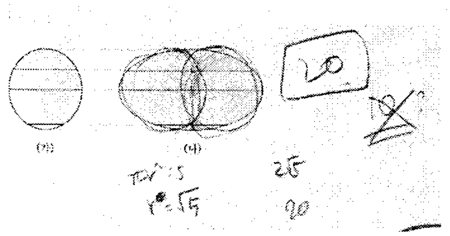


6. 입체도형 (가)와 (나)를 같은 높이에서 자르면 그 단면은 항상 원이고, (나)의 단면의 반지름은 (가)의 단면의 반지름의 2배입니다. 도형 (가)의 부피를 10 이라고 하면 (나)의 부피는 얼마일까요?



총 103명의 학생 중 문항 5에 대해 40명의 학생(38.8%)이 정답인 10을 적었다. 27명(26.2%)의 학생은 20이라고 답했는데, 이 중 많은 학생이 "$\pi r^2=5$ 이므로 $r^2=5$. 따라서 $r=\sqrt{5}$. $2r=2\sqrt{5}$이므로 (나)의 넓이는 $2\sqrt{5}$의 제곱인 20이다."와 같이 이 문제를 풀려고 하였다(그림 IV-7).[23] 문항 6에 대해서는 18명의 학생(17.5%)만이 정답인 40을 적었다. 많은 학생들은 단면의 넓이에 대한 비례관계를 직접 이용하려고 하기보다는 구의 부피 공식에 의존하여 (가)의 반지름을 구하고 그 값을 2배한 후 다시 그 공식에 단순히 대입함으로써 (나)의 부피를 구하고자 하였다.

23) 이 학생들은 원주율 π를 수가 아니라 임의로 제거할 수 있는 기호로 간주하고 있다. 이 오류는 교육과정상 원주율이 도입되는 시기와 방법에 관련된 것으로 보인다. 이 오류의 원인 및 이후의 학습에 미치는 영향에 대한 연구가 이루어져야 할 것으로 보인다.



[그림 Ⅳ-7] 문항 5의 풀이의 예

문항 5와 6의 도형 (나)는 원이나 구가 아니므로 공식을 직접 이용할 수 없음에도 불구하고 많은 학생들은 공식에 전적으로 의존하여 넓이나 부피를 구하였다. 이 두 문항을 통해 많은 학생들이 넓이와 부피를 구하는데 공식의 단순한 적용에 크게 의존하며, 그 결과로 Cavalieri의 원리에 일치하지 않는 잘못된 결론을 내리고 있다는 사실을 관찰하였다. 넓이와 부피의 개념에 대한 학생들의 이러한 미숙함이 Cavalieri의 원리의 도입에 장애가 될 것인지는 확실치 않다. 오히려, Cavalieri의 원리가 학생들의 넓이와 부피에 대한 관념의 일부로 받아들여져서 넓이와 부피에 대한 그들의 이해를 개선하는데 도움이 될 수도 있을 것으로 생각된다. 이에 대해서는 보다 본격적인 실증적 연구를 통해 확인하여야 할 것이다.

Ⅴ. 요약 및 결론

중학교에서 다루는 입체도형들 중에서도 구는 학생들에게 가장 친숙한 수학적 대상 중 하나일 것이다. 그러나 본 연구의 설문에서 확인하였듯이, 많은 학생들은 구의 부피와 겉넓이의 공식을 기억하지 못할 뿐 아니라 그 공식에 이르기 위한 추론방법을 거의 알지 못하고 있다. 이는 현행 중학교 교육과정에서 입체도형의 부피와 겉넓이에 대한 설명방식들이 일관되지 않고, 특히 뿔의 부피, 구의 부피, 구의 겉넓이에 대해 구체물을 통한 실험적 방법으로 그치고 있는 상황에 기인한 것으로 보인다. 본 연구에서는 교육적인 관점에서 이러한 상황의 문제점을 지적하고 보완적인 접근방법을 모색하였다.

원뿔과 구의 측정에 대한 Archimedes의 연구는 중학수준에서 유용한 추론 방법과 함께 수업에 있어서의 주안점을 시사한다. 고등학교 미적분학에서 구의 부피를 계산하기는 하지만 이때의 계산에는 Archimedes가 묘사한 바와 같은 도형들 자체의 풍부한 기하학적 성질은 드러나지 않으며 인문계에 진학하는 학생들은 이러한 기회조차 갖지 못한다. 구의 부피와 겉넓이 사이의 내적 관계성, 그리고 이 관계성에 이르게 해 주는 구와 원 사이의 유추관계를 파악하는 것은 학생들이 중학교 기하학에서 가져야 할 중요한 경험이라고 생각된다. 이와 같이 실험적 방법과 엄밀한 미적분 사이에 위치할 수 있으며, 수학적으로 타당하고 발견술적으로 효용성 있는 접근방법의 도입에 대하여 진지하게 논의해 볼 필요가 있을 것이다.

또한 이러한 논의의 전제로서 입체도형의 측정이 제시되는 교육과정상의 시기의 문제에 대해 생각해 보았다. 7-나 단계에서 실험적인 방법으로 뿔의 부피, 구의 부피, 구의 겉넓이 등을 다룬 후에 학생들이 좀 더 수학적인 추론을 통해 이 내용들을 다룰 준비가 된 다음에도 그 기회가 제공되지 않고 있는 현 상황은 교육과정에서 논의가 필요한 부분이라 할 수 있다. 본 연구에서는 Archimedes가 이용한 유추관계를 중심으로 현행 교육과정을 보완하여 7 단계에서 도입할 수 있는 수학적 추론을 모색하는 한편, 9 단계 이후에 도입할 수 있는 접근방법으로서 수학적인 실험과 Cavalieri의 원리에 대해 살펴보았으며, Archimedes의 엄밀한 증명이 중학교 기하학에서 단편적으로 배웠던 지식들

의 훌륭한 종합이면서, 정적분 개념의 핵심을 명확히 보여주는 예가 될 수 있음을 고찰하였다. 그리고 이 접근방법들의 실제 적용에 있어서 고려해야 할 사항에 대해 논의하였다. 7 단계에서와 9 단계 이후의 접근방법들이 서로 대치되는 것은 아니지만, 교육현장의 시간상의 제약 및 여러 단계로 나누어 설명을 제시할 때 학생들이 가질 수 있는 혼란을 고려하면 이 접근방법들의 선택과 배치에 대한 추가적인 논의가 필요할 것으로 보인다.

마지막으로, Cavalieri의 원리의 도입이 넓이와 부피에 대한 학생들의 기존의 이해와 어떤 관계가 있는지에 대해 본 연구에서는 문제를 제기하는 데에 그쳤으나, 이에 대한 보다 구체적이고 실증적인 연구가 기대된다. 만약 그 원리의 도입이 넓이와 부피에 대한 학생들의 이해를 개선할 수 있다면 그 원리는 단지 뿔이나 구의 부피를 구하기 위한 수학적 도구 이상의 교육적 의미를 가지게 될 것으로 사료된다.

참고문헌

교육인적자원부(2002a). **수학 6-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002b). **수학 6-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: 고려출판.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: 디딤돌.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이학재 · 이성재(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: 금성출판사.

홍갑주(2008). **아르키메데스 수학의 교육적 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

황석근 · 이재돈(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: 한서출판사.

Aaboe, A., & Berggren, J. L. (1996). Didactical and other remarks on some theorems of Archimedes and infinitesimals. *Centaurus, 38*, 295-316.

Boltianskii, V. G. (1978). *Hilbert's third problem.* Washington, DC: V. H. Winston&Sons.

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes.* New Jersey: Princeton university press.

Edward, C. H. Jr. (1979). *The historical development of the calculus.* New York: Springer-Verlag.

Heath, T. L. (2002). *The works of Archimedes.* New York: Dover Publications.

Moise, E., & Downs, F. (1964). *Geometry.* Addison-Wesley.

Polya, G.(1990). *Mathematics and Plausible Reasoning, Volume 1: Induction and Analogy in Mathematics.* Princeton University Press.

Serra, M. (2003). *Discovering Geometry: An Investigative Approach.* Key Curriculum Press.

SMSG (1960a). *Geometry: Student's text part I*. Yale University Press.

SMSG (1960b). *Mathematics for Junior High School Volume 2.* Yale University Press. 한국수학교육연구회 역(1970). 중학교 SMSG 수학. 문교부.

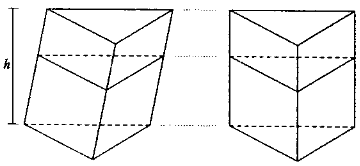
UCSMP (1997). *Geometry.* Scott Foresman.

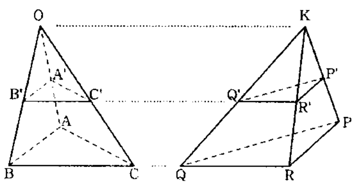
赤攝也 외 17인(2006). **中學教 數學1**. 東京: 大日本圖書.

<부록> Cavalieri 원리를 통한 뿔과 구의 부피

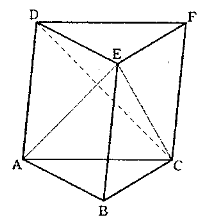
Cavalieri 원리를 통해 각뿔의 부피와 구의 부피에 이르는 과정은 일반적으로 다음과 같다 (SMSG, 1960a; Moise & Downs, 1964; Edward, 1979).

각기둥과 각뿔의 부피. 우선 밑면의 넓이와 높이가 각각 같은 두 기둥은 같은 높이에서 두 단면의 넓이가 항상 같음을 보일 수 있고, 따라서 부피가 같다. 이제, 각각의 밑면인 삼각형 ABC와 PQR의 넓이가 같고, 높이가 서로 같은 임의의 두 삼각뿔 OABC, KPQR을 생각하자. 두 삼각뿔을 임의의 같은 높이에서 잘라 만든 단면, 삼각형 A′B′C′와 P′Q′R′의 넓이는 서로 같고,[1] 따라서 두 삼각뿔은 부피가 같다.





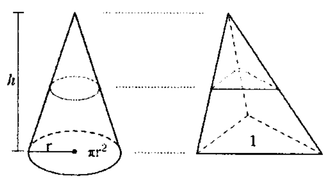
마지막으로, 밑면인 삼각형 ABC의 넓이가 S이고 높이가 h인 임의의 삼각뿔 EABC에 대해, 변 EB와 평행하고 길이가 같도록 변 DA, FC를 세우고 변 DE, EF, FD를 그려서 삼각기둥 ABCDEF를 만든다. 그러면 이 삼각기둥의 높이 역시 h이다. 이 삼각기둥은 세 개의 삼각뿔 EABC, CDEF, CAED로 분해될 수 있는데, 삼각뿔 EABC와 CDEF의 부피, 그리고 삼각뿔 EABC와 CAED의 부피는 서로 같음을 밑면과 높이의 비교를 통해 알 수 있다.[2] 결국 세 삼각뿔의 부피는 모두 같고, 따라서



(삼각기둥 ABCDEF의 부피) $=3\times$(삼각뿔 EABC의 부피)

이다. 이로부터 삼각뿔 EABC의 부피는 삼각기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$ 즉, $\frac{1}{3}Sh$임을 안다.

원뿔의 부피. 밑면의 반지름이 r이고 높이가 h인 원뿔과, 밑면의 넓이가 1이고 높이가 h인 삼각뿔을 생각하자(아래 왼쪽 그림). 닮음비를 이용하면, 같은 높이에서의 두 입체도형의 단면의 넓이 비는 항상 πr^2:1임을 알 수 있다. 따라서 (원뿔의 부피):(삼

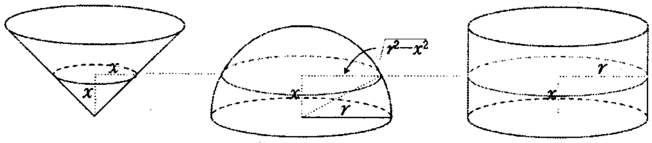


1) 삼각형 A′B′C′는 삼각형 ABC와, 삼각형 P′Q′R′은 삼각형 PQR과 닮음이며, 그 닮음비가 서로 같기 때문이다.

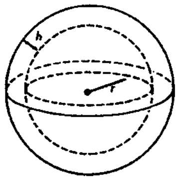
2) 삼각뿔 EABC와 CDEF의 밑면을 각각 삼각형 ABC와 DEF로 보고 꼭짓점을 각각 E와 C로 보면, 두 삼각뿔의 높이는 일치하고 밑면끼리는 합동이다. 또, 삼각뿔 EABC와 CAED는 밑면을 각각 삼각형 ABE와 AED로 보고 꼭짓점을 공통으로 C로 보면 그러하다.

각뿔의 부피) $=\pi r^2:1$ 이고, 이로부터 원뿔의 부피가 $\pi r^2 \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$임을 알 수 있다.[3)]

구의 부피. 밑면의 반지름이 r이고 높이가 r인 원뿔의 부피는 위의 결과에 의해 $\frac{1}{3}\pi r^3$이다. 위의 오른쪽 그림은 왼쪽부터 이 원뿔을 거꾸로 세워둔 것, 반지름 r인 반구, 밑면의 반지름이 r이고 높이가 r인 원기둥을 나타낸 것이다. 그림에서 높이 x인 위치에서 자른 원뿔의 단면 넓이는 πx^2, 반구의 단면 넓이는 $\pi(r^2-x^2)$이므로 그 합은 오른쪽 그림의 원기둥의 단면 넓이 πr^2과 일치한다. 이것이 모든 x에 대해 성립하므로 (원뿔의 부피) +(반구의 부피) =(원기둥의 부피) 이다. 그런데 원뿔의 부피는 $\frac{1}{3}\pi r^3$이고 원기둥의 부피는 πr^3이므로 반구의 부피는 $\frac{2}{3}\pi r^3$ 즉, 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 이다.



구의 겉넓이. SMSG(1960)와 Moise & Downs(1964)에서는 구의 부피를 구한 후, 이로부터 구의 겉넓이를 다음과 같이 얻고 있다. 즉, 아래의 구의 겉넓이를 A라 하고, 원래의 구와 더 작은 구 사이에 갇힌 "구 껍질(spherical shell)"의 부피를 V라 하면, h가 작을 때 V/h는 A에 가깝다.[4)]
$V=\frac{4}{3}\pi(r+h)^3-\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(3r^2h+3rh^2+h^3)$ 이므로, $\frac{V}{h}=4\pi r^2+h(4\pi r+\frac{4}{3}\pi h)$. 따라서 $h\to 0$ 일 때 $\frac{V}{h}\to 4\pi r^2$. 그런데, $\frac{V}{h}\to A$ 임을 알고 있으므로 결국 $A=4\pi r^2$이다.



구의 부피로부터 구의 겉넓이의 유도
(Moise & Downs, 1964)

---

3) 일반화시키면, 넓이가 S인 도형을 밑면으로 가지고 높이가 h인 모든 뿔은 그 부피가 $S\cdot\frac{1}{3}h=\frac{1}{3}Sh$ 임을 알 수 있다.
4) Moise & Downs(1964)에서는 구에 얇은 페인트칠을 할 때 사용되는 페인트의 양을 이용하여 이를 설명하고 있다.

On the Approach for the Volume and the Surface Area of Solid Figures in the Middle School

Hong, Gap Ju (Seoul National University Graduate School)
Choi, Young Gi (Seoul National University)
An, Suk Young (Sillim High School)
Kim, Kun Uk (Guro Middle School)

This study points out that the way of teaching varies according to the kinds of figures in explaining the volume and the surface area of solid figures in the seventh grade curriculum. Especially, the study discusses the limitation of the explanation depending on the experimental method using physical objects. Considering the study of Archimedes' research about measuring sphere, we investigate its educational implications and, based on this result, suggest the complementary approach and the considerations for applying to current school mathematics curriculum.

* **Key words** : Archimedes(아르키메데스), Cone(원뿔), Solid Figure(입체도형), Sphere(구), Surface area(겉넓이), Volume(부피)

논문접수: 2008. 1. 14
심사완료: 2008. 2. 15