대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 18, No. 1, 51-62. Feb 2008

기하학적 측면에서 복소수의 지도가능성 고찰

이 동 환*

7차 교육과정에서 복소수 단원은 복소수의 사칙연산만을 다루고 있다. 문자식 계산과 다를 바 없이 지도되는 실정이다. 본 논문은 복소수의 대수가 평면 기하학의 닮음변환과 맺고 있는 본질적인 관계를 수학적으로 분석하고, 이러한 본질적인 관계를 학교수학에 접목하기 위한 방법을 찾기 위해 역사적 분석을 하였다. 그 결과 Viete의 직각삼각형 연산을 바탕으로 기하학적 측면에서 복소수의 지도 가능성을 찾았다. 이러한 분석을 바탕으로, 학교수학에서 복소수의 기하학적 해석의 지도가능성을 고찰하였다.

Ⅰ. 서 론

SMSG교과서(1959: 217)의 복소수단원 교사용지도서는 '복소수 체계는 인간 지성이 이룩한 최고의 성과 가운데 하나이다.'라는 문장으로 시작한다. 이러한 칭송이 단지 방정식 $x^2+1=0$의 해를 구할 수 있게 되었다는 데서 비롯된 것은 아니다. MacLane(1986: 307)은 극히 간단한 대수적 도구($i^2=-1$)인 i가 기하학 해석학 등의 여러 분야의 개념들을 통합하는 역할을 한다는 사실에 놀라워했다. 복소수는 대수, 해석, 기하, 수론 등의 수학 내의 다양한 영역에서 문제를 해결하는 적절한 환경을 제공하고 있다(Kleiner, 1988: 588).

> 복소수 체계의 예상치 못한 능력은 실수체계의 완비성과 복소수 체계에서의 덧셈, 곱셈의 조화, 그리고 평면의 기하학에서 비롯된다. 하나의 대상에 그렇게 풍부한 대수적, 기하학적 구조가 동시에 존재한다는 것은 일종의 기적이다 (Stillwell, 1998: 305).

이렇게 기적이라 할 만큼 풍부한 구조를 지닌 복소수이기에 수학의 여러 분야들 사이의 관련성을 보여주는 능력이 탁월한 것이다. 그러나 현재의 복소수 지도가 과연 이러한 측면을 부각시키고 있는지 의문이 든다. 최근에 수행된 복소수 지도에 관한 연구의 문제의식도 이러한 우려를 지적하고 있다. 실제로 7차 교육과정에서 복소수 단원은 대폭 축소되었고, 복소수의 대수적 계산만이 형식적으로 지도되고, 복소수와 다른 단원과의 관련성이 사라진 상황이다. 따라서 가뜩이나 형식적인 복소수를 이해하기가 더욱 어려워졌고, 지도의 필요성이 점점 퇴색되고 있다(김정인, 2002; 김순이, 1999; 김홍기 · 이종철, 2007). 선행연구 대부분은 복소수의 형식적인 계산에만 머물고 있는 현행 복소수 지도의 문제점을 지적하고 그 대안으로 순서쌍으로 복소수 도입(김홍기 · 이종

* 서울대학교 대학원, 2donghwan@paran.com

철, 2007), 극형식 표현(김순이, 1999; 고민지, 2000) 등 복소수의 기하학적 해석을 소개하고 있다. 이는 복소수의 풍부한 구조 가운데 대수와 기하의 관계가 학교수학 수준에서 지도하기에 적절함을 시사한다. 그러나 선행연구들은 복소수가 평면 위의 점과 일대일 대응한다는 사실에 비추어, 복소수의 시각적인 표현에 주목하고 그러한 기하학적 표현을 도입하자는 주장에 머물고 있다. 즉, 7차 교육과정 이전의 복소평면 단원의 회복만을 주장하는 데 그치고 있다.

본 논문은 복소수가 평면 위의 점과의 일대일 대응한다는 표면적인 사실에 만족하지 않고, 복소수의 연산이 평면 기하학의 닮음변환과 맺고 있는 본질적인 관계를 살펴보고, 복소수가 보여주는 대수와 기하학의 관계를 수학적으로 분석한다. 복소수 대수와 기하학의 표면적인 대응을 넘어서는 이러한 본질적인 관계를 학교수학에 접목하기 위한 방법을 찾고자 역사적 분석을 하였다. 그 결과 복소수가 등장하기 전인, 17세기의 수학자 Viete의 직각삼각형에 대한 대수적 연산에서 복소수 대수와 관련된 측면을 발견하였다. 이러한 분석을 바탕으로, 학교수학에서 복소수의 기하학적 해석의 지도 가능성과 그 의미를 논의하고자 한다.

Ⅱ. 대수와 기하의 밀접한 관계를 보여주는 복소수

수학자들은 복소수의 중요성을 대수라는 한정된 영역에서 찾지 않았다. Stillwell(1989: 188)에 의하면,

> 복소수 $a+b\sqrt{-1}$은 처음에 등장했을 때 '불가능한 수'로 간주됐으며, 삼차방정식의 풀이 공식에서 쓸모 있었기 때문에 제한된 대수영역에서만 용인됐다. 그러나 그것의 중요성은 기하학적으로 밝혀졌고, 궁극적으로는 대수적 함수, 등각사상, 퍼텐셜 이론, (또 다른 불가능한 영역인)비유클리드 기하학 등을 통합하기에 이르렀다. $\sqrt{-1}$의 역설에 대한 (기하학적) 분석은 대단히 강력하고 예기치 못했으며 아름답기 때문에 '기적'이라는 단어만이 그것을 묘사하는 데 적절한 것으로 보인다.

대수적 기원의 복소수에 기하학적 해석이 가능해진 것은 '기적'이라 부를 정도였다. 역사적으로도 그러한 '기적'에 의해 복소수는 마침내 유용한 수학적 대상으로 용인되었다. 더 나아가 Needham(1997: 27)은 "우리가 복소'수'를 피하려 아무리 노력하더라도, 복소'평면'의 기하학은 절대 피할 수 없다."고 하였다. 복소수가 이렇게 대수와 기하학 사이의 매개가 되면서, 그동안 별개로 있던 수학의 여러 개념들이 서로 관련을 맺기 시작하였다. 오늘날 복소수는 매우 다양한 곳에서 사용되는데, 이는 모든 복소수의 대수적 기원과 기하학적 해석의 관계에서 비롯된 것이다(UCSMP, 1998: 471).

그럼 대수적 기원의 복소수에 기하학적 해석이 가능한 '기적'이 일어나게 된 근본적인 이유는 무엇인가? 복소수는 기하학의 본질적인 형식과 맞닿아 있기 때문이다. 유클리드 평면기하를 신중하게 재검토하면서, 복소수가 매우 자연스럽게 그리고 불가피하게 기하학과 관련되는 이유를 밝혀보겠다.

고대 그리스부터 시작된 기하학의 역사는 매우 길며, 그 동안 뛰어난 발견이 있었지만, '기하학이란 무엇인가'라는 질문을 제기한 수학자는 기하학 시작 후 2000년이 지나서 Felix Klein이 처음이었다(Needham, 1997: 30).

우리는 보통 평면 위의 기하학적 도형의 기하학적 성질에 대한 연구를 기하학이라 말할 것이다. 하지만 '기하학적 성질'과 '기하학적

도형'이란 무엇인가? Klein은 기하학적 성질에 주목하였다. 기하학적 성질과 관련하여, 만약 두 도형이(예, 삼각형) 똑같은 기하학적 성질을 가진다면, (기하학의 관점에서)이들 도형은 '같다', 보통 합동이라고 한다. 따라서 우리가 합동에 대한 명확한 정의를 가지고 있다면, 이 관찰의 순서를 바꿔서, 모든 합동인 도형에 공통인 성질들을 가리켜 기하학적 성질이라고 정의할 수 있다. 그러면, 어떻게 두 도형이 합동인지를 말할 수 있는가? 공간에서 도형F를 움직여서 F'에 일치시킬 수 있는 이동(motion)이 존재하면, F는 F'와 합동이다. 이동할 때, 도형이 단단하게 유지되어야 한다는 (암묵적인)아이디어를 가정하고 있다. 점 사이의 거리가 이동 중에도 변하지 않아야 한다. 우리가 이동이라고 부르는 것은 종종 '강체 이동' 또는 'isometry'라는 용어를 쓴다. 이제 명확해진 이동의 개념으로, 합동의 정의를 내릴 수 있다. 따라서 도형의 기하학적 성질은 그 도형의 모든 가능한 이동에 의해서도 불변인 성질을 의미한다. "기하학이란 무엇인가"의 질문에 Klein은 이동의 집합에서 불변자를 연구하는 것이라고 답했다(Needham, 1997: 32).

이제 유클리드 기하학의 기초를 이해하려면, 그 이동 군을 연구해야 한다. 그런데 이 군은 평면을 자기 자신으로 보내는 거리-보존 사상으로서 다소 추상적으로 정의되었다. 그러나 이동의 구체적인 예를 생각하면 이해하기 쉽다. 임의의 점에 대한 회전, 평면의 평행이동, 한 직선에 대한 대칭이 그것이다. 각의 방향도 보존하는 이동을 직접이동이라 부르면, 모든 직접이동은 회전과 평행이동이다.

우리는 수로 길이를 나타낼 때, 항상 측정단위를 가정하고 있다. 측정단위는 임의적이므로 기하의 정리들은 이 사실을 반영해야 한다. 실제로 유클리드 기하학의 정리들은 단위 선택에 의존하지 않는다. 단위 선택과는 무관한 길이의 비만을 다룬다. 예를 들어, 피타고라스 정리는 길이의 단위가 cm인지 m인지와는 아무 상관이 없다. 유클리드 기하학은 도형의 실제 크기 자체에는 별 관심이 없다. 따라서 강체이동의 관점으로 기하학을 정의하는 것은 너무나 제한된 것이다. 두 도형이 비슷하면 두 도형을 같다고 보아야 한다. 자세히 말하자면, 두 도형 사이에 닮음사상이 있다면 두 도형을 같다고 보아야 한다. 닮음(similarity)은 평면을 자신으로 보내는 거리의 비를 보존하는 사상이다. 닮음의 집합은 군을 이룬다. Klein은 Erlangen 연설에서 유클리드 기하학을 다음과 같이 정의했다. 유클리드 기하학은 닮음 군 아래에서 불변인 기하학적 도형의 성질들에 대한 연구이다 (Needham, 1997: 40).

Klein에 따르면, 기하학은 변환 군을 먼저 선택하고, 그 변환군의 불변자를 연구하는 것이다. 따라서 유클리드 기하학은 닮음(거리의 비를 보존) 군 아래에서 불변인 도형의 성질을 연구하는 것이다. 그런데 각의 방향도 보존하는 닮음은 확대회전이거나 평행이동이다. 그러므로 확대회전과 평행이동이 유클리드 기하학의 가장 기본이 된다. 그런데 놀랍게도 복소수의 곱셈, 덧셈이 바로 확대회전과 평행이동을 표현하고 있는 것이다. 복소수의 곱셈과 덧셈이 평면 기하학의 본질인 강체이동의 형식을 분명하게 보여주고 있다. 따라서 복소수의 기하학적 해석이 가능한 것은 바로 복소수의 연산이 기하학의 본질과 맞닿아 있기 때문이다.

지금까지의 아이디어를 3차원 공간으로 일반화 하면, 또 다른 종류의 수를 발견할 수 있지 않을까? 의 추측이 가능하다. 실제로 19세기 수학자들은 그러한 시도를 하였고 Hamilton이 대표적이다. 그러나 그것이 불가능하다는 것이 밝혀졌고, 바로 그 점이 복소수의 신비와 유용

성을 더욱 빛내준다.

3차원 공간의 기하학도 평면 기하학처럼 생각할 수 있다. (원점을 중심으로 한)확대는 앞에서처럼 정의할 수 있다. 그리고 원점을 기준으로 한 확대회전은 앞의 확대와 원점을 지나는 직선을 축으로 하는 회전의 합성으로 정의할 수 있다. 그러면, 공간의 모든 직접닮음은 확대회전 또는 평행이동이거나 이 둘의 합성이다.

따라서 덧셈은 평행이동의 합성이 되고, 곱셈은 확대회전의 합성이 되는 '공간적인 복소수'가 존재하는가를 묻는 것은 자연스러운 것이다. 덧셈은 가능할 뿐만 아니라 모든 차원에서도 가능하다. 그럼 곱셈은 어떨까?

고정된 원점을 기준으로 하는 확대회전의 집합 Q를 생각해 보자. 곱셈의 정의는 자연스럽게 진행된다. 두 확대회전의 합성 $Q_1 \circ Q_2$는 쉽게 같은 종류의 다른 확대회전 Q_3로 볼 수 있다. 직접닮음은 군을 이루므로 당연한 사실이다. 만약 Q_1, Q_2의 확대비율이 r_1, r_2라면, Q_3의 확대비율은 분명히 $r_1 r_2 = r_3$이다. 그리고 Q_1, Q_2의 회전으로부터 Q_3의 회전을 작도할 수 있다. 그러나 평면에서의 회전과는 다르게, 공간에서는 두 회전을 수행하는 순서에 따라 차이가 발생한다. 따라서 곱셈은 교환적이지 못하다(Needham, 1997: 44).

$$Q_1 \circ Q_2 \neq Q_2 \circ Q_1$$

우리는 교환법칙이 성립하는 곱셈에 익숙하지만, 위의 연산과 관련하여 모순되는 것은 전혀 없다. 그래서 이것을 '공간적인 복소수' 대수의 결정적 장애라고 볼 수는 없다.

확대회전을 공간의 점(또는 벡터)으로 표현하려 할 때, 바로 근본적인 문제가 발생한다. 복소수 곱셈과 유사하게, 우리는 $Q_1 \circ Q_2 = Q_3$라는 방정식을 확대회전 Q_1이 점 Q_2를 점 Q_3로 사상시키는 것으로 해석하고 싶지만[1], 이는 불가능하다. 공간에서 점의 위치를 결정하는 데에는 3가지 수가 필요하지만, 확대회전을 결정하는 데에는 4가지 수가 필요하다. 확대를 나타내는 수 1개, 회전각을 나타내는 수 1개, 그리고 회전축의 방향을 나타내는 수 2개가 필요하다. 3차원 공간에서 점을 표현하는 데 필요한 수로는 확대회전이라는 조작을 표현할 수 없는 것이다. 이러한 이유로 3차원 이상의 공간에서는 복소수의 대응물을 발견할 수 없는 것이다.

3차원의 복소수 대응물을 발견하는 데 실패했지만, 3차원 공간의 확대회전인 4차원의 이동 Q는 발견하였다. Q의 원소를 사원수라 부른다. 이들 원소는 4차원의 점 또는 벡터로 그려질 수 있다. 이렇게 사원수로의 일반화를 보면, 실수의 순서쌍인 복소수가 평면의 점을 표현하기 보다는 평면의 이동을 표현한다고 보는 것이 적절하다. 복소수가 단지 고정된 위치를 차지하는 수로 해석되지 않고, 이동이라는 변환으로 해석될 수 있기에 복소수가 수학의 여러 영역에서 엄청난 응용력을 가질 수 있는 것이다. 3차원 이상의 공간에서 복소수의 대응물을 발견할 수 없다는 점에서 다시 한 번 복소수의 중요성을 강조할 수 있다.

'2'-차원 '공간 속에' 있는 점을 '그 공간에 작용하는' 기본적인 유클리드 변환으로 해석할 수 있다는 점에서 우리는 2차원 공간의 독특한 특성을 찾아볼 수 있다(Needham, 1997: 44). 바로 그 독특한 특성을 복소수가 보여주기 때문에, 복소수는 대수와 기하학의 본질과 그 관계를 분명하게 밝혀줄 수 있는 것이다.

1) 복소수는 평면위의 점이면서 동시에 확대회전을 나타낸다.

Ⅲ. 교육적 논의

앞서 살펴본 바와 같이 복소수가 단지 상상의 수가 아니라 기하와 실제적인 관계를 맺고 있는 현실의 대상 이라면, 수학사를 통해 보다 일찍 그 모습을 독립적으로 찾아볼 수 있을 것이다. 강현영, 이동환(2007)은 Viete의 직각삼각형에 대한 연산이 복소수의 곱셈 및 나눗셈 연산과 일치한다는 사실을 밝혔고 본 절에서는 이에 착안하여 기하학적 측면에서 복소수의 지도가능성을 논의하겠다. 우선 기존의 복소수 지도가 간과한 측면과 그에 따른 지도의 어려움을 논의하고, 본 논문의 제안이 그 어려움을 극복할 수 있음을 보이고자 한다.

1. 복소수 지도의 어려움

7차 교육과정에서 복소수 영역이 축소된 것에 볼 수 있듯이, 복소수 지도를 대수롭지 않게 생각하는 경향이 있다. Sfard는 한 수학자와의 일화에서 이러한 경향을 잘 표현하고 있다.

> 몇 해 전, 한 수학자와의 대화에서 필자는 간단해 보이는 복소수 아이디어를 이해하지 못하는 학생에 관한 이야기를 꺼냈다. 그 수학자는 그 내용이 본질적으로 어렵다는 주장을 받아들이지 않았다. 그는 학생의 능력 부족이나 해당 주제의 어려움이 아니라 교사가 무능해서 그렇다고 말했다. 필자는 심각한 장애물이 있다고 주장하고 여러 가지 증거를 제시했다. 결국 그 수학자는 포기하는 듯 보였다. "그렇군요. 생각보다 복잡한 문제가 있는 것 같네요" 그러나 잠시 생각한 후 이렇게 말했다. "좋아요. 어렵습니다. 하지만 나는 그 학생을 금방 이해시킬 수 있어요. 그냥 복소수체의 공리를 쓰고 그 개념이 잘 정의되었음을 보이면 됩니다." (Sfard, 1994: 248)

수학자들이 논란이 생긴 개념에 순응하게 되면, 그들은 그 전의 논쟁들을 완벽하게 무시하는 경향이 있다. 앞의 대화처럼, 현대의 수학자들에게 복소수는 매우 간단한 개념이다. 교사들 역시 쉬워 보이는 개념에 대해 학생들이 가지는 심각한 어려움에 둔감하다. 복소수의 곱셈 $(a+bi)(u+vi)=au-bv+(av+bu)i$은 단지 i를 문자로 보고 전개를 한 다음 $i^2=-1$ 을 대입하면 되므로 어려울 것이 없다는 것이다. 여기서 학생들과 교사들의 단절이 생긴다. Sfard(1994)에 따르면, 교사와 학생은 서로 의사소통할 수 없다. 왜냐하면 그들이 비록 서로 같은 말과 수식을 사용할지라도, 그들은 양립할 수 없는 수학적 세상에 살고 있고 서로 다른 규칙을 따르고 있기 때문이다. 수학자들은 수 개념을 존재하게 만들었던 기본적인 양의 은유를 포기해야 했다. 또한 수학자들은 논리적인 무모순에 기반하여 새로운 대상을 도입하는 권리를 가진다는 점을 인정해야 했다. 교사는 이미 이러한 인식론적인 가정을 수용하고 있지만, 학생은 그렇지 않다. 복소수 대수조작만을 지도하는 과정에서 학생들이 이러한 인식론적인 전환을 경험하기는 거의 불가능하다. 복소수를 이해하기 위해 우리는 인식론적인 변화를 겪어야 한다. 이미 그러한 변화를 겪은 교사는 복소수 개념을 쉽게 생각하고 학생들에게 복소수의 대수적인 조작만을 가르치기 쉽다. 능숙한 대수적 조작이 곧 복소수에 대한 이해를 보장한다고 생각하고, 그럴수록 교사와 학생의 단절은 심화된다.

Atiyah는 괴테의 파우스트와 비교하여, 수학에서 대수의 힘과 위험성을 흥미롭게 지적하고 있다.

> 악마는 수학자에게 대수를 제안한다. 악마는 이렇게 말한다. 모든 의문에 답을 주는 강력한 기계를 주겠다. 대신 너는 네 자신의 영혼을 나에게 주면 된다. 기하학을 포기하면 이 놀라운 기계를 얻게 될 것이다. [...] 대수적 계산에 집중하

> 는 순간 우리는 생각을 멈추게 된다. 우리는 기하학적으로 생각하기를 멈추는 것이고, 의미를 생각하는 것을 멈추는 것이다. (Atiyah, 2002, 7)

현재의 복소수 지도는 이러한 악마의 달콤한 제안에서 크게 벗어나지 못하고 있다. 그렇다고 커다란 유용성을 지닌 대수라는 기계를 악마에게 돌려줄 수도 없다. 우리는 대수와 기하학의 관계를 새롭게 생각할 필요가 있다. 대수와 기하학은 서로 상대방의 구조를 품고 있는 씨앗을 지니고 있다. 우리는 그 씨앗을 발견하고 싹 틔울 수 있는 유추라는 귀중한 능력을 가지고 있다.

> 모든 수학자들이 알고 있듯이, 두 이론 사이에서 이루어지는 모호한 유추와 희미한 반성만큼 수학을 풍성하게 만드는 것은 없다. 은밀한 어루만짐과 설명할 수 없는 어긋남이 연구자에게 커다란 발견의 기쁨을 준다. 환상이 사라지는 순간, 예감은 확신으로 바뀐다. 두 이론은 사라지기 전에 그들의 공통점을 드러낸다. Gita가 가르쳐주듯이, 앎과 차이 없음은 동시에 이루어진다. (Andre Weil; Mazur, 2003: 205 재인용)

Viete의 직각삼각형 연산에서 우리는 복소수 계산이라는 대수의 싹을 희미하게 볼 수 있었다(강현영, 이동환, 2007). 이러한 유추가 매우 유용하여 더 이상 피할 수 없을 때, 수학자들은 유추가 동치가 되는 커다란 구조를 만들어 낸다. 학생들이 복소수의 대수와 직각삼각형의 기하학 사이에 차이가 없음을 인식하는 순간이 바로 앎에 다가가는 순간이다. 다음 절에서 학생들이 이러한 순간을 경험할 수 있는 구체적인 방안을 제시하겠다.

2. 기하학적 측면에서 복소수의 지도방안 탐색

앞의 수학적 분석은 복소수 대수와 유클리드 기하의 밀접한 관련성을 보여주어 복소수의 기하학적 해석에 정당성을 부여할 뿐만 아니라 교사들에게는 복소수의 놀라운 특성을 감상하는 계기가 될 수 있다. 복소수는 평면의 점을 표현하기 보다는 평면의 이동을 표현한다고 보는 것이 적절하다. 2차원 평면에서는 점의 위치를 표현하는 복소수가 동시에 그 점의 이동까지 표현할 수 있다. 3차원 공간에서는 이 두 가지를 동시에 할 수 없기 때문에 사원수가 등장하였고, 실제로 사원수로 3차원 공간의 이동을 표현할 수 있다. 학교수학에서는 사원수를 다루지 않지만, 이 논의는 교사에게는 큰 시사점을 제공한다. 복소수가 단지 평면 위의 점과 대응한다는 사실에 비추어 복소수의 기하학적 해석을 정당화하려는 시도는 복소수 $a+bi$와 평면의 점 (a, b) 사이의 표현의 유사성에 호소하는 것이다. 이 상황에서 복소수의 연산은 신비한 규약일 뿐이다. 그러나 중요한 것은 복소수의 덧셈과 곱셈 및 나눗셈이 임의적이지만, 그것을 단순히 규약으로 치부해서는 안 된다는 사실이다. 복소수의 대수는 유클리드 평면 기하의 본질적인 변환과 관련되어 있다는 사실을 인식해야 한다. 3차원 이상의 공간에서는 점의 좌표를 표현하는 변수로는 그 공간의 변환을 표현할 수 없다는 사실에서, 2차원 유클리드 평면의 특성이 더욱 두드러진다. 또한 3차원 이상의 공간에서는 복소수와 같은 대수 체계를 볼 수 없다는 점에서 복소수의 놀라운 특성이 다시금 빛을 발한다. 이러한 사실을 아는 교사와 모르는 교사의 차이는 결코 작지 않을 것이다.

> 효과적으로 가르치기 위해 교사는 반드시 자신의 과목에 대한 이해를(feeling) 발전시켜야 한다. 만약 자신이 알지 못한다면 학생들이 알게 할 수도 없다. 그에게 열의가 없다면 학생들에게 나누어줄 열의 역시 없는 것이다. 주장의 내

용만큼 주장을 하는 방법도 중요하다. 교사는 그 과목을 중요하다고 생각해야만 한다. (Polya; Kleiner, 1988: 591에서 재인용)

앞의 수학적 분석을 학생들에게 바로 전달할 수는 없을 것이다. 그러나 이것이 교사들에게 복소수 지도의 열의를 불어넣을 수는 있을 것이다. 열의에 찬 교사라면 스스로 훌륭한 지도 방법을 고안할 수 있겠지만, 먼저 그러한 열의를 가진 입장에서 수학사의 분석을 통해 한 가지 지도방법을 발견하였다.

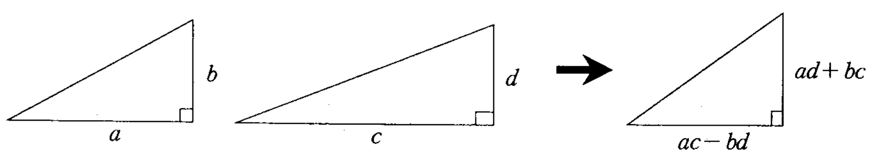
Viete가 정의한 직각삼각형의 연산이 복소수의 기하학적 해석에 주는 교육적 시사점을 논의하겠다. 역사적으로 복소수는 3차방정식 근의 공식에서 즉, 대수적 풀이법에 대한 일반적인 타당성을 확립하려는 필요로부터 그 존재가 드러났다. Freudenthal은 음수지도를 논의하면서 그러한 타당성은 기하의 맥락에서 확고해진다고 언급했다.

수 연산과 그것의 법칙은 기하학적 도형과 관계를 대수적으로 서술하는 것이 간단하다는 사실에 의해 정당화된다. 즉, 대수는 그것이 기하에서 기능하기 때문에 타당하다. 지금까지 이러한 통찰이 알려지지 않았다는 것이 이상한 일이다. 내 생각에, 학습자가 연산과 그 성질의 타당성을 받아들이지 않을 수 없도록 확신시키는 것이 대수지도의 목표 중의 하나이다. 학생을 확신시키는 가장 방법은 그에게 기하에서 대수의 조작성을 보여주는 것이다. [...] 여기서 기하는 공리적 구조를 뜻하는 것이 아니라 시각적으로 분명한 것, 어떠한 설명 없이도 분명하게 인식할 수 있는 것이다(Freudenthal, 1983: 433).

학생들에게 직각삼각형은 어떠한 설명 없이도 분명하게 인식할 수 있는 익숙한 도형이며, 게다가 피타고라스 정리에 의해 대수적 계산과 밀접한 관계를 맺고 있는 도형이다. 학생들이 알고 있는 도형 가운데 대수적 조작 가능성이 가장 큰 도형이 직각삼각형이다. Diophantus의 항등식 $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ 은 발견은 어렵겠지만, 그 증명은 매우 간단하다. 그리고 Viete의 직각삼각형 연산의 성질을 이해하기 위해서는 닮음 도형과 일차함수의 기울기에 대한 지식이 필요하다. 이는 7차 교육과정에서 복소수가 도입되는 10단계 과정에서 이미 학습을 가정하고 있는 지식이다.

우선 Diophantus의 항등식에서 직각삼각형을 연상할 수 있어야 한다. [그림 III-1]의 두 직각삼각형을 본다면, Diophantus의 항등식에서 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 이 두 직각삼각형의 빗변의 제곱을 서로 곱한 것임을 알 수 있다.

그럼 자연스럽게 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$에서 새로운 직각삼각형(빗변의 길이 $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$)을 연상할 수 있다. 예를 들어보면 이해하기가 쉬울 것이다. 밑변과 높이가 각각 (7, 1) 과 (3, 1)인 두 직각삼각형을 그려본다. 두 직각삼각형의 빗변은 각각 $\sqrt{50}$과 $\sqrt{10}$이다. Diophantus의 항등식을 사용하면 $(7^2+1^2)(3^2+1^2)=(21-1)^2+(7+3)^2$이다. 여기서 구한 (20, 10)을 직각삼각형의 밑변과 높이로 해석하면, 새로운 직각삼각형의 빗변의 길이는 $\sqrt{(7^2+1^2)(3^2+1^2)}$으로, 그 빗



[그림 III-1]

변은 처음 두 직각삼각형의 빗변의 길이 $\sqrt{50}$과 $\sqrt{10}$을 곱한 것과 같은 $\sqrt{500}$이다. Diophantus의 항등식은 빗변의 길이 사이의 이러한 관계를 항상 보장한다.[2] 두 직각삼각형이 주어졌을 때, 그 두 빗변의 곱을 새로운 빗변으로 하는 직각삼각형을 항상 구할 수 있다. 학생들은 Diophantus의 항등식에서 이러한 관계를 볼 수 있다.

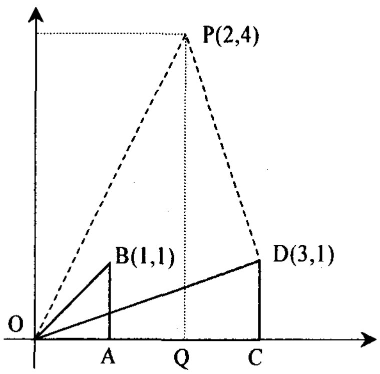
더욱 중요한 것은 Diophantus의 항등식에서 분명히 드러나는 빗변 사이의 관계로 끝나지 않고 그 이상의 관계를 살펴보는 것이다. 즉, 직각삼각형의 밑각들의 관계를 인식해야 한다. 처음 두 직각삼각형의 빗변의 곱이 새로운 직각삼각형의 빗변의 길이와 같다는 사실을 밑각의 관계에 주목하게 되는 도화선으로 삼아야 한다. 그러나 학생들이 밑각사이의 관계를 바로 알기는 불가능에 가깝다. 간단한 예로 그 관계를 예상할 수 있다. 처음 두 직각삼각형의 밑각의 합이 새로운 직각삼각형의 밑각과 같다는 것은 다음의 예에서 확인할 수 있다.

$$(\sqrt{3}^2+1^2)(\sqrt{3}^2+1^2)=(3-1)^2+(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2.$$

밑변과 높이가 $\sqrt{3}$, 1이고 밑각이 $\frac{\pi}{6}$인 직각삼각형 두 개로부터 생성된 직각삼각형은 밑변과 높이가 $(2,\ 2\sqrt{3})$으로, 그 밑각은 두 직각삼각형의 밑각의 합과 같은 $\frac{\pi}{3}$임을 쉽게 확인할 수 있다. 직각삼각형의 변의 길이의 비로 확인할 수 있는 특수각이 제한적이기 때문에, 밑각의 관계를 확인할 수 있는 예가 한정될 수 밖에 없다. 그러나 예가 아무리 많다고 정리가 증명되는 것이 아니다. 구체적인 예는 밑각의 관계를 예상하는 역할을 하면 충분하다. 이제 일반적인 상황을 증명할 단계이다.

Viete는 자신이 소를 수백 마리나 바칠 수 있다고 할 정도로 자랑스러워한 그 정리의 증명을 제시하지 않았다. 그러나 학교수학 수준에서 그 증명을 충분히 재구성할 수 있다. 닮음도형과 일차함수의 기울기에 대한 지식만으로 충분하다. 복소수 대수와 기하의 본질적인 관계에서 닮음변환이 중요한 역할을 했듯이, 앞으로의 증명에서 닮음도형의 성질은 중요한 역할을 한다.

우선 구체적인 예에서 시작한다. 좌표평면 위에 직각삼각형 두 개(△OAB, △OCD)를 그린다([그림 Ⅲ-2]). 앞의 특수한 예에서 이미 두 밑각의 합이 새로운 직각삼각형의 밑각과 같음을 확인했으므로, 이번의 경우에도 그러한 예상을 할 수 있다. Diophantus의 항등식을 풀면[3] 밑변과 높이가 (2, 4) 인 새로운 직각삼각형 △OQP가 나타난다. 이제 $\angle AOB+\angle COD=\angle POQ$ 를 증명하면 된다. 그리고 이것은 $\angle POD=\angle AOB$ 을 증명하는 것으로 충분하다. 따라서 △OAB와 △ODP가 서로 닮음임을 증명하면 된다.



[그림 Ⅲ-2]

2) 그런데 $(3^2+4^2)(1^2+1^2)=(3-4)^2+(3+4)^2$ 에서 볼 수 있듯이, 이 항등식의 결과를 항상 직각삼각형의 변의 길이로 해석할 수 있는 것은 아니다. 이러한 관계는 양수뿐만 아니라 음수에서도 성립하기 때문이다. 중요한 것은 관계이지 그 관계를 구현하는 직각삼각형이 아니다.

3) $(1^2+1^2)(3^2+1^2)=(3-1)^2+(1+3)^2$

<증명>

1) $\overline{OD} \perp \overline{DP}$

$\because$ $\overline{OD}$의 기울기가 $\frac{1}{3}$, $\overline{DP}$의 기울기는 $\frac{1-4}{3-2}=-3$ 이므로 두 직선은 서로 수직이다.

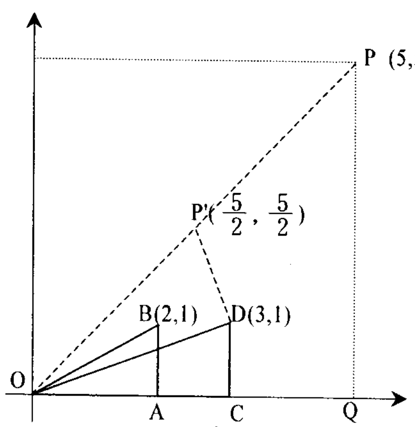
2) $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OD}:\overline{OP}$

$\because$ $1:\sqrt{2}=\sqrt{10}:\overline{OP}$, $\overline{OP}=\sqrt{20}$

따라서 △OAB와 △ODP는 서로 닮음이다.

특히, 위 증명 가운데 $\overline{OP}=\sqrt{20}=\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ 는 새로운 직각삼각형의 빗변의 길이가 주어진 두 직각삼각형의 빗변의 곱과 같음이 분명히 드러난다. 이 증명의 아이디어는 두 직각삼각형 중에 한 직각삼각형의 빗변 위에 다른 직각삼각형과 닮음인 직각삼각형을 작도한다는 점이다. 이렇게 점 P를 구하면 $\angle POQ$ 는 주어진 두 직각삼각형의 밑각의 합과 동일하게 된다. 위 증명은 바로 이 점 P를 Diophantus의 항등식으로부터 구할 수 있다는 것을 보여준 것이다.

사실 위 증명에는 약간의 속임수가 숨어있다. 주어진 두 직각삼각형 중 어느 하나도 밑변의 길이가 1이 아니라면, $\overline{OP}=\overline{OB}\times\overline{OD}$ 가 되는 그 점이 닮음을 통해 작도한 직각삼각형의 점과 일치하지 않는다. 그러나 약간의 수정만 가하면 동일한 증명을 할 수 있다. 밑변의 길이가 1이 아닌 두 직각삼각형의 경우를 살펴보자.



[그림 Ⅲ-3]

Diophantus의 항등식 $(2^2+1^2)(3^2+1^2)=(6-1)^2+(2+3)^2$으로 생성되는 직각삼각형은 위 [그림 Ⅲ-3]과 같이 (5, 5) 이다. 그러나 이 경우 △OAB와 △ODP는 서로 닮음이 아니다. 그래도 여전히 $\angle POD=\angle AOB$는 성립한다. △OCD의 빗변 위에 △OAB와 닮음인 직각삼각형을 작도해야 하는데, 그 작도의 결과가 앞의 경우와 다르게 이번에는 Diophantus의 항등식에서 구한 (5, 5)와 일치하지 않는다. 그러나 작도한 점 P' 은 직선 OP 위에 있기 때문에 $\angle POD=\angle AOB$ 또한 성립한다. 여기서 P' 을 우연히 찾아낸 것은 아니다. 닮음을 이용하여 $\overline{OP'}$ 을 구하는 과정을 보면 알 수 있다. △OAB와 △ODP' 은 닮음이므로 $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OD}:\overline{OP'}$. 따라서 $2:\sqrt{5}=\sqrt{10}:\overline{OP'}$, $\overline{OP'}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}$. 즉, $\overline{OP'}=\frac{1}{2}\overline{OP}$ 이다. 앞의 비례식과 다른 것은 처음 직각삼각형의 길이가 2 라는 점이다. 이것이 $\overline{OP'}=\frac{1}{2}\overline{OP}$ 의 계수 $\frac{1}{2}$을 만든 것이다.

따라서 증명 아이디어는 앞의 경우와 동일하다. 한 직각삼각형의 빗변 위에 다른 직각삼각형과 닮음인 직각삼각형을 작도하고, 단지 그 작도한 직각삼각형의 빗변을 연장하면 Diophantus의 항등식에서 구한 점과 일치하게 된다. 이 때, 빗변의 연장정도는 한 직각삼각형의 밑변의 길이와 동일하다. 새로운 직각삼각형의 밑각은 주어진 두 직각삼각형의 밑각의 합과 동일하다는 성질은 여전히 유효한 것이다.

학생들은 이제 다음 연산의 의미를 이해할 수 있다.

$(x, y)\oplus(u, v)=(xu-yv,\ xv+yu)$,

$(x, y)\ominus(u, v)=(xu+yv,\ xv-yu)$

연산규칙이 왜 꼭 이렇게 되어야 하는가를

알 수 있다. 이러한 연산규칙을 따르면, 아니 오직 이 연산규칙 아래에서만, 주어진 두 직각삼각형으로부터 조건에 맞는 새로운 직각삼각형을 생성할 수 있다. 대수적 연산의 정당성을 기하학에서 확인한 것이다.

> 수 개념이 확장될 때 이루어지는 정신적 활동과 사실들을 의식해야 한다. 왜 다른 방식도 아닌 꼭 이런 방식으로 확장이 일어나는가를 의식해야 한다. 강요의 배경으로서 정의의 임의성이 분명해져야 한다. 이를 얻기 위해 음수는 좋은 기회이다. 실제로 음수의 연산에 대한 규칙은 상대적으로 간단하지만, 꼭 이런 방식으로 음수를 다루어야 한다는 제약은 매우 강하다. (Freudenthal, 1983: 433)

복소수의 곱셈 $(a+bi)(u+vi)=au-bv+(av+bu)i$ 은 단지 i를 문자로 보고 전개를 한 다음 $i^2=-1$ 을 대입한다고 생각하면 쉽다[4]. 이렇게 복소수 곱셈규칙은 간단하다. 그러나 Freudenthal이 지적하였듯이, 그 간단한 규칙을 강요하는 수학적인 제약들은 간단하지 않다. 앞서 수학적 분석에서 드러난 대수와 기하의 관계도 이러한 수학적인 제약 가운데 하나이다. 왜 꼭 이런 방식의 규칙만이 허용되는가를 생각해 볼 기회가 없다면, 복소수의 연산규칙은 의미 없는 기호조작일 뿐이다.

Ⅳ. 요약 및 결론

복소수의 대수적인 조작만을 두고 보았을 때, 그것을 전달하기는 어렵지 않다. 그래서 교사들은 복소수에 대한 학생들의 어려움에 주목하기가 쉽지 않다. 그러나 수학사에서 복소수 수용에 이르는 과정이 순탄치 않았듯이, 복소수는 우리의 인식론적인 변화를 요구한다. 또한 직관적인 뒷받침에 호소하기가 쉽지 않다.

복소수가 평면 위의 점과의 일대일 대응하는 것이 사실이지만, 복소수는 평면의 점을 표현하기 보다는 평면의 변환을 표현한다고 보는 것이 적절하다. 2차원 평면에서는 점의 위치를 표현하는 복소수가 동시에 그 점의 이동까지 표현할 수 있다. 3차원 공간에서는 이 두 가지를 동시에 할 수 없기 때문에 삼원수가 아닌 사원수가 등장하였다. 복소수의 대수는 유클리드 평면기하의 본질적인 닮음변환과 관련되어 있다. 따라서 복소수의 기하학적 해석은, 점의 표현이라는 정적인 측면 보다는 닮음변환인 평행이동과 확대회전의 역동적인 측면을 드러내는데 초점을 맞춰야 한다. 따라서 본 논문에서는 Diophantus의 항등식에서 시작하여 직각삼각형의 밑각과 빗변을 고려했을 때, 이러한 복소수의 연산이 지니는 역동적인 기하학적 의미가

---

4) 현재 복소수 곱셈 $(x+yi)\times(u+vi)$는 i를 문자로 보고 전개한 결과인 $xu+xvi+yui+yvi^2$에서 $i^2=-1$을 대입하는 것으로 계산한다. 실제로 $i^2=-2$가 되어도 복소수 곱셈은 닫혀있고 결합, 분배, 교환법칙을 만족하므로 대수적으로 의미가 있다. 이러한 방식의 복소수 연산은 문자식 계산단원과 별 차이가 없다. 그러나 기하학적 측면에서 본다면, $i^2=-2$는 곱셈의 의미가 길이와 각과 관련하여 현재의 의미와 다르게 된다. 예를 들어, $(1+i)(1+i)=1+i^2+2i=-1+2i$ 로서 $1+i$가 x축과 45도의 각을 이루는데 그 곱셈의 결과는 x축과 90도의 결과를 이루지 못한다. 즉, i가 현재와 같은 허수축 즉, y축을 뜻하지 못한다. 복소수 연산이 대수에서 완전하게 결정되는 것이 아니라 기하학적 측면이 복소수 연산의 임의성을 보완해주고 있다.

Viete의 직각삼각형 연산은 $i^2=-1$과는 관련 없이 직각삼각형을 조작하는 과정에서 복소수 곱셈과 동일한 규칙을 얻었다. 학생들은 이러한 기하학적 측면의 규칙이 대수적으로 보았을 때, $i^2=-1$과 관련이 있음을 깨달을 수 있다. 또한 이는 복소수를 전혀 사용하지 않았던 과거의 Diophatus의 항등식에서도 그 모습을 찾아볼 수 있는데, 이로서 복소수가 상상속의 의미 없는 대상이 아니라 대수적인 관계를 보다 분명하게 보여주는 수학적 개념으로 인식되는 계기가 된다.

분명하게 드러남을 밝혔다. 또한 Viete의 연산은 음수의 제곱근이라는 상상하기 어려운 수를 가정하지 않은 채, 새로운 연산규칙의 의미를 기하학적 맥락에서 생각해 볼 수 있는 기회가 되었다.

Klein은 복소수 지도에 관한 여러 교과서를 분석하고, 복소수의 기하학적 해석을 강조하는 교과서의 장점을 이야기했다.

> Bardeys Aufgabensammlung[복소수 지도에 관한 교과서]에서 확장의 원리가 표면화되었고, 적절한 시기에 기하학적 해석이 설명되었다. 이 책에서 채택한 관점이 내가 보기에 학교에 가장 알맞은 것 같다. 익숙한 수 개념의 확장으로서 복소수를 설명해야 한다. 신비한 특징들은 피해야 한다. 무엇보다도, 학생들이 복소평면위의 기하학적 해석에 익숙해지도록 해야 한다! (Klein, 1932: 76)

이 처럼 복소수 지도에서 복소수의 기하학적 해석은 필수적이다. 본 논문은 수학적 분석을 통해 대수와 기하의 본질적인 관계를 밝혀주는 복소수의 특성을 살펴보고, 그 결과 복소수의 기하학적 해석의 필연성을 찾을 수 있었다. 그리고 역사적 분석의 결과 Viete의 직각삼각형에 대한 연산이 학교수학 수준에서 충분히 도입할 수 있는 소재라고 판단하였다. Viete의 직각삼각형 연산에서 착안한 복소수 지도방안은 피타고라스 정리, 닮음도형의 성질, 일차함수의 기울기 및 다항식의 전개와 인수분해 등의 수학적 지식을 요구하기 때문에, 현재 10-가 단계에서 지도하는 복소수 단원의 수준에서 충분히 지도할 수 있다. 그러나 각각의 지식을 알고 있는 것이 그것들을 이용하는 증명의 이해를 보장하지는 않는다. 따라서 필자는 우선 예비교사 교육의 단계에서 이러한 내용을 소개하여 가능성을 확인한 후, 실제로 학생들이 이러한 지도방안을 이해할 수 있는가에 대한 구체적인 후속연구가 이루어지기를 제안한다.

참고문헌

강현영 · 이동환(2007). 수학교육에서 상보성. **수학교육학연구, 17**(4), 437-452.

고민지(2000). **복소수 지도에 관한 연구**. 고려대학교 대학원 석사학위논문.

김순이(1999). **복소수의 사칙연산과 일차변환의 연계지도**. 상명대학교 대학원 석사학위논문.

김정인(2002). **시각화를 통한 복소수 지도에 관한 연구**. 안동대학교 대학원 석사학위논문.

김홍기 · 이종철(2007). 제10단계 수학에서 복소수 지도에 관한 연구. **학교수학, 9**(2), 291-312.

Atiyah, M. (2002) Special Article Mathematics in the 20th Century. *Bull. London Math. Soc. 34*, 1-15.

Bashmakova, I. G., & Smirnova, G. S. (2000). *The beginnings and evolution of algebra.* The Mathematical Association of America.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Kleiner, I. (1988). Thinking the unthinkable: the story of complex numbers(with a moral). *Mathematics Teacher, 81*(7), 583-592.

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: arithmetic, algebra, analysis.* NY: Macmillan.

Mac Lane, S. (1986). *Mathematics, form and function.* NY: Springer-Verlag.

Mazur, B. (2003). *Imagining numbers.* NY: Farrar straus giroux

Needham, T. (1997). *Visual complex analysis.* NY: Oxford University Press.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery.* NY: John Wiley & Sons.

Sfard, A. (1994). *Mathematical practices, anomalies and classroom communication problems.* In P. Ernest (Ed.), Constructing mathematical knowledge. (pp. 248-273).

SMSG (1959). *Mathematics for high school, intermediate mathematics (part 2): commentary for teachers.* CA: Stanford University. preliminary edition.

Stillwell, J. (1989). *Mathematics and its history.* NY: Springer-Verlag.

Stillwell, J. (1998). *Numbers and geometry.* NY: Springer.

UCSMP (1998). *Precalculus and discrete mathematics.* IL: Scott Foresman. 2nd edition.

A Study on Possibility of Teaching Complex Numbers from Geometric Aspect

Lee, Dong Hwan (Seoul National University, Graduate School)

In the 7th-curriculum, only basic arithmetics of complex numbers have been taught. They are taught formally like literal manipulations. This paper analyzes mathematically essential relations between algebra of complex numbers and plane geometry. Historical analysis is also performed to find effective methods of teaching complex numbers in school mathematics. As a result, we can integrates this analysis with school mathematics by help of Viete's operations on right triangles. We conclude that teaching geometric interpretation of complex numbers is possible in school mathematics.

* **Key words** : complex numbers(복소수), geometric interpretation of complex numbers(복소수의 기하학적 해석), Viete's operations on right triangles(비에트의 직각삼각형 연산)

논문접수: 2008. 1. 12
심사완료: 2008. 2. 14