

수학적 지식의 구성에 관한 연구¹⁾

우 정 호* · 남 진 영**

본 논문에서는 수학적 지식의 구성에 대한 구성주의자들의 설명이 안고 있는 문제점을 드러내고, 이를 보완할 수 있는 방안을 모색하고자 하였다. 이를 위해 마음의 중층구조의 틀로 지식의 구성 능력과 구성 작용 간의 관계를 고찰하고, 수학적 지식의 구성은 수학적 지식이 반영하는 실재로서의 위층의 마음을 경험하고 드러내는 일로 규정하였다. 구조주의와 구성주의의 대립과 관련을 성리학에서 주리론과 주기론의 대립과 관련에 비추어 논하고, 수학적 지식의 구성은 수학적 지식의 구조를 구성하는 것이어야 함을 논하였다. 수학적 지식의 구조의 구성이 구체적으로 어떤 과정을 통해 이루어질 수 있는가 하는 문제에 답하기 위하여 본 논문에서는 플라니의 인식론을 고찰하고, 수학적 이론과 역사-발생적 원리, 수학적 사고 수준 이론을 수학적 지식의 구조의 구성 과정에 대한 이론으로 재해석하였다. 끝으로, 수학적 지식의 구조의 구성을 위한 학생과 교사의 자세와 역할에 대하여 논의하였다.

1. 서 론

구성주의는 1980년대 말 이후 다양한 양상으로 우리나라를 비롯한 전 세계의 수학교육에 영향력을 행사하고 있는 이론이다. 구성주의의 관점에서 수학적 지식은 오류 가능하고 변화할 수 있으며, 개인의 수학적 지식 획득은 객관적인 실재의 표상이 아니라, 환경과의 상호작용을 통하여 주관적으로, 또는 사회적 합의를 통해 구성하는 것이다. 구성주의는 그 관심 영역과 강조점에 따라 주장이 매우 다양하므로, '수학적 지식의 구성'의 의미와 과정에 대한 깊은 논의를 위해서는 논의의 대상의 범위를 한정할 필요가 있다. 이에 따라 본 논문에서는 글라저스펠트(Ernst von Glasersfeld)의 이론과, 그와 함

께 연구하였던 스테피(Leslie P. Steffe)와 콕(Paul Cobb), 그리고 어네스트(Paul Ernest)의 주장에 초점을 맞춘다. 글라저스펠트와 스테피는 개인의 지식 구성에 관심을 둔 반면 콕과 어네스트는 지식의 생성 과정에서의 사회적 요인을 강조하였다. 이에 따라 전자는 급진적 구성주의, 후자는 사회적 구성주의로 불리고 있다.

구성주의의 기본 원칙은 지식은 수동적으로 받아들여지는 것이 아니라 인식 주체에 의해 능동적으로 구성된다는 것이다. 수학적 지식을 구성한다는 것은 무엇을 의미하는가? 이것이 의미하는 바를 치밀하게 분석한 연구는 상대적으로 적으며, 그러한 시도를 한 연구들도 대체로 구성주의 자체보다는 배경 이론에서 그 의미를 찾고 있다(강홍규, 2004; 임재훈·홍진곤, 1998; Hsueh, 1997). 이 문제에 대한 논의에는 수학적

* 서울대학교, wjh@plaza.snu.ac.kr

** 영신고등학교, myjynam@naver.com

1) 이 논문은 남진영의 박사학위 논문을 요약한 것임

지식의 본질과 특성이 고려되어야 한다. 구성 대상이 없는 구성은 있을 수 없기 때문이다. 그러나 ‘수학적 지식’과 ‘구성’의 의미를 관련지은 구성주의자들의 논의는 거의 없다. 이와 같은 상황에서 구성주의자들의 주장의 모호성과 혼란스러움에 대한 비판(임재훈, 1999; Hsueh, 1997; Freudenthal, 1991)이나, 구성주의를 수학교육에서 구현하는 방안에 대한 수학교육자들 간의 합의의 어려움(Steffe & Wiegel, 1996)은 당연한 현상이라 할 수 있다. 이와 같은 문제의식 하에 본 논문에서는 수학적 지식을 구성한다는 것이 무엇을 의미하는지에 대하여 연구하였다. 구체적으로, 이것은 다음 세 가지 문제로 세분되어 논의된다. 구성주의자들은 수학적 지식의 구성을 어떻게 설명하는가? ‘수학적 지식의 구성’에 관한 구성주의의 설명은 어떤 문제점을 지니고 있는가? 수학적 지식의 구성에 대한 구성주의의 문제점은 어떻게 보완될 수 있는가? 이 문제들은 다시 지식 구성의 능력과 구성 작용, 수학적 지식의 본질, 그리고 구체적인 수학적 지식의 구성 과정으로 세분되어 논의된다.

II. 구성주의와 수학적 지식의 구성

1. 구성주의의 배경이론과 수학적 지식의 구성

칸트의 선험 철학, 피아제의 발생적 인식론, 그리고 비고츠키의 심리학은 구성주의자들에 의해 빈번하게 인용되는 이론이다. 칸트는 인간의 모든 인식은 경험과 함께 시작된다고 생각하였다(B1²). 인간이 인식할 수 있는 것은 감각 인상이 허용하는 물리적인 세계뿐이며, 감각을

통해 들어온 감각은 그 자체만으로는 무의미하고 중립적인 자극에 불과하다. 이 자극에 의미와 해석을 부여함으로써 인식이 이루어진다. 칸트는 이것을 설명하기 위해 인식의 선험적 조건으로서 ‘아프리오리(a priori)’를 상정하였다. 아프리오리는 인식이 일어나기 위하여 인식 주체에게 갖추어져 있다고 보는, 인식이 일어나기 위한 논리적 가정이자 주관적 형식으로, 인간 마음 안에 이념으로 깃들여 있는, 전통적 형이상학에서 추구하였던 ‘실재’ 또는 ‘본체’에 해당한다(신춘호, 2005:4). 칸트의 철학에서 경험에 대한 마음의 작용은 ‘구성적 원리(이념을 통하여 개념을 획득하는 작용)’와 ‘규제적 원리(개념을 통하여 이념이 획득되는 작용)’로 설명될 수 있다(Ibid.). 그러나 아프리오리만으로는 세계 자체에 대해 알 수 없다. 인간의 인식은 세계가 그 자체를 우리에게 현상으로 보여주어야 가능하다. 이 역할을 하는 것이 ‘물 자체’이다. ‘물 자체’는 일체의 현상과 경험을 초월하는 개념으로, 객관적 실세계의 본질에 해당하며, 인간이 경험할 수 있는 ‘자료’를 제공한다. 이로 인해 주관적 인간 경험이 ‘객관적 타당성’을 갖게 되므로, 이는 아프리오리와 함께 경험의 필연적 전제조건이다(Campbell, 2002).³⁾ 칸트의 철학에서 수학적 판단은 선험적 종합 판단으로, 감각과 지성의 결합, 곧 직관과 개념의 결합에 기초한 인식활동을 가장 분명하게 드러내 준다. 예컨대, “직선은 두 점 사이의 가장 짧은 선이다(B16)”라는 명제는 종합 명제이다. 직선에서 ‘곧다’라는 개념은 質만 포함하며, ‘가장 짧은’이라는 개념은 양적 개념으로 직선이라는 개념에서 이끌어 낼 수 있는 것이 아니라, 부가된 것이므로 직관의 보조를 매개로 해서만 종합이 가능하다.

2) 본 논문에서 칸트의 『순수이성비판』의 인용은 판례대로 A판과 B판을 구분하여 번호와 함께 제시하였다.

3) 그렇기 때문에 캠벨은 칸트를 객관주의자, 정초주의자, 본질주의자로 보아야 한다고 하였다(Campbell, 2002).

피아제는 칸트의 철학을 심리학에 적용하여 (Hamlyn, 1990), 개인의 인지 구조의 심리적 발달 과정, 특히 발달의 필연적 성격을 말하였다. 피아제에 의하면, 아동은 어떤 대상에 대한 정적인 '본'을 갖는 것이 아니라 환경과 상호작용하며 능동적 활동을 통해 지식을 구성한다. 이때 인간이 환경과 상호작용할 수 있는 '적응 기능'과, 상호작용하며 자신의 인지 구조를 변화시켜 나가는 '조직 기능'은 본능과도 같은, 생득적인 것이다(Ibid.:99). 피아제의 이론에서 지능과 지식의 본질은 내면화된 가역적 행동인 '조작'이다(우정호, 2000:233). 행동과 조작을 가능하게 하고, 일반화할 수 있게 하는 '행동과 조작의 일반적 구조'를 피아제는 스펜(schème)이라고 하였다. 기본적인 스펜은 생득적, 선천적 구조이며, 이후 환경과의 상호작용에 의해 분화, 조정, 재구성되면서 조작적 스펜으로 된다. 지적 활동은 내면화된 행동 곧 조작적 스펜의 작용이고, 지적 발달이나 학습은 이 스펜의 변화이다. 새로운 개념은 외부에서 들어오는 것이 아니라 이전 것의 재구성, 즉 주체 자신의 스펜으로부터 나온다. 이것이 '자발적 발달'로, 피아제의 조작적 구성주의의 핵심이다(Hsueh, 1997; 우정호, 1995). 피아제가 생각하는 지식의 발달은 '행동과 조작의 내적 조정'이므로, 비록 인간 외부에 존재하는 절대적 실재는 가정하지 않지만, 플라톤주의로 분류되며(Beth & Piaget, 1966:301), 이때, '이데아'에 해당하는 것은 주체의 외부가 아닌 내부에 있다. 개인은 행동과 조작의 일반적 조정을 통하여 이에 접근할 수 있다(우정호, 2000:249). 논리-수학적 개념은 생물학적 유기체의 구조를 출발점으로 하여, 감각-운동적 스펜을 거쳐, 구체적인 조작적 스펜으로 재구성되고 활동과 조작의 일반적 조정을 통한 반영적 추상화에 의해 형식적 조작적 스펜으로 나아간다. 수학의 본질은 조작적 스펜이며(우정호, 2000:241),

수학적 지식의 구성은 '결합하기', '순서 짓기', '일대일 대응하기' 등과 같이, 행동과 조작을 조정하는 다양한 근본 방식을 추상화함으로써 이루어지는, 자신의 스펜의 재구성과 자기-인식, 즉, 반영적 추상화이다(Piaget, 1970:19).

비고츠키는 지식과 인간 지능의 기원을 사회·문화에 두면서, 사회 문화적 맥락 안에서 대인간의 상호작용을 통하여 인간의 보편적인 정신적인 능력이 형성되는 원리를 심리학적 관점에서 규명하였다. 비고츠키(1978:84-87)에 의하면, 아동의 정신 기능은 현재 위치한 발달 수준인 '실제 발달수준'과 '잠재적 발달수준'으로 구분된다. 이 두 수준 사이에는 간격이 존재하는데, 이것이 '근접 발달 영역'이다. 실제 발달수준에서 아동은 독립적으로 문제를 해결할 수 있으며, 성인(교사)의 안내와 지도, 또는 보다 능력 있는 아이들과 협동하여 문제를 해결함으로써 잠재적 발달 수준으로 나아간다. 개인 정신기능에는 자연적이고 생물학적으로 발달하는 '초등정신기능'과 사회적인 과정에 기원을 두는 '고등정신기능'이 있다(Vygotsky, 1998:83-85). 초등정신기능은 환경으로부터 오는 자극에 의해 직접적으로 작동되는 기능으로, 자연적이고 생물학적으로 발달하지만, 지각, 주의 집중, 기억, 개념형성, 사고하기, 의식 등과 같은 고등정신기능은 기본적으로 개인의 밖에 사회적인 형태로 존재한다. 개인은 이 기능을 가지고 있는 타인과 언어와 기호를 매개로 상호작용하여 이것을 자신의 내적, 개인적 정신기능으로 전환한다(Vygotsky, 1978:57). 고등정신기능의 발달은 그것을 가지고 있지 못한 사람 안의 낮은 단계의 정신기능이 그것을 획득한 사람과의 상호작용을 통하여 높은 단계로 질적으로 변형하는 적극적인 과정으로, 정신기능의 변형 혹은 재형성이라고 할 수 있는 총체적이고 구조적인 전환의 과정이다(김지현, 2000: 55-61).

고등정신기능은 곧 지식이며, 고등정신기능이 내부로 전환되는 것이 지식의 내면화이다(Ibid.). 이때 매개가 되는 언어나 기호는 사회적, 역사적 진화의 산물이다. 그렇기 때문에 지식의 발달은 역사적, 문화적, 개인적이다. 그러나 비고츠키가 사회적 구성주의자들이 주장하듯이 수학적 지식을 사회나 문화에 상대적인 것이라고 보았다고 하기는 어렵다(Rowlands *et al.*, 2001; 김지현, 2000:65-66; Confrey, 1995).

이상에서 살펴본 구성주의의 배경이론들은 모두 지식의 구성을 ‘마음의 변화’로 보며, 지식 구성의 선형적 조건을 상정하고 있다. 그러나 급진적 구성주의와 사회적 구성주의는 이들 배경 이론들의 ‘구성’에 관한 일부 설명만 취사선택하여 수용할 뿐, 이들 이론의 설명이 기초하고 있는 지식 구성의 선형적 조건은, 적어도 표면적으로는, 받아들이지 않고 있다.

2. 급진적, 사회적 구성주의와 수학적 지식의 구성

가. 급진적 구성주의

급진적 구성주의 관점에서 (수학적) 지식의 구성은 다음 두 원칙을 따른다(Glasersfeld, 1995: 51).

- 원칙 1 지식은 감각이나 의사소통을 통하여 수동적으로 받아들여지는 것이 아니라 인식 주체에 의하여 능동적으로 구성된다.
- 원칙 2 인식의 기능은 생물학적 의미에서 적합; 또는 존속가능성을 지향하며 적응하려는 것으로, 인식은 객관적 존재론적 실재를 발견하는 것이 아니라 주체의 경험적 세계를 조직하는 것이다.

급진적 구성주의의 ‘구성’의 의미를 슈미트(Schmidt, 1995:10, 21-29)는 다음과 같이 설명한

다. 원칙 2에 의하면, 세계는 이를 감지하고, 해석하고, 의미를 부여하는 인간의 인식 활동에 의해서만 존재한다. 체계(인간의 인지구조)는 관찰에 의해 세계를 파악하고, 이때 관찰을 가능하게 하는 구분의 단위는 세계 안에 있는 것이 아니라 관찰자 내부에 있다. 인식 주체는 부여된 대상의 이미지를 그대로 받아들이는 것이 아니라, 세계에 像을 부여한다. 이 상은 인식 주체의 생물학적 한계와 그가 속한 사회문화적 한계, 그리고 그의 경험들에 의해 지배된다. 감각기관을 통하여 전하여진 자극은 인지구조가 해석과 의미를 부여하며 자기의 내적 일관성에 의해 구성해 간다. 즉, 어느 것도 드러남 없는 폐쇄적인 체계 안에서 그 내부의 법칙에 따라 이루어지는 일이 구성이다. 이 폐쇄적 체계는 인식 주체의 마음(정신)이다. 경험(지식)의 구성은 인간의 마음에서 일어나는 일이고, 구성은 비록 경험을 통해 이루어지지만, 그 결과는 다시 인간의 마음이다. 구성 전과 구성 후 마음에 드나드는 것은 하나도 없다. 구성은 마음의 작용이고, 마음의 변화이다. 이 설명은 구성주의의 핵심을 자발적 발달이라고 본 슈에(Hsueh, 1997:3)의 관점과 일치한다. 문제는 이것이 구성주의의 핵심임에도 불구하고 구성주의자들이 이를 정교화하지 않은 것이다(Ibid.:2-3; Schmidt, 1995:9).

구성주의자들의 이러한 생각 속에는 지식을 구성할 수 있는 능력과 틀은 인간이라면 누구나 가지고 있다는 전제가 들어있다. 구체적으로, 글라저스펠트는 지식 구성을 위해서 기억, (기억으로부터의) 재-현(re-presentation), 비교, 유사함과 다름의 판단, 특정한 경험을 선호하는 것 등이 필요하다고 보았다(Glasersfeld, 1996). 이것들은 피아제 이론에서의 동화와 조절의 전제 조건이며, 따라서 모든 인식 유기체에게 필요한 능력들이다. 이것은 곧 경험 세계에서 일

어나는 구성을 설명하기 위해서는 선형적 또는 생득적 능력의 필요성을 받아들이지 않을 수 없음을 의미한다.

글라저스펠트는 지식은 인식 주체의 평형을 세우고 유지하기 위한 도구적인, 적응을 위한, 경험에 의미를 부여하는 개념적 수단이며, 목적 달성에 성공적이었다고 판단되는 개념, 개념구조 및 행동 스킴이라고 하였다(Glasersfeld, 1990b). 지식의 준거는 진리가 아닌 ‘존속가능성’이다. 인간은 자신이 구성하는 세계 이상 알 수 없으므로, ‘객관적 현실’은 없다. 세계에 대한 記述은 상대적일 수밖에 없고, 다른 사람의 지식과 경험에 대해서도 개인적 모델을 구성할 뿐, 개인 간 공유나 간주관적 합의는 가능하지만 ‘같다’고 할 수는 없다(Glasersfeld, 1995:119). 수학은 ‘경험 영역에 있는 추상적 실체(Ibid.:16)’로, ‘인지 주체에 의해 수행되는 추상화 활동의 결과(Ibid.:160)’이며, 인지 주체의 ‘정신적 조각’으로부터 추상되는 개념(Glasersfeld, 1996:311)’이다. 수학은 본질적으로 정신에 속하며, 그 내적 일관성과 확실성도 정신 내부에 있다(Glasersfeld, 1990a).

급진적 구성주의자들의 수학기관은 피아제의 관점과 매우 유사하지만, 객관적 지식마저 부정한다는 점에서 크게 다르다. 이 상대주의 지식관은 그들의 생각을 이해하는 데 상당한 어려움을 준다. 그들이 주장하듯이, 개인마다 갖고 있는 수학적 지식은 같다고 보기 어렵다. 예컨대 수십 년 동안 수학을 공부한 수학자가 가진 스킴과 수학을 이제 배우기 시작한 어린 학생들이 가진 스킴은 경험 현실에서 같을 수 없다. 그러나 같은 수준에 있는 학생들은 어떤가? 이제 막 ‘세기’ 조각을 시작한 두 아동의 스킴은 같다고 볼 수 없는가? 인류사회가(또는 수학자 사회가) 현재 문화유산으로서 공유하는 수학이나 인류 역사를 통한 수학의 발전은 어

떻게 이해할 것인가? 학교수학은 무엇인가? 이 질문들이 중요한 이유는 이것들이 수학을 왜 배워야 하는가와 무엇을 배울 것인가와 같은 수학교육의 근본적인 요소들의 방향을 결정하기 때문이다. 글라저스펠트(1995)는 교육의 목적을 학생들이 모순 없이 스스로 사고하는 능력을 키우는 것과, 현재 최선을 판단하는 행위와 사고방식이 다음 세대에 영속되는 것이라고 한다. 이것은 사회 구성원들 사이에 공통되는 ‘최선을 판단하는 행위와 사고방식’이 존재하며, 이 방식들이 피교육자에게도 의미 있고 유용하다는 것을 가정하지 않으면 성립할 수 없는 논리이다. 더욱이, 구성주의자들의 논의에서 수학교육의 당위성이 의심된 적은 없으며, 오히려 수학적 지식 내의 내재적 동기가 증시됨은(Glasersfeld, 1995:176-192) 개별성과 개인 경험을 강조하는 그들의 주장과 논의 전체 맥락에서 일관되지 않는다.

급진적 구성주의자들이 말하는 수학적 지식의 구성은 ‘반영적 추상화’를 통해 일어나는 인지적 변화로(Steffe & Wiegel, 1996; Glasersfeld, 1995), 이를 위해선 반성이 매우 중요하다. 아동은 자신이 가지고 있던 논리-수학적 기본 구조 안에서 사고하므로, 교사는 학생의 마음속에서 진행되는 것에 관심을 두고, 그들 스스로 개념과 지식을 수정하도록 유도하여야 한다. 급진적 구성주의를 따르는 수업에서는 수학적 지식과 교사, 학생 중, 학생이 가장 중심에 위치하고, 학생의 생각과 아이디어가 수업의 내용과 방향을 결정하는 결정적 요인이 된다.

나. 사회적 구성주의

사회적 구성주의자들에 의하면 수학적 지식은 시대와 사회의 관심을 반영하며, 현재의 이론은 현재의 개인적, 사회적 한계 속에서 구성된 제한적 이해일 뿐, 절대적인 것이 아니다.

수학은 수학적 공동체가 합법적으로 정당화함으로써 수용한, 사회적 구성물로, 이를 구성하는 개념, 방법, 결과, 규칙은 그들이 동의한 수용 절차와 증거를 만족하는 지식이다. 합의의 근거는 언어와 실행의 공유성이다(Ernest, 1998: 135). 언어는 시대와 사회문화에 따라 변하므로, 수학적 지식 역시 절대적으로 확실한, 불변의 진리일 수 없다. 사회적 구성주의의 수학과는 다음과 같이 요약된다.

1. 수학 지식의 기초는 언어적 지식과 관습, 규칙이고 언어는 사회적 구성물이다.
2. 공표된 주관적 수학적 지식이 객관적 수학적 지식으로 받아들여지는 데에는 사회적 절차가 필요하다.
3. 객관성 자체는 사회적인 것으로 이해된다(Ernest, 1991:42).

주관적 지식은 개인의 경험과 논리 및 이론, 그리고 외부와의 상호 작용에 근거하여 개인이 구성하는 것이다. 확장된 개인의 주관적 지식은 사회에 공표된다. 이것은 공표되는 순간 주관적 영역을 벗어나 공적 영역에 들어가고, 학문적 정당화 문맥에서 변증법적 대화 메커니즘에 따라 사회적 검증과정을 거쳐 객관적 지식이 된다. 객관적 수학적 지식은 주관적 수학적 지식의 성장에 의해 재창조되고 갱신되며, 한 세대에서 다음 세대로 전달된다. 이것은 객관적 수학적 지식의 구성 과정에 대한 설명이다. 이에 비해 교실에서는 사회적 공적 지식으로서의 수학적 지식을 받아들이고 내면화하는 일이 주로 일어난다.

콕과 그 동료들(Cobb *et al.*, 1992a; 1992b)은 학습은 문화적 적응과 개인적 구성을 모두 포함하며, 이것이 사회적 구성이라고 하였다. 수학적 진리는 보다 광범위한 사회에서 제도화된 수학적 해석, 의미, 실제이며, 수학적 해석이나 해는 특수한 상황에서 사회의 구성원들에 의해

참이라고 간주되는 것이다. 교실에서는 그 교실의 학생들이 공유하는 의미와 실제, 그리고 학생 개개인의 개인적 의미와 실제 모두의 발전이 일어난다. 교실 사회에서 수학적 합의 방식은 보다 광범위한 수학적 실제로의 문화화를 지향하며, 수학적 지식의 구성은 수업에 참여하는 학생들의 적극적인 사회적 활동(자신의 생각을 말하고, 타인들의 반응을 보면서 자신의 생각을 반성, 수정하고, 다른 방식으로 생각하는 것 등)을 통하여 수학적 개념이나 아이디어를 구성하는 것이다. 이때 수학적 실행, 사회적 기준, 그리고 사회-수학적 표준(Sociomathematical Norms)이 함께 구성된다(Bowers *et al.*, 1999).

사회적 구성주의의 이와 같은 설명에는 다음과 같은 질문이 제기된다. 사회적으로 구성된다는 수학의 본질과 특성은 무엇이며, 개인은 왜 수학에 입문하여야 하는가? 현재 사회가 인정하고 받아들이는 수학적 지식을 객관적 지식으로 가정하고, 학생들은 이것을 받아들여야 한다고 보는 이 관점은 학생 밖의 수학을 상정한다는 점에서, 전통적 관점과 무엇이 다른가?

3. 구성주의에 대한 비판적 고찰

구성주의는 인식 주체가 지식을 구성하는 능력을 갖추고 있다는 전제를 필요로 한다. 이 능력은 경험을 분류하고, 해석하고, 의미를 부여하고, 적합성과 존속가능성을 판단하는 역할을 하므로, 경험에 좌우될 수 없고, 경험에 의해 얻어지지 않는, 선험적인 것이어야 한다(Suchting, 1992). 칸트와 피아제는 이러한 선험적, 또는 생득적 능력을 전제하지만 구성주의자들은 이를 분명하게 설명하지 않는다. 이것은 경험을 초월하는 개념이기 때문이다. 구성주의는 ‘인간이라면 누구나’라는 보편성도 가정하고 있다. 지식의 능동적 구성, 경험에 의미부여 및 해석,

인지구조의 재조직, 사회적 활동, 언어 사용 등은 구성주의가 인간에게 보편적으로 부여하는 특성이다. 이처럼 기본 원칙 자체가 경험을 초월하는 형이상학적 가정을 필요로 한다는 것, 표면적으로는 개인 경험의 고유함과 개별성만을 강조하는 것 같지만 실지로는 보편적으로 적용되는 주장들을 하고 있다는 것은 곧 인간의 인식은 경험과 개별성만으로는 설명할 수 없음을 구성주의 스스로 입증하는 것이다.

사회적 구성주의는 어떻게 개인이 사회에서 일반적으로 받아들여지는 수학적 개념에 도달하게 되며, 이것이 개인에게 어떤 의미를 가질 수 있는가에 대한 설명을 필요로 한다(Confrey, 1995). 차츰 그들이 비판하는, 외부에 지식이 있고 개인은 이를 받아들여야 한다는 전통적인 교육관과 다를 바 없게 되기 때문이다. 인간의 생각이 모두 언어로 설명되는 것은 아니기 때문에 수학적 지식의 기초를 언어나 사회적 의사소통으로 환원하는 것은 수학적 지식을 겉으로 표현되는 것에 한정하는, 지극히 제한된 관점이다. 또, 그들이 제공하는 객관적 수학적 지식의 생성과 흐름에 대한 설명은 수학 대신 다른 과목을 넣어도 성립하는, 일반적인 것이다. 수학적 지식 자체의 고유한 본질과 특성을 논하지 않으면서, 수학적 지식이 구성되는 사회적 과정이나 그 과정에 영향을 미치는 사회 문화적 요소만을 말하는 것은 수학교육이론으로서 가장 핵심적인 요소에 대한 논의가 빈약함을 의미한다. 이 문제는 소집단 활동이나 토론 학습 이외에, 그들이 전통적으로 진행되어 온 수학교육에 무엇을 제안할 수 있는지에 대한 회의감을 불러일으킨다.

객관적 지식마저 부인하는 급진적 구성주의의 상대주의 지식관은 배경이론과도 상치되며, 교육과 관련한 여러 문제를 야기한다(Rowlands et al., 2001; Nodding, 1990). 첫째, 수학적 지식

자체에 대해서 말할 수 없다. 수학적 지식의 본질과 특성을 말하는 순간 수학적 지식은 객관적으로 존재하는 것이 되기 때문이다. 이렇게 되면 수학적 지식 발생의 보편적 과정을 말할 수 없고, 수학 역사의 교육적 잠재력이 과소평가된다. 이것은 급진적 구성주의자들의 주장의 일관성을 떨어뜨리기도 한다. 스테피(1990)는 교사들이 학교수학의 개념을 더 깊이, 다른 개념 및 주제와 통합적으로 이해하고, 여러 관련 주제들을 하나의 관계망으로 엮어 확장하고 심화시킬 것을 권고한다. 그러나 이것들은 모두 객관적 지식이 아닌가? 각 개념 및 주제의 본질과 특성을 고려하지 않고 개념망을 구성하는 것이 가능한가? 또, 교사마다 형성하는 개념망은 급진적 구성주의의 관점에서는 같을 수 없는데, 저마다 다른 개념망을 가지고 아이들에게 수학을 가르치는 것은 어떻게 정당화될 수 있는가?

둘째는 교육 목표와 내용의 조직, 평가의 어려움이다. 이것들은 수학적 지식을 그 특성에 따라 위계적으로 조직한 것에 근거해야 한다. 그러나 구성주의에서는 일반적인 수학교육의 목표를 세우는 것이 불가능하다. 개인마다 경험적 목표나, 존속가능 여부 판단, 구성 활동의 결과가 같지 않기 때문이다(Steffe & Wiegel, 1996). 따라서 반드시 배워야 하는 수학 내용은 규정할 수 없다. 하지만 교사가 계획이나 의도 없이 수업에 임하는 것은 불가능하다. 스테피의 분수 스킴 구성을 위한 사례 연구(Steffe, 2002; Olive & Steffe, 2002)나 콕의 자릿값 개념 구성을 위한 연구(Bowers et al., 1999; Cobb et al., 1992b)의 환경들은 모두 연구자들이 특정 개념의 구성을 위해 계획하고 고안한 상황이다. 또한, 아이들에게 어떤 수학적 개념이 구성되었는지 여부를 어떻게 판단할 것인가? 급진적 구성주의자들에게 그 준거는 교사의 지식

이다. 그러나 교사의 주관적 지식은 교사 개인의 경험, 의미, 해석, 가치 등이 반영된, 제한된 지식이다. 한 개인의 제한된 주관적 지식에 따라 학생들의 학습 내용과 방향을 결정하는 것은, 객관적 지식을 기준으로 삼는 것보다도 심각한 문제를 야기할 수 있다. 실제로, 이것은 분수 지식 구성에 관한 스테피의 연구(Steffe, 2002; Olive & Steffe, 2002) 사례에서 극명하게 드러난다. 이 사례에서 연구자나 교사는 객관적 지식의 존재를 부정하고, 아동들이 스스로의 수학을 구성하게 해야 한다고 하지만, 실상은 교사의 주관적 지식을 아동들에게 따르도록 하고 있다. 수학 자체의 본질과 특성에 대한 고려와 깊은 분석 없이 학교수학의 내용을 선정하고, 아이들의 연령과 수준에 맞게 조직하는 것은 불가능해 보인다(Rowlands *et al.*, 2001).

급진적 구성주의자들은 수학적 지식의 구성은 반성과 추상화에 의한 학생의 개념구조, 즉 조작적인 수학적 스킴의 변화라고 주장한다. 그러나 ‘반영적 추상화’는 그들이 생각해낸 개념이 아니라 피아제에 의해 창안된 것이다. 그들의 설명은 피아제 이상 나아가지 않는다. 특히, 이 두 이론은 인식론적 전제가 다름에도 불구하고, 급진적 구성주의자들은 피아제의 인식론에서 유기체는 환경에 적응하며 살아간다는 주장과 반영적 추상화만을 임의로 떼어 내어 적용하고 있다. 수학적 지식의 본질과 특성을 고려하지 않는 구성 과정에는 필연적인 문제점들이 드러난다. 스테피의 연구 사례나, 학생들 스스로 음수의 곱셈 규칙을 구성하는 데 실패한 사례(Sfard & Avigail, 2006)는 이를 잘 보여준다. 반성을 통한 수학적 지식의 구성이나 소집단 활동은 모두 수학적 지식의 본질과 특성에 대한 충분한 고려에 기반을 두어야 한다.

수학적 지식의 구성은 인간의 마음속에서 일어나는 일이다. 구성 능력은 인간의 마음에 선형적으로 생득된 것이고, 경험에서 일어나는 실제 구성 과정도 마음속에서 일어난다. 따라서 이상에서 논한 구성주의의 논의는 선형적 마음과 경험적 마음으로 이루어진 마음의 구조에 비추어 설명되어야 하며, 그럴 때에 구성주의의 지식관이 지닌 문제점도 비로소 해소될 수 있을 것이다.

III. 수학적 지식의 구성과 마음의 중층구조

1. 마음의 구조와 구성주의

선형적 마음과 경험적 마음이 이루는 마음은 ‘중층구조(이홍우, 2000a:97)’로 파악할 수 있다. 중층구조에서 아래층은 현실에서 경험할 수 있는 예물이나 사례 등의 사실적 표현이고, 아래층과 맞붙어 존재하는 위층은 그러한 예물이나 사례의 표준이자 (논리적) 원인이다. 아래층에 사실적으로 존재하는 것들은 모두 총체적이고 농축된 형식으로 위층에 존재한다. 마음이 중층구조로 이루어져 있다는 것은 아래층에 경험적 마음이, 위층에 선형적(형이상학적) 마음이 존재함을 의미한다. 이러한 중층구조의 아이디어는 성리학 이론에 잘 나타나 있다.

성리학은 세계의 구조를 설명하는 본체론(本體論), 마음의 구조를 설명하는 인성론(人性論), 그리고 심성의 형성을 설명하는 수양론(修養論)으로 나누어져 있다.⁴⁾ 본체론에 의하면 만물은 리와 기로 이루어져 있다. 리는 사물이나 현상에서 추론되는 논리적 원인, 또는 사물이나 현

4) 이하 성리학에 관한 논의는 이홍우(2001; 2000a; 2000c; 2000d), 박은주(2000), 장성모(1998)을 참고한 것이다.

상이 따라야 하는 기준이다. 기는 현상을 일으키는 생명, 물질의 동적인 에너지로, 기의 응결 조작의 결과 사물과 현상이 생성된다. 기의 작용은 리를 필요로 하며 리는 기가 작용함에 따라 나타난다. 세계는 사실의 세계와, 현상 세계의 원형(原型)으로서의 논리의 세계가 이루는 중층구조로 이루어져 있다. 우리가 경험할 수 있는 세계는 사실의 세계뿐이다. 그러나 이것만 생각한다면 존재의 생성과 변화의 양상은 설명 가능하지만, 존재의 성격을 규정하는 일반적 원리나 생성과 변화의 객관적 기준에 대해서 충분히 설명할 수 없다. 반면에, 세계를 논리적 수준에서만 파악하게 되면 존재의 원천이 부각되기는 하지만, 실재가 사물이나 존재 속에서 구체적인 형태를 띠고 나타나거나 변화되는 양상을 충분히 설명할 수 없다.

성리학에서는 인간의 마음이 성(性)과 정(情)의 결합으로 되어 있다고 설명한다. 정은 상황의 제약 아래 가변적으로 표현되는 마음, 즉 시공간의 제약 속에 살고 있는 우리가 가지고 있는 마음인 반면, 성은 모든 상황의 제약으로부터 벗어나 있는, 정으로부터 추론되는 논리적 형식으로서의 마음이다. 성과 정의 관계는 본체론에서의 리와 기의 관계에 대응되며, 따라서 중층구조로 해석될 수 있다. 위층에는 성과 정의 분리된 상태로, 그리고 아래층에는 분리되지 않은 상태로 존재한다. 위층의 성인 본연지성(本然之性), 그리고 아래층의 성은 기질지성(氣質之性)이다. 기질지성은 '정 속의 성'으로, 개인이 구현해야 할 하나의 '가능태'로서의 성이다. 개인은 기질을 가능한 한 맑은 상태로 가꾸어 기질지성의 성이 본래 상태인 본연지성으로 회복되도록 하여야 한다.

마음을 이루는 성과 정은 세계를 이루는 리

와 기와 같은 구조로 이루어져 있으므로 세계에 대한 앎을 통해 마음이 변화될 수 있다. 세계에 대한 앎은 곧 경전(교과)과 의례를 공부하는 것으로, 성리학에서 성은 표현되기 이전의 지식이고, 일체의 지식은 성이 외부적 형태로 표현된 것이다(이홍우, 2000b: 266). 그렇기 때문에 인간은 지식을 습득하면서 지식의 논리적 가정으로 불박혀 있는 성을 획득할 수 있다.⁵⁾ 지식을 습득하는 것은 본성을 '갓추어 가는 과정,' 또는 '실현하는 행위'이면서 '회복하는 과정'이다. 이것이 수양론의 핵심이다.

이상에서 논한 중층구조 이론에 따르면, 우리가 경험 세계를 살아갈 때 작용하는 마음은 아래층의 경험적 마음이지만, 이 마음의 이면에 불박혀 있으면서 이 마음의 작용의 논리적 원인이 되는 위층의 형이상학적 마음이 존재한다. 이 마음은 일체의 경험을 초월하는 마음이지만, 경험적 마음을 통해서 그 존재를 나타내고, 추론 가능하게 한다. 경험적 마음은 형이상학적 마음 없이는 기준과 근거를 잃어버린다. 이 구조에서 구성 능력은 위층의 마음에, 그리고 구성 작용은 아래층의 마음에 속한다고 할 수 있다. 이들의 관계를 말하자면, 구성이 일어나지 않으면 인간이 구성 능력을 갖추고 있는지 알 수 없고, 역으로 구성은 구성 능력이 작용하지 않으면 일어날 수 없다. 구성 능력은 구성 작용의 기준과 논리적 원인이므로, 구성 작용은 구성 능력이 허용하는 한도에서 이루어질 수 있다. 인간은 인간 인식이 허용하는 한에서 세계를 파악할 뿐이며, 개인의 한계를 넘을 수 없다는 구성주의자들의 주장은 이 맥락에서 이해될 수 있다. 그러나 구성 작용은, 경험을 초월하여 있으면서 경험에서 일어나는 구성 작용에 영향을 미치는, 인식의 근거가 되는

5) 여기서 '획득'은 외부의 것이 안으로 들어온다는 의미가 아니라, '원래 마음속에 未發로 들어 있던 표준을 외적 표현에 적용하는 것, 또는 외적 표현에 비추어 확인하는 것'이다(이홍우, 2000b:266).

구성 능력의 존재를 함의하는 것이다. 이 위층의 마음은 칸트와 피아제의 이론 모두에서 가정되어 있다. 칸트의 아프리오리와, 피아제의 웹과 적용기능, 조직 기능이 이에 해당한다.

그러나 구성주의자들은 논리적으로 인정할 수밖에 없는 이러한 형이상학적 마음을 논의에서 배제한다. 아래층의 경험에 초점을 맞추고 그것만을 논의의 대상으로 삼는 구성주의자들에게 존재론적 실재의 성격을 떠는, 구성 능력이 속하는 형이상학적 마음은 그 본질상 존재 여부를 말할 수 없고, 논의의 대상으로도 삼을 수 없다. 그 대신 그들은 경험 세계에서 시간 계열을 따라 일어나는 경험적 마음의 변화만 논한다. 그러나 위층과 아래층을 총체적으로 고려하지 않고, 위층을 배제한 채 아래층만으로 경험적 마음의 변화를 설명하려면, 이 마음의 변화에 영향을 미치는 개인이 살아온 삶과 환경, 그가 놓인 사회 등의 현상 세계만 강조하게 된다. 이때 문제는 위층에 대한 논의를 배제함으로써 표준이 흔들린다는 것이다. 아래층의 변하는 것은 기준의 역할을 할 수 없다. 구성주의가 가진 상대주의의 지식관이 안고 있는 문제는 이와 관련된 것으로, 이로 인한 보편적 기준의 부재는 구성주의의 제안을 수학교육에 의미 있게 적용하는 데 걸림돌이 된다.

성리학에서 왕양명은 구성주의와 유사한 입장을 취한다. 인간의 의식 외부에 어떤 것도 독립해서 존재하지 않는다는 그의 주장은 곧 모든 사물은 의식에 의하여 구성된 구성물이라는 의미이다. 그는 마음은 외적 영향을 받지 않고 자기 원리에 따라 사물의 실재성과 사건의 도덕성을 구성한다고 하였다. 이것은 구성주의가 사물의 구성을 인식 주체의 내적 원리에 따라 이루어지는 의미 부여라고 보는 것과 유사하다. 그렇기 때문에 목영해(1998)는 양명학을 ‘동양의 구성주의’라고 하였다. 이를 장성

모(1998)는 ‘기준’으로 설명한다. 개인의 삶의 표준을 가치를 지향하는 개인의 마음에 둔 왕양명은 개인의 마음과 이 마음이 따라야 할 기준이 분리되지 않음을 강조한 것이다. 구성주의 역시 지식 구성의 기준을 외부가 아닌, 개인의 마음에 두어 개인은 자신이 가지고 있는 기준 및 개념 체계에 따라 경험을 해석하고, 의미를 부여하며 정신 내부의 일관성을 따라이 해석과 의미를 조직한다고 주장한다. 양명학이 구성주의와 유사한 관점을 취한다는 것은 구성주의를 이해하고, 그 문제점을 보완하는데 양명학이 도움이 될 수 있음을 의미한다.

2. 수학적 지식의 구조와 구성

성리학에서는 현상과 실재 사이의 동질적이면서도 이질적인 관계를 ‘리일분수설(理一分殊說)’로 설명한다(장성모, 1998). 리일분수설에 의하면, 세상 만물의 이면에는 그것의 궁극적 원인으로서 총체적인 리(一理)가 존재하고, 현상 세계에서 만물은 기를 매개로 하여 이 일리를 불완전하게 구현하고 있다. 이것이 ‘분수리(分殊理)’이다. 사람은 만물에 分有되어 있는 분수리를 통해 그것이 구현하는 일리를 드러낼 수 있고 이를 통해 자신의 리를 회복할 수 있다. 수양론의 ‘격물치지(格物致知)’는 이 맥락에서 이해될 수 있다(박은주, 2000; 장성모, 1998). 인간이 힘써 노력하여 리를 궁구하면 활연관통(豁然貫通)에 이르게 된다. 이것은 ‘눈앞이 환히 트이며 모든 사물이 한꺼번에 속속들이 이해되는 상태’, ‘주관과 객관이 합일하는 상태(박은주, 2000:467)’, 인간 본성의 회복이다(이홍우, 2000c). 이것이 성리학이 제시하는 교육의 목표이다. 이때, 경전과 의례는 이 상태로 나아가도록 해주는 매개체이다. 수학도 이러한 매개체가 될 수 있을까? 성리학 당시의 경전과

의례는 현재 우리가 가진 지식과 그 내용과 형태가 매우 다르지만, 이를 규범적 지식이나 도덕적 지식에 한정하는 것은 성리학에서의 지식과 현재의 지식 모두를 피상적으로 이해하는 것이다(이홍우, 2000a:40-49). 따라서 수양론은 현재 우리가 가지고 있는 수학적 지식에도 적용될 수 있다. 즉, 경전과 의례와 마찬가지로 수학적 지식은 위층의 마음인 인간의 본성을 표현하고 있고, 인간은 수학을 공부함으로 그것이 표현하고 있는 본성을 회복할 수 있다고 볼 수 있다. 이것은 구체적으로 어떤 의미인가? 수학적 지식의 본질과 특성을 강조한 구조주의 교육이론을 살펴보자.

구조주의에서 ‘구조’는 ‘대상의 저변에 숨겨져 있으면서 개별적인 사건과 현상(표면)의 이면(심층)에서 이들을 조정하는 규칙이나 원리이며, 사물을 보는 수단 및 개념적 도구(박재문, 1998:40-43)이다. 누터(Nutter, 1979:55)는 ‘체계’와 ‘구조’를 구분하여, ‘구조’를 ‘현상’의 이면에 있는 ‘체계의 형식’이라고 하였다. 우리에게 사실적으로 존재하는 것은 현상뿐이지만, 구조는 사실적 현상의 이면에 있는 이것의 ‘논리적 형식’ 또는 본질이다. 구조주의 교육이론에서 말하는 ‘지식의 구조’는 현상의 세계가 의미를 가지기 위한 전제조건으로서의 논리적 가정이며, 인간이 파악하거나 도달하려고 노력해야 하는 표준이다(이홍우, 1998b:377-403). 그러나 현상에서 드러나는 것은 지식 체계뿐이다. 즉, ‘수학적 지식의 구조’는 ‘수학적 지식의 본질’이자 ‘수학적 지식이 표현하고 있는 실재’로, 수학을 한다는 것은 수학적 지식 체계를 통하여 수학적 지식의 구조를 파악하는 것이자 수학적 지식이 반영하는 실재를 대면하는 것이다(이홍우, 2001). 이것을 ‘개념적 수단’, ‘안목’과 ‘사고방식’(Bruner, 1973:59-60)으로 설명하는 브루너에 의하면, 수학적 지식의 구조를 배운다

는 것은 수학적 지식을 공부함으로 얻는 마음의 변화이다.

그러나 구조주의 수학자인 부르바키(Bourbaki, 1950)가 말하는 ‘수학적 지식의 구조’는 위에서 논한 구조개념과 차이가 있다. 부르바키가 제시하는 ‘수학의 모구조’는 수학의 구조를 기술한 가지 ‘수학적 체계’인 반면 위의 수학적 지식의 구조는 모구조에 붙박혀 있는 논리적 형식이다. 수학의 본질은 수학적 체계를 이루는 요소나 관계, 법칙, 즉 수학적 활동의 산물인 수학적 체계가 아니라 수학적 활동 그 자체이다(Freudenthal, 1991:14-15). 포앵카레(1958)는 이를 관계를 찾고, 법칙을 이끌어내고, 이 법칙을 통해 다른 수학적 사실들을 해석하고, 법칙들 간의 관계를 찾는 것으로, 듀네토프(Dieudonné, 1972)는 구체성과 문맥을 제거하는 추상화로, 부르바키(1950)는 공리적 방법으로, 그리고 프로이덴탈(1991)은 추상화, 형식화, 공리화, 도식화, 체계화, 조직화하는 수학적 활동으로 표현한다. 이와 같은 수학적 활동을 어떻게 가르치고 배워야 하는가?

구조주의 교육이론을 구현하고자 하였던 ‘새 수학’은 본래 의도와 달리 큰 비판 속에 막을 내렸다. 주된 비판은 지나치게 엄밀하고 현대적인 수학을 추구하였다는 것, 기성 수학을 초등화하여 가르치려 했다는 것이다. ‘새 수학’이 추구하였던 연역적, 논리적, 공리적 접근은 아동들의 안목이나 사고 방법을 키워주지 않고 오히려 수학을 아동에게 의미 없는 ‘중간 언어’로 만들어 버렸다는 비판을 받는다(Freudenthal, 1991). 즉, ‘수학적 지식의 구조’라는 수학 학습의 목표와 기준 자체가 아닌, 이에 이르는 구체적인 적절한 방법에 문제가 있었다. 이들은 위층의 마음에 정당한 지위를 부여하였지만, 아래층의 마음이 이 위층의 마음을 회복해 가는 과정에 대해서 소홀히 한 것이다. 반면, 구

성주의는 기준으로서의 위층의 마음은 논의에서 배제하면서, 아래층에서 일어나는 일에 중점을 두고 있다. 구조주의와 구성주의는 일견 대립되는 듯하지만, 중층구조의 관점에서 서로를 보완하는 역할을 할 수 있다.

성리학에는 세계와 마음의 구조에 대한 해석과 강조점이 서로 다른, 대립되는 견해가 있다. '주리론(主理論)'과 '주기론(主氣論)'이 그것이다. 주리론자들은 개개인의 삶에 좌우되지 않는 기준과 원리의 지위를 주장하는 반면, 주기론자들은 이 기준과 원리가 삶과 분리될 수 없음을 주장한다(이홍우, 2000d). 본연지성과 기질지성의 관계 및 지위에 관해서, 주리론의 관점에서 본연지성과 기질지성이 상이한 것이 아니라고 하면 본연지성은 기질지성의 영향을 받을 수밖에 없으며, 그렇게 되면 본연지성의 절대성이 손상될 수 있다. 그러나 주기론의 관점에서 본연지성과 기질지성이 동일한 것이 아니라고 하면 본연지성은 기질지성과 무관하게 독립적으로 존재하게 되고, 그렇게 되면 본연지성은 개인에게 실현해야 될 대상이 될 수 없다. 장성모(1998)는 이들이 표면상으로는 대립되는 것 같지만, 실상은 삶과 교육의 상이한 국면과 관련된 상이한 문제의식을 가지고 상이하게 대답하는 것이라고 해석하였다. 주리론은 교육내용의 개인에 대한 초월성, 불변성, 객관성을 부각시켰지만, 개인이 공부해 나가는 과정이나 주체로서의 학습자의 역할에 대한 설명은 부족하다. 반면 주기론은 학습자의 관점에서 교육내용을 공부해 나가는 과정과 그 의미에 중점을 주지만, 교육내용이나 학습경험의 교육적 타당성이 과소평가될 위험이 있다. 따라서 교육 실제에서는 이 두 이론을 총체적 시각에서 종합적으로 고려해야 한다.

기준의 개인에 대한 초월성과 내재성 간의 대립으로 요약할 수 있는 주리론과 주기론의

대립은 구조주의 교육이론과 구성주의 교육이론에도 적용될 수 있다. 사물과 현상의 이면에는 구조가 있고, 이 구조는 각 개인이 처한 상황에 독립적이며, 인간이 할 일은 이것을 파악하는 것이라고 주장하는 구조주의는 기준의 보편성과 객관성을 강조하는 편에 선다. 반면, 구성주의는 개인의 삶과 경험을 벗어나는 지식을 부정하고, 개인에게 의미 있는 존속 가능한 지식을 중시하는 편에 선다. 즉, 구조주의는 기준이 되는 위층을, 구성주의는 경험의 세계에서 시간 계열을 따라 실제 일어나는 현상의 세계인 아래층을 강조한다고 할 수 있다. 따라서 위층과 아래층 중 어느 한 층만을 강조할 때 생기는 문제는 구조주의와 구성주의에도 적용된다. '새 수학'이 택했던 방법이 교육 실제 속에서 제대로 작동하지 않았던 것이 그 예이다. 이에 대하여, 구성주의자들은 구조주의가 수학의 구조와 발생의 구조를 분리시킨 것이 잘못이라고 본다(Steffe & Kieran, 1994). 구조주의는 수학의 구조는 정신과 독립적으로 존재하고 인간은 합리성에 의해 이것을 알게 된다고 생각하였지만, 학습자의 이해와 분리하여 수학적 지식의 구조를 의미 있게 말하는 것은 불가능하다. 따라서 학습자 개인의 지식의 구성 과정을 중시하는 구성주의가 대안을 제공할 수 있다(Ibid.). 다른 한 편으로 구성주의의 상대주의 지식관은 기준 설정에서 가장 중요한 수학적 지식을 소홀히 하고, 상황에 따라 변하지 말아야 하는 객관적 기준을 흔들리게 만들어 일종의 방향 상실로 귀결되는 문제를 야기한다. 이 문제는 개개인의 경험과 상황에 제한되지 않는 수학적 지식의 구조에 기준을 두는 구조주의가 보완해야 할 점이다. 주리론과 주기론이 교육에 관한 이론적 논의를 풍부히 하고, 구체적인 인간 활동으로서의 교육을 총체적으로 이해하는 데 기여하듯이, 구조주의와 구성주의도 서로의 문

계점을 보완하며 교육을 보다 총체적으로 이해하는 데 기여할 수 있다. 이흥우(1998a:40-45)에 의하면, 학생들이 수학적 지식을 경험할 때, 관점을 학생이 경험하기 전 상태에 두면 교육 내용은 수학적 지식이며, 학생이 경험하는 상태에 두면 교육의 내용은 경험이 된다. 즉 ‘수학적 지식’과 ‘경험’은 동일한 내용을 각각 반대편에서 보는 것이다. 그러므로 수학적 지식과 경험은 함께 고려하여야 한다(Ibid.:43-44).

‘수학적 지식의 구조’와 ‘개인의 경험’을 둘 다 고려한다는 것은 어떤 것인가? 이것은 구조주의 수학교육관의 중요한 관점의 전환을 요구한다. 지식의 구조를 내면화한다는 것은 학습자의 바깥에 있던 지식의 구조가 학습자의 안으로 들어오는 것이 아니라, 학습자의 마음이 이를 통해 표현되는 것이다(이흥우, 2000b). ‘수학적 지식의 구조의 구성’은 학습자와 무관한, 학습자의 바깥에 있는 수학이 학습자의 마음속에 들어오는 것이 아니라, 학습자의 바깥에 존재하는 수학적 지식을 경험함으로써 학습자의 마음속에서 형이상학적 마음이 드러나는 것이다. 인류가 역사를 통하여 수학을 발전시켜 온 과정은, 수학적 지식이 반영하는 ‘실재’ 곧 우리의 형이상학적 마음을 드러내어 온 과정이고, 인류가 이룩해 놓은 수학적 지식 체계는 실재에 다가가기 위한, 즉 형이상학적 마음을 드러내기 위한 인류의 노력의 결실이다. 그러므로 진정한 수학적 지식의 구성은 이것을 매개로 하여 수학적 지식의 본질을 탐구해 나가며 인간 본성을 회복하는 것을 의미한다. 우리가 수학교육에서 추구해야 하는 것은 구성이 없는 구조도, 구조와 무관한 구성도 아닌, ‘수학적 지식의 구조의 구성’이어야 한다. 수학적 지식의 본질과 특성이 드러나는 학습 경험을 통하여 학습자의 경험적 마음에 변화가 일어나고, 수학적 지식이 표현하는 위층의 형이상학

적 마음을 학습자가 회복하게 하는 것, 이것이 수학적 지식의 구조의 구성을 추구하는 교육이다. 이것은 구체적으로 어떻게 이루어지는가? 구조주의와 구성주의를 상황에 따라 취사선택하는 것, 예를 들어 교육내용은 구조주의 식으로, 교육방법은 구성주의 식으로 조직하는 것은 ‘수학적 지식의 구조의 구성’의 의미를 피상적으로 이해하고 적용하는 것이다. 이것은 새로운 관점을 요구한다.

IV. 수학적 지식의 구조의 구성

1. 통합적 관점: 플라니의 인식론

플라니(Polanyi, 1962:71)에 의하면 삶에는 언제나 인식자의 판단, 이해, 직관, 상상, 개인적 배경 및 한계, 즉 개성이 붙어 있게 되어 있다. 그리고 주체의 참여, 노력, 신뢰, 신념, 감각, 판단, 정열, 헌신이 없으면 지식을 소유하는 것 자체가 불가능하다. 지식의 소유와 추구, 법칙이나 규칙의 발견은 개인에게 있으며, 앎과 발견에 대한 진위 여부는 주체 개인의 판단과 확신에서 일차적으로 나온다. 즉, 지식의 본질은 ‘개인적 지식(personal knowledge)’이다(Ibid.:vii-viii). 지식의 탐구는 우리의 감각으로 포착하기 어려운 심층의 실재에 대한 이해에 도달하는 것, 실재를 향해 전진해 나아가는 것이며, 지식 추구하고 발전의 기반이 되는 에너지는 실재의 아름다움과 이에 대한 열정에서 나온다(Ibid.:5-6, 188-189).

플라니의 인식론에서 중요한 또 하나의 개념은 묵식(默識: tacit knowing, 또는 암묵적 지식: tacit knowledge)이다. “우리는 말할 수 있는 것 이상을 알 수 있다(Polanyi, 1967:4)”는 말이 함의하듯이, 언어가 표현하는 지식은 일부에 불과하고, 순수하게 명시적인 지식, 언설로 완전

하게 표현할 수 있는 지식은 존재하지 않는다. 언어로 표현할 수 있는 부분은 수면 위로 떠오른 빙산의 일부에 해당할 뿐, 그 안에는 더 심오한 암묵적 지식이 있고, 모든 명시적 지식은 묵식에 기반을 두고 창출되고, 의미가 부여되며, 통제된다(Polanyi, 1969:195). 암묵적 지식의 존재 여부는 명시적으로 표현된 지식을 가르치고 배우는 과정에서 묵시적으로 드러난다. 즉, 지식의 암묵적 차원은 언어에 기반을 두지는 않지만, 언어로 표현된 지식을 통해서 그 존재를 드러내는 것이다.

묵식을 폴라니는 초점식(focal awareness)과 보조식(subsidiary awareness)으로 설명한다(Polanyi, 1962:55-57). 모든 지식은 초점식과 보조식의 양면적 요소를 가진다(장상호, 1994:34). 초점식은 보조식 없이 독립적으로 존재하지 못하고, 반드시 보조적 요소에 의해서 출현한다. 보조식 역시 초점식과 독립적으로 존재하는 것은 불가능하다. 인식 주체가 보조식을 가지고 있다는 것은 보조식은 보조식으로 둔 채 다른 것을 초점적으로 보면서 보이는 것을 사람들에게 말해 주는 가운데 드러난다. 이 두 인식은 원위향(distal term; 초점식)과 근위향(proximal term; 보조식)으로 설명되기도 한다(Polanyi, 1969:140-141). 폴라니는 초점식과 보조식, 원위향과 근위향, 세부적인 것과 포괄적 실체 사이에 존재하는 관계를 'from-to relation'이라 하였다(Ibid.:140-148). 초점적 전체가 지식의 내면화로 보조적 요소가 되는 것은 '원위향 → 근위향'으로 나타낼 수 있다. 이렇게 내면화된 지식은 다른 요소들(근위향)과 함께 또 다른 초점적 전체(원위향)를 통합하는 역할을 하게 되고, 이것을 '근위향 → 원위향'으로 나타낼 수 있다. 보조식으로 있던 것을 초점식으로 의식하고, 이것이 다시 포괄적이고 통합된 형태로 보조식화 하면서, 우리는 대상에 대해 더 깊이

이해하게 된다.

폴라니는 지식의 획득을 '체득(interiorizing)', '회득(comprehension)', '내주(indwelling)', 그리고 '발견'이라는 용어를 사용하여 설명한다. 인간이 지식을 획득하며 실재에 접촉하게 되는 것은 실재나 사건의 의미를 신체 내부에 있는 단서를 통하여 파악하는 과정을 통해 인간 내부의 것으로 동화시킬 때 가능하다. 이것이 '체득'이다(Polanyi, 1969: 146-8). 체득을 통해 이전의 인식 주체에게 부재하던 능력, 상징의 의미, 또는 사고 체계나 지식 체계 등이 주체 내부에 마치 신체의 일부처럼 내재화되어 존재의 한 부분으로 된다. '회득'은 통합되지 않던 부분들이 어느 순간 하나의 포괄적인 전체 속에서 파악되는 과정을 일컫는다(Ibid.:138). 일련의 서로 연결되지 않은 세부항목이 하나의 전체 속의 부분으로 파악될 때, 우리가 주목하였던 초점은 지금까지는 파악되지 않았던, 그 세부적인 사항들을 초월하는 새로운 협동적인 의미의 이해로 전환된다. 내주는 우리가 사용하는 도구와 함께 살고, 성장한 문화 안에 살듯이, 회득한 상세한 것들 안에 사는 것이다(Polanyi, 1967:17). 이것은 초점식이 몸속에 동화되는 과정과, 사람이 보조식 안에 들어가 거주하는 것을 모두 포괄한다. 내주에 의하여 보조식이 충분히 성숙함에 따라 인식 주체는 지금까지 숨겨져 있던 실재와 형태를 발견할 새로운 감별력을 점차 갖추게 되고, 그것을 토대로 의미 있는 단서를 찾는다. 그리고는 다시 그것들을 토대로 알지 못하는 어떤 것, 즉 미결정된 실재에 대해서 예견하려고 노력하면서 전에는 볼 수 없었던 새로운 실재를 발견하거나 구성할 수 있게 된다. 발견은 문제와 문제해결 사이에 개재하는 논리적 간극을 뛰어넘는 것으로, 현재의 암묵적 앎을 토대로 한 단계 높은 수준의 실재로 나아가는 과정이다. 폴라니는 이것을 '실재의 접촉'이라

고 표현하기도 한다(Polanyi, 1962:vii). 발견 과정의 초기 단계에 인식자는 결과를 전망하는 모호하고도 희미한 암시를 받는다. 이것을 폴라니는 ‘예견(anticipation, *Ibid.*:103)’, ‘숨겨진 실재의 존재에 대한 감지(Polanyi, 1967:24)’라고 표현하였다. 인식주체는 알지 못하는 것에 대한 어렴풋한 예감을 갖게 되며, 초점적 대상에 보조적 요소가 적절하게 통합됨으로써 초점이 명확해지고, 통합이 점차적으로 이루어지면서 지식이 심층적으로 성장한다. 이러한 초점식과 보조식간의 운동은 문제에서 출발하며, 논리와 더불어 상상력, 직관, 추측 등을 사용하여 진행된다(Polanyi, 1967:21).

2. 수학적 지식의 구조의 구성

가. 수학적 지식의 구조의 구성 원리

수학적 지식을 가르치고 배우는 일을 수학적 지식의 구조의 구성, 곧 수학적 지식 체계를 배우며 그 이면에 있는 수학적 지식의 본질인 형이상학적 마음을 회복하는 것으로 규정할 때, 기존의 수학교육 이론인 수학화 이론, 역사-발생적 원리, 수학 학습 수준 이론은 수학적 지식의 구조의 구성 원리로 재해석될 수 있다.

브라우어(Brouwer)에 의하면, 수학적 대상은 인간 정신(직관)에 의하여 시간 속에서 실제로 구성될 때 비로소 존재한다. 수학적 탐구는 구성이며 동시에 발견이다(Posy, 1974:131). 이때 발견되는 것은 선험적인 진리이다. 수학 자체는 지각적 지식의 우연성을 배제하고, 경험이나 어떤 공리의 권위에 의해 결정되는 것도 아니라는 점에서 선험적이다. 그리고 이 선험적 진리는 이미(잠재적으로) 의식의 본질에 내재하여 있다. 브라우어의 영향을 받은 프로이덴탈(1991:1-2)은 수학을 학습한다는 것은 직관과 상식에서 출발하여, 이를 의식화하고 반성하여

형식화하고 이를 다시 발전된 직관과 상식으로 만드는 활동이라고 보았다. 프로이덴탈 외에도 여러 수학자들이 수학적 활동의 근거로 인간의 직관을 중요시하였다. 부르바키(1950)는 수학은 형식의 기계적 게임이 아니라 발견의 과정에 직관이 관여하는 학문이라고 하였고, 힐베르트(Hilbert)는 수학은 대상과 관련된 직관에서 나온다고 하였다(재인용, Nutter, 1979:17, 21-24). 브루너(1973:126-145)도 직관적 사고를 중시하며, 수학교육의 목표 중 하나가 직관적 사고를 개발하는 것이어야 한다고 주장하였다. 직관은 인간에게 주어진 본유의 정신적 능력으로, 수학적 앎의 근거가 된다. 그러나 이것이 무엇인지, 어떻게 작용하는지에 대해서는 정확히 알 수 없으며, 그 본질상 언어나 바깥에 드러나는 행동으로 표현될 수 없다. 이러한 직관은 폴라니의 용어로 보조식에 해당한다고 볼 수 있으며, 프로이덴탈을 비롯한 많은 수학자들이 수학적 앎이 보조식으로서의 직관에 기반함을 강조한 것이라 할 수 있다.

프로이덴탈(1991; 1981)에 의하면, 상식과 직관에서 출발하여 통찰, 반성, 연습, 훈련에 의해 보다 높은 수준의 상식과 직관을 갖게 되는 것이 수학적 사고의 발달이다. 수학적 활동은 직관에서 출발하여 추상화, 체계화, 공리화, 형식화하는 ‘수학화’ 활동이며, 수학을 특징짓는 것은 이러한 인간의 정신 활동이다. 여기서 통찰, 반성, 연습, 훈련, 추상화, 체계화, 공리화, 형식화는 폴라니의 용어로 초점식에 해당한다고 할 수 있다. 즉, 프로이덴탈이 말하는 수학화는 보조식에 근거하여 초점식이 나타나고, 이 초점식이 통합적으로 다시 인식되며 보조식이 된다는 인식에 대한 폴라니의 설명과 그 기본 메커니즘이 동일함을 알 수 있다. 보조식과 초점식의 관계를 마음의 중층구조에서 위층과 아래층의 관계로 해석하고(이흥우, 2000b), 이를

프로이덴탈의 수학화에 적용하면, 수학적 활동은 위층의 마음에 근거하여 아래층의 마음의 작용이 일어나고, 그 결과 보다 발전된 수준의 직관이 되면서, 위층의 마음이 점차 드러나는 과정으로 해석할 수 있다.

역사-발생적 원리는 학교수학의 자연스러운 전개 양식은 수학의 역사적 발생 과정에 따르는 것이라는 주장이다. 이 원리는 18세기에 클레로(Clairaut) 이래 여러 학자들에 의하여 주장되고 옹호되어 왔다. 특히 20세기 포앵카레와 클라인(F. Klein)과 같이 수학교육에 관심을 가졌던 수학자들은 수학 학습이 수학의 역사적 발달 과정에 따라 소박하고 직관적인 상태에서 점진적인 형식화 단계를 거쳐 이루어져야 한다고 주장하였으며, 프로이덴탈(1981:137) 역시 수학의 역사를 인류 전체가 수학을 학습한 과정으로 보고 수학교육에서 수학의 역사적 발달과정을 고려할 것을 주장하였다. 수학의 역사는 인류 전체가 수학적 지식의 구조를 구성해 온 과정을 보여준다고 할 수 있다. 이를 폴라니의 용어로 말하면, 수학의 역사는 보조식으로 있어서 의식하지 못하고 사용하던 것들이 초점식으로 의식되고 발전되는 모습을 보여준다고 할 수 있으며, 수학을 가르치고 배움에 있어서 이를 고려하여야 한다는 것이 역사-발생적 원리이다.

폴라니와 프로이덴탈(1991)은 (수학적) 지식의 성장에는 불연속적인 수준이 있다고 하였다. 더 높은 수준의 수학은 그 동안 상식적으로 알고 있던 기초적인 것이 의식화되고, 객관화되고, 드러나는 것이다. 내용에서 형식으로 관점을 전환하고 형식을 의식화하고 대상화하면서 학습자는 보다 높은 수준으로 도약하고, 수준이 상승됨에 따라 점진적으로 본질이 드러나고 형식이 더욱 형식화된다. 반힐레(van Hiele, 1986)는 이를 기하 학습의 다섯 수준으

로 구체화하였다. 이 수준이론은 사고의 내적 질서의 의식화, 패턴화, 형식화와 내용화의 거듭된 교대로 표현되는 수학화 과정의 특성을 잘 반영하여, 현상과 그 정리 수단의 상대적 관계, 바닥수준에서 현상을 정리하는 수단이었던 본질에 대한 원초적인 직관적 심상이 단계적으로 명확화 되어, 최종적으로 형식적인 개념에 이르게 됨으로써 수학적 안목이 형성되는 과정을 설명한다. 여기서 기하학적 사고의 수준들은, 처음에 보조식으로 인식하며 무의식중에 작용하였던 기하학적 사고를 점진적으로 초점식으로 의식하며, 형식적, 체계적, 추상적 기하 학습이 이루어지는 과정을 구체화한 것이라고 할 수 있다.

반힐레는 학습 수준의 도약을 돕는 요인으로 언어와 기호, 그리고 반성을 꼽는다(Ibid.: 83-86). 사회적 구성주의자들은 언어를 사회적 의사소통의 수단으로서 중시하지만, 사고 수준 이론에서 언어는 자신의 생각을 의식화하고 표현하는 수단으로 개인의 마음속에서 보조식이 초점식으로 되는 데 작용한다. 비고츠키는 사회적 의사소통의 수단으로서 언어를 강조함과 동시에 인간의 사고 자체의 흐름에서 개념이 형성되는 과정에 작용하는 언어의 역할을 중시하였다(Vygotsky, 1986). 구성주의자들은 전자를 더 중요시 하지만, 수학적 지식의 구조의 구성을 고려할 때, 후자에도 중점을 둘 필요가 있다. 반성 역시 구성주의자들이 중요시하는 구성 기제이다. 프로이덴탈(1991:105-106)은 반성의 여러 양상 중 관점의 이동에 주목한다. 관점을 바꾸는 방법 중 하나는 모방이다. 어떤 것을 모방한다는 것은 단순히 다른 사람의 행동을 그대로 따라 하는 것이 아니라, 다른 사람의 마음을 반성함으로 자신의 마음에 대한 반성이 촉발되고, 자신의 행동을 또 다시 다른 사람의 마음에 비추어 보는 순환 작용이다(Ibid.:104-105). 폴라니

도 모방을 강조하였다(Polanyi, 1962:53). 다른 사람의 행위에 자신의 행위를 비취보고 모방하며 자신의 관점을 이동하는 것은 구성주의가 말하는 사회적 상호작용의 필요성을 뒷받침한다. 그러나 아래층에서 일어나는 일에만 주의를 기울이는 구성주의자들이 제안하는 반성이나 소그룹 토론에는 기준이나 방향이 없다. 반면 수학적 지식의 구조를 구성한다고 할 때에는 반성의 방향이나, 소그룹 조직, 토론의 방향, 역할이 분명해진다. 반성이나 소그룹 토론은 한 단계 높은 사고수준으로 상승하는 발판이 되어야 한다.

이상에서 살펴본 수학적 이론, 역사-발생적 원리, 수학 학습 수준 이론은 수학적 지식의 구조의 구성이 어떤 원리에 따라 이루어져야 하는가를 시사한다. 수학이 직관에서 출발하여 통찰, 반성, 훈련을 통해 보다 높은 수준의 직관을 갖게 되는 것임을 설명하는 수학적 활동은 위층의 마음에 근거하여 아래층의 마음의 작용이 일어나고 그 결과로 위층의 마음이 점차적으로 드러나는 것임을 설명한다. 수학의 역사는 위층의 마음이 드러나는 과정, 즉 수학적 지식의 구조가 구성되는 과정을 보여준다. 따라서 수학적 지식의 구조의 구성을 추구하는 교육에서는 수학의 역사를 중요하게 고려하지 않으면 안 된다. 수학 학습 수준 이론에 의하면, 수학적 지식의 본질이 드러나는 과정은 불연속적인 수준 상승의 단계를 거친다. 그러므로 수학적 지식의 구조를 구성하는 교육을 구체화하기 위해서는 이와 같은 수준 상승의 단계를 연구하여 드러내는 일이 매우 중요하다.

나. 교사: 암묵적 지식의 현시자

프로이텐탈(1991:14-15)은 수학적 활동에는 언설로 표현 안 되는, 존재는 의식되지만 그것

이 무엇인지는 알 수 없는 부분이 있다고 하면서, 활자화되어 책에 표현되어 있는 것은 그 활동의 극히 일부일 뿐임을 지적하였다. 예컨대, 수학 교과서에 있는 내용은 아무리 이해하기 쉽게 기술되어 있다고 해도, 학생들 스스로 이 지식을 의미 있게 해석하고, 그 이면에 있는 묵식을 익히는 것은 매우 어렵다. 이것을 알도록 해주는 사람이 교사이다. 교사는 학생들이 장차 경험해야 할 수학적 지식 체계의 이면에 있는 실재를 느낀 경험이 있는 사람, 수학적 지식이 반영하는 위층의 형이상학적 마음을 갖춰가고 있는 사람이다. 학생은 먼 이상적 세계의 사람이 아닌, 자기와 동일한 세계에 살고 있는 교사의 모습 속에서, 자신과 그 사이에 존재하는 차이, 즉 현실성과 가능성의 관계를 보고, 이것을 자신의 가능성으로 받아들이게 되면서 배우게 된다. 그렇기 때문에 교사는 그러한 자신의 마음을 드러내어 학생이 이를 보고 본으로 삼을 수 있도록 해야 한다.

지식 공부의 인간 본성의 회복 과정이라는 관점에서 보면, 교사와 학생은 교육의 과정에서 지식을 매개로 하는 본성 회복이라는 동일한 일을 경험하는 것이다. 교사가 교사인 것은 이 경험에 있어 학생보다 선진이기 때문이다. 따라서 교사가 수학적 지식의 구조를 구성함으로써 수학적 지식이 표현하는 아름다움의 원천인 실재의 모습과 접촉한 경험, 이치를 깨달으며 눈앞이 환히 밝아지는 듯한 활연관통의 경험을 가지지 않으면 이것을 학생들에게 드러낼 수도 가르칠 수도 없다. 교사는 교과서에 기록된 수학적 지식의 본질이 무엇인지, 그 본질이 점차적으로 어떻게 드러나 왔는지, 다른 지식 및 다른 수학적 지식과 어떻게 연결되는지 파악하고 있어야 한다. 그래야 학생들에게 수학적 지식에 대한 안목을 갖는다는 것이 어떤 것인지 보여줄 수 있다. 이와 함께 학생들에게 다음과

같은 마음을 전달할 수 있어야 한다. 하나는 기쁨이다. 수학적 지식에 대하여 인류 전체의 역사를 통해 그 본질을 점차적으로 드러내고, 본질이 보다 명확히 드러났을 때 눈앞에 펼쳐지는 세계가 달라지는 환희의 경험이 그것이다. 다른 하나는 이와 동시에 생기는 상실감이다. 열심히 탐구하여 발견한 것이 본질인 줄 알았더니 그 이면에 다른 것이 있었다는 것, 가까이 간 줄 알았더니 그만큼 멀어져 있는 실재(이홍우, 1998b:343-346), 아무리 탐구해도 그 핵심에는 도달할 수 없는 실재 앞에서 느끼는 일종의 경외감, 인간의 한계에 대한 겸손, 그리고 이것이 인간으로서 지식을 배우고 삶을 살아가는 마땅한 자세임을 학생들에게 본으로 보여줄 수 있을 것이다.

교사는 암묵적 지식을 구현하고 있는 사람, 수학적 지식의 구조를 구성하여 수학적 지식이 반영하는 실재에 보다 다가간 사람, 학생들보다 높은 수준에서 인간 본성이 회복된 사람, 수학적 지식이 나타내는 형이상학적 마음을 소유하고자 노력하는 사람으로서, 수학적 지식을 공부하는 것은 인간 본성을 회복하는 과정임을 자기 자신을 예로 하여 드러낼 수 있어야 한다. 이것이 인간 본성의 회복이라는 관점에서 수학 교사에게 요구되는 역할과 자세이다.

다. 학생: 헌신적 참여와 변화의 주체

수학적 지식의 구조를 구성한다는 것이 궁극적으로 학습자가 태어날 때부터 갖추고 있는 인간 본성을 회복하는 것임을 의미할 때, 학생들은 변해야 할 마음을 가진 사람으로서 스스로 적극적으로 구성에 참여하여야 한다. 플라니가 지적한 바와 같이, 얇은 인식자의 ‘개인적 참여’ 없이는 불가능하다. 이때 참여는 수동적이고 소극적인 참여가 아니라, 개인의 열정적

헌신을 요구하는 참여이다. 구성주의자들의 주장처럼 수학적 지식은 능동적으로 참여하며 구성하여야 얻을 수 있다.

말할 수 없는 지식을 배우는 좋은 방법은 스승이 하는 것을 직접 보고 모방하는 것이다. 그렇게 함으로 이제는 학습자 자신이 알고는 있지만 말할 수 없게 된다. 이를 위해서는 견습 수업과 도제식 전수가 가장 이상적이다(장상호, 1994:26). 콘프레이(Confrey, 1995:204)는 비고츠키의 이론이 지지하는 교수 모델 역시 도제식 수업이라고 하였다. 학습자는 스승의 가까이에서 모방을 통하여 스승의 언행에 묻어 있는 암묵적 지식을 배울 수 있다. 이때 모방은 “직접 학문에 참여하면서 학자로서 그 말로 나타낼 수 없는 것을 실감(장상호, 1994:26)”하는 것으로, 학습자는 교사와 학문의 권위를 인정하고 받아들이며, 스스로 지식 탐구에 헌신하고, 자신의 마음을 움직이고, 그러한 노력 끝에 실재의 모습을 접촉하는 기쁨, 그 아름다움의 감동을 직접 경험하여야 한다.

학습자의 참여와 지적 헌신, 책임은 ‘지적 열정’으로부터 나온다(Polanyi, 1962:300). 인간은 실제적인 용도가 없다고 하더라도 지식을 내면화하고 탐구하는 활동 자체에 흥미와 가치, 그리고 희열을 느낄 수 있다. 지적 열정은 만족을 추구하고, 기쁨을 추구한다. 이때, 지적 기쁨의 근원이자 추구 대상은 아름다움이다. 지적 아름다움은 진리의 징표가 되며, 숨겨진 실재를 나타내준다. 그렇기 때문에 지식을 탐구하는 활동의 추진력은 외부에 있는 것이 아니라 이 아름다움에 대한 사랑에 있고, 이것은 곧 실재에 대한 사랑, 진리에 대한 추구, 태어날 때부터 갖추고 있지만 드러나지 않고 있는 인간 본성에 대한 동경이다. 우리는 수학적 지식의 구조를 구성하면서 궁극적으로 이 실재를, 본성을 경험하게 되고, 이때 그것이 주는 정서적 희열을

갖게 된다. 이러한 감정은 여러 수학자들이 지적하였다(Poincaré, 1958; Freudenthal, 1991:92). 폴라니는 이 감정은 지식 탐구를 통해 실재에 접촉하는 경험에 따르는 감정이라고 하였다(Polanyi, 1962:145). 이것을 성리학의 용어로 표현하자면 활연관통의 기쁨이다. 완전한 활연관통, 실재가 주는 완전한 기쁨은 우리의 마음이 실재와 하나가 되었을 때, 인간 본성이 완전히 회복되었을 때 가능하지만, 수학을 공부하면서 비록 불완전한 수준이나마 활연관통을 경험하며, 기쁨도 경험하게 된다. 수학을 아무리 잘해도 이러한 정서적 느낌이 따르지 않는다면 수학을 제대로 공부하고 있는 것이 아니다. 이러한 기쁨과 정서적 희열을 느껴 본 사람은 이를 계속 추구하게 된다. 왜냐하면 그것은 인간이 본래부터 가지고 있는 본성에서 비롯된 것이기 때문이다. 인간은 원래 천성적으로 그렇게 하게 되어 있다.

수학적 지식의 구조를 구성한다는 것이 아래층의 수학 지식체계를 통하여 수학적 지식의 구조라는 위층의 마음을 지향하는 것이라면, 그렇게 함으로 궁극적으로 인간의 본성을 회복하는 것이라면, 이때 일어나는 마음의 변화는 총체적이어야 한다. 앎의 행위, 배움의 행위, 수학적 지식의 구조를 구성하는 행위는 마음의 총체적 작용이며 총체적 변화이고, 그 원동력은 아름다움이다. 수학을 공부하며 느낄 수 있는 기쁨, 아름다움에 대한 감동은 수학을 공부하면 할수록 그것의 근원인 실재와 더 가까워지기 때문에, 더욱 커지며, 이 순환 작용을 통하여 학습자 안에 있는 형이상학적 마음이 점차적으로 드러나게 된다. 이것은 유용성과 필요성과는 차원이 다른 목적을 지향하며, 개인의 희망, 적성, 흥미에 따라 취사선택할 것이 아니라 인간이라면 누구나 마땅히 해야 하는 일이다.

V. 요약 및 결론

본 논문은 수학적 지식을 구성한다는 것이 무엇을 의미하는가에 대하여 연구하였다. 이를 위하여 구성주의자들이 수학적 지식의 구성을 어떻게 설명하며, 이들의 설명은 어떤 문제점을 지니고 있는가, 그리고 이 문제점은 어떻게 보완될 수 있는가를 살펴보았다. 구성주의자들은 수학적 지식의 구성에 대하여 표면적으로는 경험세계에서 일어나는 구성작용만 논의하고 있지만, 그 논의의 이면에는 구성능력이 존재하는 선형적 세계가 가정되고 있으며, 따라서 구성주의가 내세우는 상대주의 지식관으로는 수학적 지식의 구성을 설명하는 데 필연적인 한계가 있다. 반면, 구조주의는 수학적 지식의 구조라는 학습의 기준과 대상을 강조하지만 경험세계에서 시간의 계열을 따라 학습자의 마음속에서 일어나는 수학 학습을 설명하는 데에는 역시 필연적인 한계가 있다. 이 두 이론은 서로를 보완하는 역할을 한다. 바꾸어 말하자면 수학적 지식의 구성은 다름 아닌 수학적 지식의 구조의 구성이어야 한다. 본 논문에서는 수학적 지식의 구조를 구성한다는 것이 구체적으로 어떤 일인가를 폴라니의 인식론을 바탕으로 하여 살펴보았다. 이에 의하면, 수학적 이론, 역사-발생적 원리, 학습수준 이론은 수학적 지식의 구조의 구성원리가 된다.

수학적 지식을 구성한다는 것이 무엇을 의미하는가를 찾고자 하였던 본 논문에서 밝혀낸 것은 수학적 지식을 구성한다는 것은 수학적 지식이 반영하는 인간의 본성을 회복하는 일이라는 것이다. 인간의 본성은 경험 세계의 마음을 구분 없이 모두 농축하여 가지고 있는 위층의 마음으로, 그 자체에는 지식의 구분이 없다. 수학적 지식의 본질은 여기에 해당한다. 이것은 기본적으로 무엇인지 말로 표현할 수도 없

고, 영원히 도달할 수도 없는 실재이다. 그렇기 때문에 수학을 배우며 우리는 현상의 세계를 살아가는 인간으로서 실재에 영원히 도달할 수 없음에 대한 상심과 실재 자체가 주는 희열과 아름다움을 동시에 느끼게 된다. 그러나 그것이 인간의 본성인 만큼, 인간된 도리로서 누구나 마땅히 추구해야 하는 일이다. 수학 교사와 수학교육 연구자들은 학생들이 이 일을 잘 추구할 수 있도록 도와줘야 할 책임이 있다. 앞으로 이에 관한 많은 후속 연구가 필요하다.

참고문헌

- 강홍규(2004). Dewey에게 있어서 수학적 지식의 구성의 의미. *수학교육학연구*, 14(1), 129-142.
- 김지현(2000). 비고츠키의 知識占有過程과 言語媒介機能에 관한 교육학적 고찰. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 목영해(1998). 구성주의의 본질적 측면에 대한 몇 가지 고찰. *교육학연구*, 36(1), 171-186.
- 박은주(2000). 格物致知論의 교육학적 함의. 이홍우·유한구(편). *교육의 동양적 전통 I: 敎科와 實在(성경재 연구총서2)*, 443-471. 서울: 誠敬齋.
- 박재문(1998). *지식의 구조와 구조주의, 교육과정철학총서1*. 서울: 교육과학사.
- 신춘호(2005). *교육이론으로서의 칸트 철학: 판단력 비판 해석*. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 우정호(1995). Radical Constructivism versus Piaget's Operational Constructivism in Mathematics Education. *대한수학교육학회 논문집*, 5(1), 1-17.
- _____ (2000). *수학 학습-지도 원리와 방법*. 서울: 서울대학교 출판부.
- 이홍우(1998a). *지식의 구조와 교과(증보판)*. 서울: 교육과학사.
- _____ (1998b). *교육의 목적과 난점(제6판)*. 서울: 교육과학사.
- _____ (2000a). *성리학의 교육이론*. 서울: 誠敬齋.
- _____ (2000b). 敎科의 內面化. *아시아교육연구*, 1(1), 249-271
- _____ (2000c). 人間本性論. 이홍우·유한구(편). *교육의 동양적 전통 I: 敎科와 實在(성경재 연구총서2)*, 35-68. 서울: 誠敬齋.
- _____ (2000d). 理氣哲學에 나타난 교육이론. 이홍우·유한구(편). *교육의 동양적 전통 I: 敎科와 實在(성경재 연구총서2)*, 159-190. 서울: 誠敬齋.
- _____ (2001). *교과와 실재. 도덕교육연구*, 13(1), 1-25.
- 임재훈(1999). 수학교육에서의 구성주의. 한국교원대학교 초등교육연구소(편). *구성주의와 교과교육, 초등교육연구1*, 217-240. 서울: 문음사.
- 임재훈·홍진곤(1998). 조작적 구성주의와 사회적 구성주의에서 구성의 의미와 과정. *대한수학교육학회 논문집*, 8(1), 299-312.
- 장상호(1994). (Polanyi) 인격적 지식의 확장. 서울: 교육과학사.
- 장성모(1998). *주자와 왕양명의 교육이론(교육과정철학총서5)*. 서울: 교육과학사.
- Beth, E. W., & Piaget, J. (1966). *et al.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Bourbaki, N. (1950). The architecture of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 57(4), 221-232.
- Bowers, J., Cobb, P., & McClain, K. (1999). The evolution of mathematical practices: a

- case study. *Cognition and Instruction*, 17(1), 25-64.
- Bruner, J. S. (1973). The process of education. Cambridge & New York, Harvard University Press. (이홍우, 역, 1990). *교육의 과정*. 서울: 배영사.
- Campbell, S. R. (2002). Constructivism and the limits of reason: revisiting the Kantian problematic. *Studies in Philosophy and Education*, 21, 421-445.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992a) Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 99-122.
- _____ (1992b) A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2-33.
- Confrey, J. (1995). How compatible are radical constructivism, sociocultural approaches and constructivism?. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 185-225). Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.
- Dieudonné J. (1972) Abstraction in mathematics and the evolution of algebra. In W. E. Lamon (Ed.), *Learning and the nature of mathematics* (pp. 99-113). Chicago: Science Research Associates, Inc.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London; Washington D.C., The Falmer Press.
- _____ (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, New York, State University of New York Press
- Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*. 12, 133-150. Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company.
- _____ (1991). *Revisiting mathematics education ; China lectures*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.
- Hamlyn, D. W. (1990). *경험과 이해의 성장*. (이홍우 외, 역). 서울: 교육과학사. (영어 원작은 1978년 출판)
- Hsueh, Y. (1997). *Jean Piaget, spontaneous development and constructivist teaching*. Unpublished doctoral dissertation, Harvard University.
- Kant, I. (1781, 1787). *Kritik der reinen Vernunft*(Critique of Pure Reason). (백종현, 역, 2006). *순수이성비판 1, 순수이성비판2*. 서울: 아카넷.
- Nutter, J. T. (1979). *Structuralism in the foundations of mathematics*. Unpublished doctoral dissertation, State University of New York, Buffalo.
- Olive, J., & Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: the case of Joe. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 413-437.
- Piaget J. (1970). *Structuralism*. (C. Maschler, Trans.). New York: Basic Books, Inc. (김태수, 역, 1990). *구조주의의 이론(현대프랑수아 학총서)*, 17-142. 서울: 인간사랑. (프랑스어 원작은 1968년 출판).
- Poincaré, H. (1958). *Science and method*. (F. Maitland, Trans.). New York: Dover Publications, INC (Original work published 1924).

- Polanyi, M. (1962). *Personal knowledge: towards a post-critical philosophy*. Chicago: University of Chicago Press.
- _____ (1967). *The tacit dimension*. New York: Anchor Books.
- _____ (1969). *Knowing and being: essays by Michael Polanyi*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Posy, C. J. (1974). Brouwer's constructivism. *Syntheses*, 27, 125-159.
- Rowlands, S., Graham, T., & Berry, J. (2001). An objectivist critique of relativism in mathematics education. *Science & Education*, 10, 215-241.
- Schmidt S. J. (1995). "편집자의 서문", "한국어판의 독자를 위하여", "급진적 구성주의: 학제적 담론의 새로운 패러다임". (박여성, 역). *구성주의*, 1-91. 서울: 도서출판까치. (독어 원작은 1987년 출판).
- Sfard, A., & Avigail, S. (2006). When the rules of discourse change, but nobody tells you - the case of a class learning about negative numbers. *수학교육논총*, 29, 1-37
- Steffe, L. P. (1990). Mathematics curriculum design: a constructivist's perspective. In L. P. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education: international perspectives* (pp. 389-398). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- _____ (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 267-307.
- Steffe, L. P., & Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 711-733.
- Steffe, L. P., & Wiegel, H. G. (1996). On the nature of a model of mathematical learning. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 477-498). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Suchting, W. A. (1992). Constructivism Deconstructed. *Science & Education*, 1(3), 223-254.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Orlando: Academic Press Inc.
- von Glasersfeld, E. (1990a). An exposition of constructivism: why some like it radical. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 4, 19-29.
- _____ (1990b). Environment and communication. In L. P. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education: international perspectives* (pp. 30-38). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- _____ (1995). *Radical constructivism: a way of knowing and learning*. London: Washington D.C. The Falmer Press.
- _____ (1996). Aspects of radical constructivism and its educational recommendations. In L. P. Steffe, P. Nesher, G. A. Goldin & B. Greer, (Eds.) *Theories of mathematical learning* (pp. 307-314). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Vygotsky, L. S. (1978). Cole M. (Trans. ed.)

Mind in Society: the Development of
Higher Psychological Processes, Cambridge,
Harvard University Press

_____ (1986). *Thought and
language*. Cambridge Massachusettes, MIT
Press.

_____ (1998). Pedology of the
adolescent. In R. W. Rieber (Ed.), *The
collected works of L. S. Vygotsky: Vol. 5.
child psychology*. (pp. 1-184). New York:
Plenum Press.

A Study on the Construction of Mathematical Knowledge

Woo, Jeong Ho (Seoul National University)

Nam, Jin Young (Yeongsin High School)

The purpose of this study is to uncover weaknesses in the constructivism in mathematics education and to search for ways to complement these deficiencies. We contemplate the relationship between the capability of construction and the performance of it, with the view of the 'Twofold-Structure of Mind.' From this, it is claimed that the construction of mathematical knowledge should be to experience and reveal the upper layer of Mind, the Reality. Based on the examination on the conflict and relation between the structuralism and the constructivism, with reference to the 'theory of principle' and the 'theory of material force'

in Neo-Confucianist theory, it is asserted that the construction of mathematical knowledge must be the construction of the structure of mathematical knowledge. To comprehend the processes involved in the construction of the structure of mathematical knowledge, the epistemology of Michael Polanyi is studied. And also, the theory of mathematization, the historico-genetic principle, and the theory on the levels of mathematical thinking are reinterpreted. Finally, on the basis of the theory of twofold-structure, the roles and attitudes of teachers and students are discussed.

* **Key words** : constructivism(구성주의), construction(구성), structuralism(구조주의), Twofold-structure of mind(마음의 중층구조), Neo-Confucianist theory (성리학), Polanyi(폴라니)

논문접수: 2008. 1. 2

심사완료: 2008. 2. 15