

비선형 불규칙 진동 보의 등가에너지법에 의한 선형화

이신영*, G. Q. Cai⁺

(논문접수일 2007. 9. 6, 심사완료일 2007. 10. 29)

Linearization of Nonlinear Random Vibration Beam by Equivalent Energy Method

Sin-Young Lee* and G. Q. Cai⁺

Abstract

Nonlinear dynamic system under random excitation was analyzed by using stochastic method. A linearization method was used in order to linearize non-linear structural characteristics but the parametric excitation was used as it was given. An equivalent energy method which equalizes the expectation value of energy of the original nonlinear system and that of quasi-linearized system was proposed. Ito's differential rule was applied to obtain steady state moments. Quasi-linearization coefficients can be obtained the iterative calculation of linearization scheme and steady state moments. Monte Carlo simulation was used to verify the results of the proposed method. Nonlinear vibration of a slender beam was analyzed in this research. The analysis results were compared with Monte Carlo simulation result and showed good agreement. As the spectral density of the given excitation increased, the analysis results showed the better agreement with Monte Carlo simulation.

Key Words : Nonlinear system(비선형 시스템), Probabilistic method(확률론적 방법), Equivalent energy method(등가에너지법), Expectation value(기댓값), Monte Carlo simulation(몬테카를로 시뮬레이션)

1. 서론

공작기계 및 일반 기계 시스템의 많은 부분들은 절삭과 같은 내부 요인 또는 도로 요철과 같은 외부 요인에 의하여 진동을 받으며 사용되고, 정밀한 모델링에 의하면 비선형 시

스템으로 모델링된다. 또한 일정한 진동을 받는 경우도 많지만, 가진이 규칙적이지 않은 경우가 종종 있으므로 불규칙 진동을 받는 비선형 시스템의 해석 및 제어가 필요하다. 불규칙 진동을 받는 비선형 시스템의 여러 가지 해석 방법 중 널리 사용되는 방법으로 통계적 선형화 방법이 있다⁽¹⁻⁶⁾.

* 군산대학교 기계공학부 (sinylee@kunsan.ac.kr)
주소: 573-701 전북 군산시 미룡동 산68

+ Florida Atlantic University

통계적 선형화의 기본 아이디어는 비선형 시스템을 그것과 비슷한 거동을 하는 등가 선형 시스템으로 대체하는 것이다. 본질적으로 이 방법은 결정론적 선형화 방법을 일반화 한 것이다⁽⁸⁾.

오차를 최소화하기 위하여 일반적으로 사용하는 기준은 오차 과정의 제곱 평균을 최소화하는 것이다. 이 기준으로부터 선형화 시스템의 매개 변수를 구할 수 있다. 이전의 논문⁽¹⁰⁾에서는 다자유도 비선형 시스템에 주요한 영향을 미치는 불규칙 가진이 작용하는 경우에 근사해를 구하는 과정에 대하여 오차 기댓값 최소화에 의한 방법으로 연구하였다. 그 방법은 불규칙 가진 스펙트럼의 값이 작은 경우 좋은 결과를 나타내었으나 불규칙 가진의 크기가 커질수록 오차가 증가하였다. 따라서 새로운 해석 방법이 필요하다고 할 수 있으며, 본 논문에서는 이전의 방법에 의한 오차를 감소시키기 위하여 원래의 비선형계와 준선형화 계에 있어서의 강성 및 감쇠 에너지를 등가로 하도록 등가에너지 법에 착안하여 선형화 계의 매개 변수를 구하고자 하였다.

변수 가진 항은 선형화 하지 않았으며, 통계적 적률에 의하여 진동 문제를 해석하였다. Ito의 미분규칙⁽⁶⁾을 사용하여 해석 절차를 진행하였으며 적분 변환에 의하여 스펙트럼 밀도 함수를 구하였다. 준선형화 계수를 구하기 위하여, 비선형 계와 준선형화 계의 에너지의 기댓값을 같도록 하는 해석 방법에 의한 해석을 실시하고 본 방법에 의하여 구한 해와, 몬테카를로 시뮬레이션에 의하여 구한 해 및 이전의 논문에서 구한 결과를 비교하였다. 그 결과 불규칙 가진 스펙트럼이 증가할 때 오차가 감소함을 확인하였다.

2. 비선형 보의 굽힘과 비틀림 연성

폭이 좁은 직사각형 단면을 갖는 균일 탄성 보를 고려한다. Fig. 1과 같이 양단이 단순 지지되어 있고, 양단에서 불규칙하게 변화하는 굽힘 모멘트 $M(t)$ 를 받는다고 한다. 양단의 굽힘 모멘트는 같은 크기이고 광대역 정상 과정이라고 가정한다. 선형 시스템인 경우 보의 운동 지배방정식은 다음과 같다⁽⁹⁾.

$$EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + m\ddot{v} + \alpha v = 0 \quad (1a)$$

$$EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + M(t) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + m\ddot{u} + \beta u = 0 \quad (1b)$$

$$M(t) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - GJ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + m\rho^2 \ddot{\phi} + \gamma \phi = 0 \quad (1c)$$

여기에서 $v=y$ 방향에서의 변위, $u=x$ 방향에서의 변위, ϕ = 비틀림각, $EI_x=x$ 축에 관한 굽힘 강성, $EI_y=y$ 축에 관한 굽힘 강성, GJ = 비틀림 강성, m = 단위 길이 당 보의 질량, ρ =보 단면의 극 회전반경, α, β, γ 는 점성 감쇠계수이다. u 와 ϕ 운동은 연성되어 있고, v 운동과는 비연성이다. 이 보의 경우 x 축에 관한 굽힘 변형에 대하여 강하므로 연성된 u 와 ϕ 운동이 가장 큰 실용적 관심의 대상이 된다. 기본 모드만을 고려하고 무차원 변수를 도입하여 정리하면,

$$\omega_1^2 = \frac{\pi^4 EI_y}{ml^4}, \quad \omega_2^2 = \frac{\pi^2 GJ}{ml^2 \rho^2}, \quad 2\zeta_1 \omega_1 = \frac{\beta}{m},$$

$$2\zeta_2 \omega_2 = \frac{\gamma}{m\rho^2}, \quad \eta(t) = \frac{M(t)}{M_{cr}}, \quad (2)$$

$M_{cr} = \pi(EI_y GJ)^{1/2} / l$ 은 정적 좌굴 모멘트..

$$\ddot{Q}_1 + 2\zeta_1 \omega_1 \dot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = \omega_1 \omega_2 Q_2 \eta(t) \quad (3a)$$

$$\ddot{Q}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = \omega_1 \omega_2 Q_1 \eta(t) \quad (3b)$$

횡 변위에 의한 감쇠력이 속도의 3승 항을 갖는 비선형이고 횡 변위에 외란이 작용한다고 하면 다음과 같은 비선형 변수 가진 방정식을 얻는다.

$$\ddot{Q}_1 + 2\alpha \dot{Q}_1 + \lambda Q_1^3 + \omega_1^2 Q_1 = \omega_1 \omega_2 Q_2 \eta(t) + \xi(t) \quad (4a)$$

$$\ddot{Q}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = \omega_1 \omega_2 Q_1 \eta(t) \quad (4b)$$

식 (4)의 시스템에 선형화 기법을 적용한다. 비선형시스템이 선형 시스템으로 대체될 수 있다면 선형 시스템에 대한 모든 기법을 적용하여 비선형 문제의 응답에 대한 근사적 예측을 할 수 있다⁽²⁾. 시스템 (4a)에 선형화를 적용하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

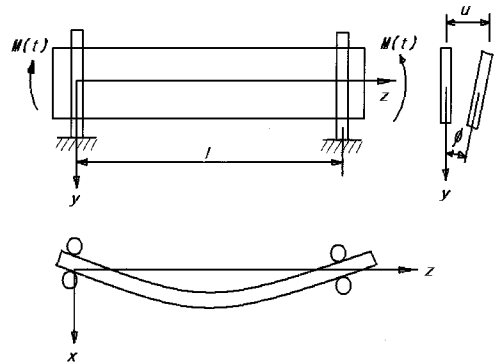


Fig. 1 A beam with narrow rectangular cross section

$$\ddot{Q}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = \omega_1\omega_2 Q_2\eta(t) + \xi(t) \quad (5a)$$

$$\ddot{Q}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = \omega_1\omega_2 Q_1\eta(t) \quad (5b)$$

$\eta(t)$ 와 $\xi(t)$ 는 가우스 백색잡음이다.

새로운 변수를 선정하여 $X_1 = Q_1$, $X_2 = \dot{Q}_2$, $X_3 = Q_1$, $X_4 = \dot{Q}_2$ 라고 하면, 일반 형식은

$$\frac{d}{dt}X_i = f_i(X) + g_{ij}(X)W_j(t) \quad (6)$$

$$i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2$$

Ito의 통계학적 미분 규칙⁽⁸⁾으로부터, 다음과 같은 미분방정식을 얻는다.

$$dX_i = \left(f_i + \pi K_{is}g_{rs} \frac{\partial g_{il}}{\partial X_r} \right) dt + \sqrt{2\pi K_{is}g_{ij}g_{js}} dB_j(t) \quad (7)$$

여기에서 $B_j(t)$ 는 독립적인 단위 Wiener 과정이고, K_{is} 는 $W_k(t)$ 와 $W_s(t)$ 의 상호스펙트럼밀도이다. 적률을 $M = m_{ijkl} = E[X^i X^j X^k X^l]$ 라고 하면, (7)에 대한 2차 적률의 앙상블 평균 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E[M] = E \left[\left(f_i + \pi K_{is}g_{rs} \frac{\partial g_{il}}{\partial X_r} \right) \frac{\partial M}{\partial X_i} \right] \\ + \pi K_{is} E \left[g_{ij}g_{js} \frac{\partial^2 M}{\partial X_i \partial X_j} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)의 좌변은 n 차 통계 적률의 시간 미분이고, $n = i + j + k + l$ 이며, 우변은 f_i 와 g_k 의 함수 형태에 의존한다. 정상 적률에 대하여는 식 (8)의 좌변은 0으로 놓아 선형 대수 방정식만을 풀면 된다. 준선형 시스템에 대하여 정상 적률은 어떤 조건에서만 존재하고, 더 높은 차수의 적률에 대해서는 더 제한적인 조건이 필요하다. 시스템 (5)의 2차 적률을 구하면, 10 개의 변수를 갖는 연립 방정식으로부터

$$\begin{aligned} m_{2000} = \frac{2\pi\zeta_2 K_{\xi\xi}}{\omega_1^3(4\zeta_1\zeta_2 - \pi^2\omega_1\omega_2 K_{\eta\eta})}, m_{0020} = \omega_1^2 m_{2000}, \\ m_{0200} = \frac{\pi\omega_1^2 K_{\eta\eta}}{2\zeta_2\omega_2} m_{2000}, m_{0002} = \omega_2 m_{0200} \end{aligned} \quad (9)$$

그 외의 2차 적률은 0이다.

4차 적률에 대하여는 35 개의 미지수가 존재하는 연립 방정식을 풀어야 한다. 예를 들면,

$$3m_{2110} + m_{3001} = 0$$

$$\begin{aligned} 3m_{2020} - 2\zeta_1\omega_1 m_{3010} - \omega_1^2 m_{4000} = 0 \\ 3m_{2011} - 2\zeta_2\omega_2 m_{3001} - \omega_2^2 m_{3100} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} 2\zeta_1\omega_1 m_{2020} - m_{1030} + \omega_1^2 m_{3010} \\ - \pi K_{\eta\eta}\omega_1^2\omega_2^2 m_{2200} = \pi K_{\xi\xi} m_{2000} \\ 3m_{0202} - 2\zeta_2\omega_2 m_{0301} - \omega_2 m_{0400} = 0 \end{aligned}$$

선형화 전후의 에너지 기댓값이 같도록 하는 등가에너지 법 조건을 설정하면, 식 (4)와 (5)의 감쇠 에너지의 기댓값이 동일할 조건으로부터

$$E[\zeta_1\omega_1 X_3^2] = E\left[\alpha X_3^2 + \frac{1}{4}\lambda X_3^4\right] \quad (11)$$

$$\text{정리하면 } \zeta_1 = \frac{\alpha_1}{\omega_1} + \frac{\lambda m_{0040}}{4\omega_1 m_{0020}} \quad (12)$$

식 (9), (10) 및 식 (12)를 반복적으로 풀면 선형화 감쇠계수를 구할 수 있다.

3. 몬테카를로 시뮬레이션

몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation, MCS)은 계산을 수행하기 위하여 난수(random number)의 수열을 이용하는 방법을 가리키는 일반적인 용어이다^(12,13). 몬테카를로 시뮬레이션의 기본 절차는 (1) 불규칙 입력 생성, (2) 시스템 모델, (3) 시스템 출력, (4) 출력치의 통계적 처리이다. 입력치의 생성은 보통 두 단계로 나누어진다. 첫 단계는 난수 발생기에 의하여 균일한 분포를 갖는 난수를 얻는 것이고, 두 번째 단계는 변환장치를 사용하여 균일한 분포의 난수를 특정한 분포의 난수로 변환하는 작업이다. 본 연구에서는 난수 발생법으로 다음과 같은 선형 조화 발생기(linear congruential generator)를 사용하였다.

$$X_{n+1} = (A \times X_n + C) \text{mod} M \quad (13)$$

여기에서 X_{n+1} 은 새로 발생되는 난수, X_n 은 직전에 발생된 난수, A 는 배수로서 양의 수, 증분 C 는 0이상, 모듈 M 은 $M > X_n$, $M > A$, 및 $M > C$. 발생되는 수열의 특성은 상수 A , C 및 M 의 선택에 의존한다. 균일하게 분포하는 실수의 수열을 박스뮐러(Box-Muller) 방법에 의하여 정규분포 수열로 변환하였고, 비선형 시스템의 시간이력 해석을 위하여 룬게쿠타(Runge-Kutta) 방법을 사용하였다^(14,15).

4. 계산 결과 및 고찰

4.1 $\omega_1 = 5, \omega_2 = 25$ 인 경우의 해석 결과

수치 예제 1로써 $\omega_1 = 5, \omega_2 = 25, \alpha = 0.5, \zeta_2 = 0.1$ 인 경우에 해석을 실시하고, MCS(Monte Carlo simulation)의 결과와 비교하였다. 우선 MCS와 해석적 방법의 유효성을 확인하기 위하여 $\lambda \approx 0, K_{\eta\eta} \approx 0, K_{\xi\xi} = 1.0$ 인 경우에 대하여 해석적 방법에 의한 스펙트럼 밀도와 MCS에 의하여 얻어진

시각이력 해석을 푸리에 변환하여 얻어진 스펙트럼 밀도를 비교하였다. Fig. 2와 같이 두 결과가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

Figs. 3~4는 $K_{\eta\eta} = 0.001$ 인 경우 $K_{\xi\xi}$ 에 따른 $E[Y_1^2]$ 을 나타낸다. 등가에너지 방법에 의한 결과를 몬테카를로 시뮬레이션의 결과와 비교하였다. Fig. 3에서 λ 의 값은 0.1이고 Fig. 4에서 λ 는 1.0이었다. Figs. 5~7은 $K_{\eta\eta}$ 의 값이 0.004~0.005일 때의 경우를 나타낸다.

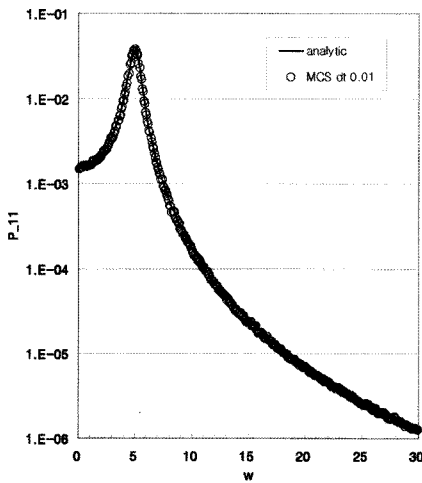


Fig. 2 Spectral density where $K_{\xi\xi} = 1.0$

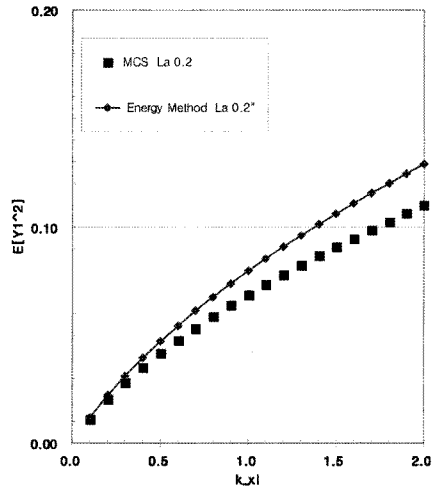


Fig. 3 Stationary mean square values of response Y_1 where $\lambda = 0.2$ and $K_{\eta\eta} = 0.001$

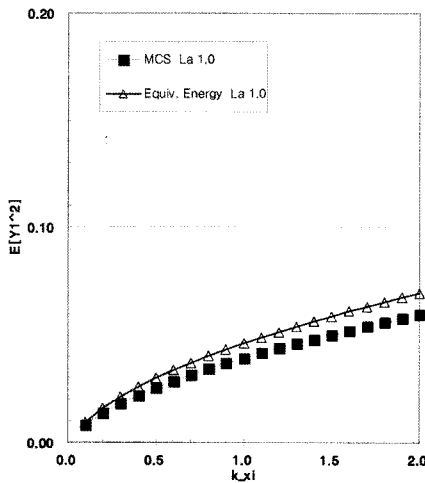


Fig. 4 Stationary mean square values of response Y_1 where $\lambda = 1.0$ and $K_{\eta\eta} = 0.001$.

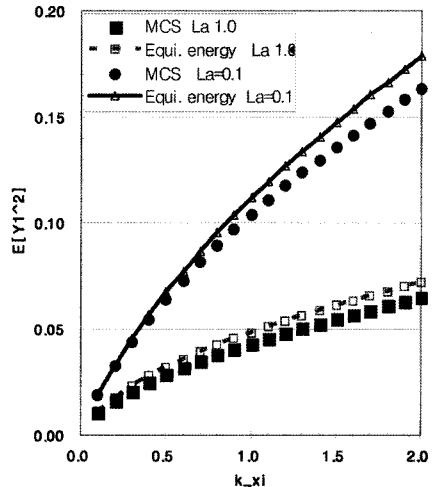


Fig. 5 Stationary mean square values of response Y_1 where $K_{\eta\eta} = 0.004$

$K_{\eta\eta}$ 의 값이 클수록 등가에너지법의 결과가 MCS의 결과에 근접해가는 것을 볼 수 있다.

4.2 $\omega_1 = 6, \omega_2 = 20$ 인 경우의 해석 결과

수치 예제 2로써 $\omega_1 = 6, \omega_2 = 20, \alpha = 0.6, \zeta_2 = 0.1$ 인 경우에 수치해석을 실시하고, MCS의 결과와 비교하였다. Fig. 8은 $K_{\eta\eta} = 0.001$ 인 경우 $\lambda = 0.2$ 및 $\lambda = 1.0$ 인 경우에 등가에너지 방법에 의한 준선형화 해석 방법 및 MCS의 결과를 비교한 것이다. 앞의 Figs. 3~7에서와 같이 MCS의 결과는

등가에너지법의 결과에 일치한다고 볼 수 있다.

Fig. 9는 $K_{\eta\eta} = 0.004$ 의 경우에 대한 해석이고 4.1절의 경우와 같이 $K_{\eta\eta}$ 의 값이 상대적으로 큰 경우로서 등가에너지 해석의 결과가 MCS의 결과에 더 가까운 경향을 나타내고 있다. Figs. 3~9를 종합적으로 검토하면, 기대오차 최소화 방법이 전체적인 견지에서 아래 한계값을 나타내는데 대하여, 등가에너지 방법에 의한 해석인 식 (12)는 위 한계값을 나타낸다. MCS의 해석 결과와 비교한 결과, $K_{\eta\eta}$ 의 값이 증가함에 따라 등가에너지 해석 결과의 방향으로 이동하였다.

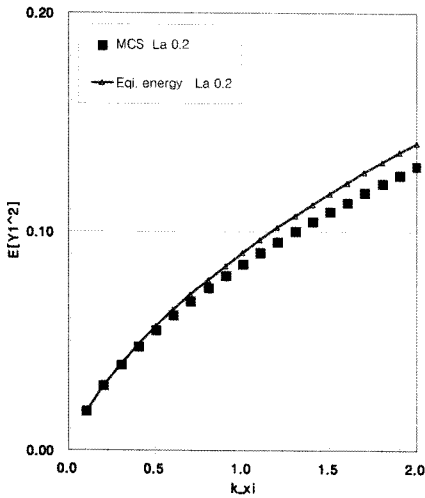


Fig. 6 Stationary mean square values of response Y_1 where $K_{\eta\eta} = 0.0045$

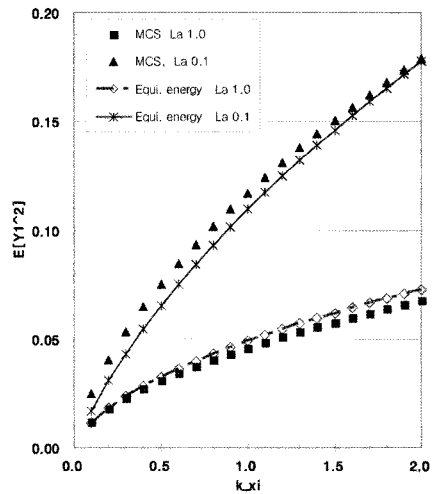


Fig. 7 Stationary mean square values of response Y_1 where $K_{\eta\eta} = 0.005$

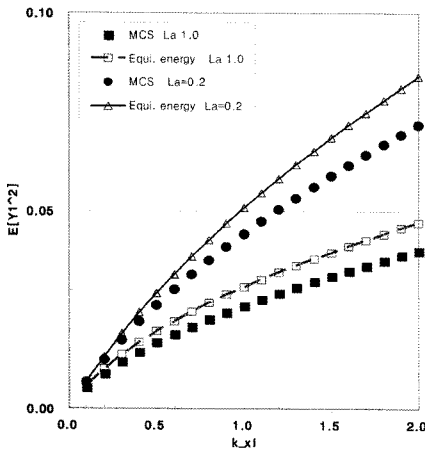


Fig. 8 Stationary mean square values of response Y_1 where $K_{\eta\eta} = 0.001$

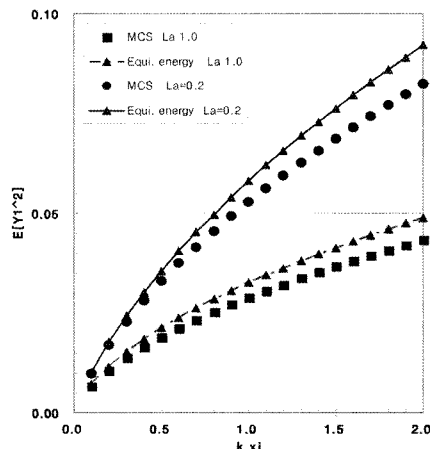


Fig. 9 Stationary mean square values of response Y_1 where $K_{\eta\eta} = 0.004$

5. 결론

비선형 진동 시스템이 불규칙 가진을 받고 매개변수 가진을 포함하는 경우를 해석하기 위하여 통계적 방법을 사용하였다. 해석을 위하여 시스템의 비선형성만을 선형화하는 준선형화 방법을 사용하였고, 가진 항은 주어진 그대로 사용하였다. 원래의 비선형 시스템과 준선형화된 시스템의 에너지의 기댓값을 같도록 하는 등가에너지 방법에 의한 해석을 실시하고 그 결과들을 MCS의 결과와 비교하였다.

본 방법에 의한 해석 결과는 MCS의 결과보다 약간 큰 값을 나타내었다. 이는 오차제곱의 기댓값을 최소로 하는 이전 연구 결과에서 MCS보다 작은 값을 나타낸 것과 대조적이며, 따라서 이들 결과를 조합하면 보다 근사한 결과를 얻을 수 있을 것으로 사료된다.

참고 문헌

- (1) Chen, J. B., and Li, J., 2005, "Dynamic response and reliability analysis of non-linear stochastic structure," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 20, pp. 33~44.
- (2) Spanos, P. D., and Zeldin, B. A., 1998, "Monte Carlo treatment of random fields: a broad perspective," *Applied Mechanics Review*, Vol. 51, No. 3, pp. 219~237.
- (3) Klosner, J. M., and Haber, S. F., 1992, "Response of non-linear systems with parameter uncertainties," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 27, No. 4, pp. 547~563.
- (4) Liu, W. K., Besterfield, G., and Belytschko, T., 1988, "Transient probabilistic systems," *Computing Methods on Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 67, No. 1, pp. 27~54.
- (5) Iwan, W. D., and Huang, C. T., 1996, "On the dynamic response of non-linear systems with parameter uncertainty," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 31, No. 5, pp. 631~645.
- (6) Jeong, S. H., Cha, K. R., and Ryu, S. H., 1999, "A Study on the Stability of Supervisory Control for Nonlinear System with Saturating Input," *Journal of KSMTE*, Vol. 8, No. 4, pp. 112~122.
- (7) To, C. H. S., 2000, *Nonlinear Random Vibration: Analytical Techniques and Applications*, Swets & Zeitlinger B.V., Lisse, the Netherlands.
- (8) Lin, Y. K., and Cai, G. Q., 2004, *Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York.
- (9) Ariaratnam, S. T., and Srikantaiah, T. K., 1978, "Parametric instabilities in elastic structures under stochastic loading," *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 6, pp. 349~365.
- (10) Lee, S. Y., and Cai, G. Q., 2006, "Random Vibration Analysis of a Beam by Minimizing Expected Error," *KSMTE 2006 Fall Conference*, pp. 232~237.
- (11) Lee, S. Y., 2006, "Random Vibration of Non-linear System with Multiple Degrees of Freedom," *Journal of KSMTE*, Vol. 15, No. 5, pp. 21~28.
- (12) Marek, P., Brozzetti, J., and Gustar, M., 2001, *Probabilistic Assessment of Structures using Monte Carlo Simulation*, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Praha Czech.
- (13) Landau, D. P., and Binder, K., 2000, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- (14) Meirovitch, L., 1985, *Introduction to Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, New York.
- (15) Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., and Vetterling, W. T., 1988, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, New York.