

## 극소 및 극대 곡면 발견의 역사

고려대학교 수학과 김영욱\*  
ywkim@korea.ac.kr

고려대학교 수학과 김소영  
kutia@korea.ac.kr

고려대학교 수학과 김지연  
80459697@korea.ac.kr

극소곡면은 고전미분기하학의 꽃이며 현대에 이르기까지 기하학의 중심을 이루고 있다. 이러한 극소곡면 이론에서 가장 어려운 부분이라고 할 수 있는 극소곡면의 발견 과정을 역사적으로 조명하여 보고 이를 통하여 극소곡면 이론을 소개한다. 한편 최근에 들어 연구가 시작된 로렌츠-민코프스키 공간의 극대곡면의 예를 소개하고 극소곡면 발견 과정과 비교 연구한다.

주제어 : 극소곡면, 극대곡면

### 0. 서론

극소곡면은 미분기하의 역사에 있어서 가장 중요한 역할을 해 왔고 또 지금도 가장 중심에서 모든 이론의 나아갈 방향을 제시해 준다. 가장 단순하고도 아름다운 곡면들임에도 불구하고 가장 난해한 편미분방정식의 해가 되는 극소곡면의 이론에서 가장 어려운 부분의 하나는 극소곡면을 발견하는 것이다. 역사를 돌이켜 보면 극소곡면의 발견은 매우 더딘 진전을 보인다. 250년에 걸친 역사 동안에 최근의 20여년을 제외하면 발견된 극소곡면은 손에 꼽는다. 20세기 중반까지 극소곡면 이론에서 어려운 분야가 편미분방정식의 이론이었다면 20세기 말에 들어서 새로운 극소곡면을 구성하는 것이 더욱 어려운 분야가 되었다. 최근에 발견된 극소곡면은 대부분 기존의 극소곡면의 변형을 통하여 이루어졌다는 것을 보면 새로운 곡면의 구성은 정말로 어려운 작업임에 틀림없다.

이 논문에서 우리는 극소곡면의 발견의 역사를 따라서 그 방법론과 그 응용을 알아보고 이를 통하여 21세기에 우리가 나아가야 할 방향을 가늠할 수 있는 예로서 제시

---

\* 교신 저자

한다. 이러한 방향의 하나로 최근 물리학과와의 관계에서 관심이 불거진 극대곡면의 구성에 대하여 알아보고 극소곡면과의 유사성 및 상이성을 알아본다.

우리가 극대곡면을 생각하는 공간은 3차원 로렌츠-민코프스키 공간으로 이 공간은 Einstein의 4차원 시공간 이론을 한 차원 낮춘 공간이라고 생각할 수 있는 공간이며, 물리학과와의 관계에 있어서도 매우 중요한 역할을 하고 있다. 이 공간의 이론은 복소함수론과도 밀접한 관계에 있어서 다른 모든 이론의 시금석과 같은 공간이며 3차원 유클리드 공간의 극소곡면의 이론을 그대로 옮겨서 시험해 볼 수 있다는 장점을 가지고 있다. 이러한 이유에서 20세기 후반에 들어서 많은 수학자들이 이 공간에서 평균곡률이 0 또는 상수인 곡면의 기하학에 대하여 연구를 하고 있으며 최근에는 이러한 곡면의 예가 많이 발견되고 있다.

이 밖에도 3차원 구면이나 쌍곡공간, 나아가서는 더 복잡한 공간에서의 극소곡면 및 상수평균곡률곡면에 대하여 연구가 진행되고 있다. 그러나 이러한 연구는 아직 산발적으로 일어나고 있어서 정리할 단계에 이르지 못하였으며 그 방법론 또한 고전 극소곡면과는 많이 달라서 여기서는 취급하지 않는다.

## 1. 극소곡면 이론 전개와 역사

극소곡면의 역사는 곡면의 미분기하의 역사와 나란히 발전하여 왔다. 맨 처음 극소곡면의 예를 찾은 Euler와 극소곡면의 개념을 처음 미분 방정식으로 정립하고 이의 이론을 전개한 Lagrange, 초기 극소곡면의 예와 이론을 전개한 Meusnier, Monge 등은 미분기하학의 기초를 세우는데 공헌한 수학자들이다.

이들의 업적은 후대 기하학자들로 이어져 19세기 말의 미분기하학을 꽃피웠으며 복소함수론의 발달을 촉진시켰다. 20세기에 들어 더욱 정교해진 해석학 도구를 바탕으로 한 편미분방정식 이론의 전개에 힘입어 극소곡면 이론은 많은 해석학적 발전을 이루었으며, 20세기 말부터 이러한 이론들이 종합적으로 상호작용하여 역동적 변화를 이루어 내고 있다.

### (1) Euler

Euler는 현대 미적분학을 정립하고 미분기하학의 기초를 세운 수학자이다. 그의 가장 중요한 미분기하학적 업적은 곡면의 각 점에서 이 곡면과 수직으로 만나는 평면과의 교선의 곡률을 계산하고 이 가운데 최대와 최소가 되는 주곡률 방향의 존재를 증명한 것이다. 그는 이를 사용하여 현재 Euler의 정리인 각 방향으로의 법곡률, 즉 법선 방향의 평면과의 교선의 곡률이 이 두 주곡률  $\kappa_1, \kappa_2$ 를 사용하여

$$\kappa_\psi = \kappa_1 \cos^2 \psi + \kappa_2 \sin^2 \psi$$

꼴로 표시됨을 보였다.

극소곡면에 있어서 그의 업적은 첫 번째 극소 곡면을 발견하였다는 것이다. 그는 1744년 면적을 극소화하는 회전곡면으로 현수면(catenoid)을 발견하였다. 그는 변분법 방법론을 처음으로 고안하고 이로부터 유도된 방정식을 풀었다. 그러나 그 당시는 곡면의 곡률 개념들이 정립되기 전이어서, Euler는 이 곡면이 넓이를 극소화한다는 것은 알았지만 이것을 미분기하학적으로 표현하지 못하였다. 이러한 개념을 처음 만든 사람은 Meusnier이어서 1776년에 이르러서야 처음으로 미분기하학적인 의미로서의 극소곡면의 개념과 첫 번째 예가 발견되었다고 이야기한다.

## (2) Lagrange

Lagrange는 처음으로 변분법을 정립하였다. 그는 1760년경 곡면의 넓이함수의 변분으로 극소곡면의 방정식을 유도하였다. 1762년에 출판된 그의 'Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies'를 보면 오늘날의 Euler-Lagrange 방정식에 해당하는 방정식을 유도하는 변분법의 알고리즘을 사용하였다. 주어진 곡면이  $z = z(x, y)$  꼴일 때, Lagrange는 이 곡면이 극소곡면이 될 조건으로 본질적으로 다음 방정식을 얻었다:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right) = 0.$$

위의 방정식을 미분해 내면 다음 현대의 극소곡면 방정식을 얻을 수 있다:

$$(1+z_y^2)z_{xx} - 2z_x z_y z_{xy} + (1+z_x^2)z_{yy} = 0.$$

실제로 Lagrange는 '이 두 문제가 두 미분형식

$$pdx + qdy \quad \text{와} \quad \frac{pdy - qdx}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

이 완전미분이 되는 함수  $p$ 와  $q$ 를 찾는 것이다'라고 말하고 있다. 여기서  $p = z_x(x, y)$ ,  $q = z_y(x, y)$ 이다.

그러나 Lagrange는 이 방정식을 만족시키는 구체적인 곡면으로 평면 밖에는 찾지 못했다고 Hattendorf의 survey에 언급되어 있다. 또 당시 수학자들에게 Lagrange의 방법은 너무 형식적이고 대수적이라는 평을 받았다. 이는 아마도 변분법에 대한 이해가 부족한 상황에서 풀어내기 힘든 방정식만을 얻어 그 업적에 대하여 인정을 제대로 받지 못한 것이라 보인다.

## (3) Meusnier와 18세기 말

Meusnier는 Euler와 Monge의 미분기하학 이론을 공부하고 이를 발전시켰다. 그는 곡면과 평면의 교선의 곡률을 그 점에서의 주곡률과 두 곡면이 만나는 각으로 표시하는 Meusnier의 정리를 발견하였다.

그는 1776년 처음으로 Lagrange의 방정식을 만족시키는 곡면으로 현수면(catenoid)과 나선면(helicoid)이 있음을 알아내었다. 1785년에는 이 방정식을 만족시키는 극소곡면이, 바로 각 점에서의 주곡률 방향의 두 곡률반경이  $R_1 = -R_2$ 를 만족시키는 (따라서 두 주곡률의 합이 0인) 곡면임을 보였다. Meusnier의 스승인 Monge는 Euler의 논문에 대하여 알고 있지 못했고, Meusnier는 Lagrange에 대한 평가가 없는 것으로 보아 그들을 별로 중요하게 생각하지 않았다고 보인다.

1784년에 G. Monge, 1787년에 A. Legendre, 그리고 그 후에 Lacroix, Ampère등이 Lagrange의 방정식을 적분하여 극소곡면의 좌표를 해석함수로 표현하는 공식을 만들었다.

#### (4) Scherk와 19세기

현수면과 나선면이 발견된 지 60년 가까이 지난 1830년대 초반에 Scherk<sup>2)</sup>는 Monge-Legendre의 표현공식을 사용하는 대신, 변수 분리가 가능하도록 하는 조건 하에서 다섯 가지 새로운 극소곡면의 방정식을 찾아내었다. 이들은  $z_{xy} = 0$ 이라는 가정, 또는 일종의 극좌표  $(z, r, \theta)$ 에 대한  $z, \theta = 0$ 과 같은 조건 하에서 얻은 것으로 방정식

$$e^z = \frac{\cos y}{\cos x}, \quad \sin z = \sinh x \sinh y,$$

$$z = a \log[\sqrt{r^2 + b^2} + \sqrt{r^2 - a^2}] - b \arctan \frac{a\sqrt{r^2 + b^2}}{b\sqrt{r^2 - a^2}} + b\theta + c$$

으로 나타내어지는 세 곡면과  $f(x, y) = 1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{4}$ ,  $g(x, y) = \sqrt{f^2(x, y) + y^2}$  일 때, 방정식

$$\cosh \left[ 2z - \frac{y}{x} \sqrt{2f(x, y) + 2g(x, y)} + x \sqrt{2g(x, y) - 2f(x, y)} \right] = g(x, y) + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{4}$$

로 나타내어지는 곡면, 또  $f(x, y) = 4\sin^2 \frac{x}{2} + y^2 \cos x$ ,  $g(x, y) = \sqrt{f^2(x, y) + y^4 \sin^2 x}$  일 때, 방정식

$$\cosh \left[ z + \frac{\sqrt{\frac{1}{2}f(x, y) + \frac{1}{2}g(x, y)}}{\sin \frac{x}{2}} \right] = \frac{4\sin^2 \frac{x}{2} + g(x, y)}{y^2}$$

으로 나타내어지는 곡면이다.

이후 1844년에 Upsal 대학의 교수 Björling은 Grunert's Archive IV에 발표한 논문에서 극소곡면을 그 곡면 위의 한 해석곡선과 이 곡선을 따라서 이 극소곡면의 접평

2) Scherk는 Breslau, Königsberg, Göttingen등에서 공부하였고, 새로 설립된 University of Berlin에서 첫 번째로 수학 박사학위를 받았다.

면을 사용해서 표현함으로써 유명한 Björling문제와 그의 풀이를 주었다. 이 논문에는 이 문제와 유사한 몇 개의 문제가 언급되어 있다.

그러나 이 밖에 극소곡면의 일반적인 이론은 Scherk 이후 많은 노력에도 불구하고 별 진전이 없다가 1855-1890년 사이에 황금기를 맞는다. 이 기간에 위대한 기하학자 Catalan, Bonnet, Serret, Riemann, Weierstrass, Enneper, Schwarz, Weingarten, Beltrami, Ribaucour, Neovius, Darboux, Bianchi, Schoenflies 등이 기하학을 발전시켰으며 극소곡면의 이론을 미분기하의 중심에 올려놓았다. 이 기간에 많은 이론이 세워지고 예들이 발견되었다.

Hattendorf의 survey에 따르면 Catalan은 Scherk와 유사한 방법을 구사하여 1842년과 1843년의 두 논문에서 나선면이 (평면을 제외하고는) 유일한 선직극소곡면임을 보였다. 그리고 Bonnet가 극소곡면의 점근선, 곡률선, 측지선 등을 연구하였고 특정한 기하학적 조건을 만족시키는 평균곡률이 0인 곡면을 탐구하였다고 하였다. 예를 들면 곡면이 어떤 곡선과 이의 나선운동(screw motion)으로 형성된다든가, 곡률선이 평면 곡선이라든가, 또는 곡률선이 주어진 직선들을 지난다는 등의 조건이다. 마지막 조건의 문제에서 Bonnet는 주어진 띠를 포함하거나 교차하는 두 직선을 지나는 극소곡면을 찾는 문제를 다루고 있다. 이 마지막 문제는 Serret(1855)도 연구하였다.

19세기 말의 가장 중요한 이론은 복소해석함수를 사용하여 Weierstrass와 Enneper가 완성한 극소곡면의 적분표현공식이다. H. A. Schwartz가 1865년에 경계곡선이 정규사변형인 극소곡면에 대한 Plateau의 문제를 풀고, 1867년에 일반적인 사변형에 대한 문제를 풀면서 극소곡면의 새로운 시대가 시작되었다. 그의 논문([28])들은 Enneper-Weierstrass 표현공식 (1)에 기초를 두고 있다.

Weierstrass는 일찍이 1861년에 Berlin 대학의 수학 세미나에서 이 공식에 대하여 강의하였고, 이를 1866년에 Berlin Academy에 보고하였다([32], [33], [34]). 1864년에 상당히 다른 표현공식을 Enneper([14])가 내어놓았는데 그는 극소곡면의 곡률선을 좌표곡선  $u = 상수$ ,  $v = 상수$ 로 사용하였다. Weingarten(1863), Riemann(1866), Peterson(1866), Beltrami(1868)등이 다른 표현공식을 소개하였다.

한편, Riemann은 그의 사후인 1867년에 발간된 논문에서 한 개 또는 여러 개의 직선을 지나는 극소곡면에 대하여 다루고 있다 특히 각각 무한히 긴 두 개의 꼬인 직선, 세 개의 직선(이 중에 두 개는 한 평면  $\pi$  위에 놓이고 서로 만나며, 세 번째 직선은  $\pi$ 와 평행한 평면  $\pi'$ 안에 놓인다), 서로 만나는 세 개의 직선, 사각형, 또는 평행한 평면 위에 각각 놓여있는 임의의 두 개의 원 등을 지나는 곡선 등의 경우를 다루고 있다.

19세기 말까지의 미분기하학 특히 극소곡면의 이론에 대한 내용은 Darboux의 4권 짜리 Leçon([8])에 모두 수록되어 있다.

### (5) 20세기 중반

20세기에 들어서며 1925년까지 극소곡면의 이론은 한 동안 뜸하였다. 이 기간은 새로운 극소곡면의 이론이 태동할 수 있는 배경 이론들을 위한 시기였다. 이 기간 동안에 Lebesgue의 측도와 적분이라는 강력한 이론, Hilbert, Lebesgue, Courant, Tonelli의 직접적 방법, Hilbert, F. Riesz, E. Schmidt, Fréchet, Hahn 및 Banach에 의한 함수해석의 기초 등이 정립되었다. 특히, 이 시기에는 타원함수론의 기초적 수법, regularity 정리들과 선형적 부등식 등이 Korn, S. Berstein, Lyapunov, Müntz 및 Lichtenstein에 의하여 만들어졌다.

이와 함께 함수의 그래프 꼴 완비극소곡면에 대한 Berstein의 유명한 정리 [3]이 이 시기에 증명되었다. 1925년에서 1950년 사이에 극소곡면 이론은 다시 살아났다. 이 때 처음으로 주어진 경계를 가지는 극소곡면을 구성하는 방법이 개발되었다. Douglas와 Radó는 일련의 논문을 통하여 주어진 경계에 대하여 극소곡면 방정식의 경계값 문제를 풀었다. 당시 발전된 해석학 방법을 활용하여 편미분방정식을 푸는 방법으로 일반적으로 주어진 좋은 경계에 대하여 이 문제를 항상 풀 수 있음을 보였다([7]). 이 때부터 계속하여 극소곡면의 경계값 문제가 수학자들의 최대 관심사가 되었다. 1960년대에는 De Giorgi, Fleming, Federer등이 기하학적 측도론이라는 강력한 도구를 개발하였고, 이때부터 해석학은 극소곡면을 공부하는데 점점 더 중요한 도구가 되었다. 이 시기에 개발된 도구와 결과에 대해서는 Osserman [27]의 survey가 잘 정리하고 있다. Plateau문제에 대한 자세한 해설은 Nitsche [26]과 Dierkes 등 [9]을 참조하면 좋다.

### (6) 20세기 말

1980년대에 와서 완비 및 주기극소곡면 이론에 큰 발전이 이루어졌다. 이는 특별히 Costa, D. Hoffman과 Meeks가 오래동안 남아있던 가설인  $R^3$ 의 완비이고 문힌 “유한 위상형”인 극소곡면은 평면, 현수면, 나선면뿐일 것이라는 것을 부정하였기 때문이다. Costa는 정사각형 윗면  $C/Z^2$ 에서 3점을 제외한 곡면위에 정의된 위의 조건을 만족시키는 극소곡면  $X: M \rightarrow R^3$ 이 존재함을 보였다.

이 곡면의 표현공식은 함수  $\mu = \rho$ 와  $v = a/\rho'$ 을 사용한다.(여기서  $\rho$ 는 Weierstrass의  $\rho$ -함수이고,  $\rho'$ 은 그의 도함수,  $a$ 는 0이 아닌 상수이다.) Costa는  $X$ 가 완비이고 genus가 1이며 3개의 end를 가졌음을 보였다. 이후 Hoffman과 Meeks는 이 곡면이 문힌 곡면임을 보였으며 일반적인 종수  $n$ 을 가지는 유사한 곡면들을 구성하였다. 뒤를 이어 이와 유사한 곡면들이 많이 발견되었으며 현대는 다시 한 번 극소곡면 발견의 시대가 되었다.

한편 Kacher는 A. Schoen의 3중주기 극소곡면이 실제로 존재함을 보였다. 또 그는 Scherk의 극소곡면의 예를 사용하여 어떻게 더 많은 문힌 극소곡면을 찾을 수 있는지를 보였다. 이 분야는 20세기 말까지 빠르게 성장하였다.

이에 대한 초창기의 내용은 Barbosa와 Colares의 강의록 [2]에 정리되어 있다. Karcher의 결과는 그의 논문 [20], [21]을 보면 좋다.

한편, 20세기 말에 이르러 위상적이면서도 변분학적인 관점에서 극소적으로 주어지는 일정한 크기의 기하학적 변동은 극소곡면 전체에 안정적인 영향을 미친다는 해석학적 평가를 앞세워서 Kapouleas와 양성덕은 어떤 두 개의 극소곡면은 작은 현수면 꼴의 handle을 사용하여 연결합을 만들 때, 이 연결합의 가까운 근방 안에 같은 위상적 조건을 가지는 극소곡면이 존재함을 보였다. 이러한 방법을 통하여 그들은 편미분 방정식의 방법을 써서 새로운 종류의 극소곡면을 구성할 수 있는 길을 열었다.

한편, Colding과 Minicozzi는 일련의 논문을 통하여 리치곡률이 양인 3차원 다양체 안에 묻힌 극소곡면들에 대한 옹골성(compactness)정리를 증명하였다([6]). 이를 써서 넓이에 대한 제한 조건 없이 묻힌 극소곡면의 옹골성과 수렴성을 다루는 방법을 개발하였으며, 이 결과의 여러 활용에 대하여 논하고 있다. 이 연구는 직교군의 작용에 대한 오래된 공간형 가설의 해결에 접근하는 결과이다.

이와 함께 20세기 말부터 국내 기하학자들의 역할도 눈에 띄게 증가하여 미분기하학적 이론 분야에서 최재경의 결과가 세계적으로 인정받고 있다([11], [12], [13]). 또 고성은, 김영욱, 신해용, 양성덕([25])은 극소곡면의 평행곡면 이론을 통하여  $H=cK$  ( $c$ 는 상수) 꼴의 조건을 만족시키는 Weingarten곡면이 극소곡면과 2:1로 대응하며 평행한 이론으로 전개됨을 보였다. 이를 통하여 극소곡면에 대한 Weierstrass꼴 표현 공식이나 Björling꼴 표현공식들이 더욱 일반적인 곡면에도 적용되는 것을 밝혔다.

## 2. 극소곡면의 이론적 배경

우리가 이 논문에서 다루는 극소곡면은 모두 3차원 유클리드 공간  $E^3$ 안에 놓인 극소곡면이다. 이를 위해서 필요한 내용은  $E^3$ 의 곡면론이다. 여기서는  $E^3$ 의 곡면론 가운데서 극소곡면과 관련된 몇 가지 개념과 사실만을 언급해 두며, 이에 대한 자세한 사항은 Struik [29] 또는 do Carmo [10]를 참조하면 좋다.

극소적으로 매개화된  $E^3$ 의 정규곡면  $X: U \rightarrow E^3$ 에 대하여 각 점에서의 법곡률의 최대 및 최소값으로 정의되는 주곡률  $\kappa_1, \kappa_2$ 을 잡고, 이의 합을 이 점에서의 평균곡률 이라하고  $H = \kappa_1 + \kappa_2$ 로 나타낸다. 한편, 이 두 주곡률의 곱은 가우스 곡률이라 하며  $K = \kappa_1 \kappa_2$ 로 나타낸다.  $E^3$ 의 정규곡면이 극소곡면이라 함은 이 곡면의 각 점에서  $H = 0$ 이 성립한다는 뜻이다.

### (1) 극소곡면의 정의

이 절의 내용에 대하여는 Osserman [27]을 참조하면 좋다.

라그랑주는 오일러가 처음 사용한 조건 “국소적으로 곡면의 넓이를 최소로 한다”를 사용하여 극소곡면의 정의를 처음으로 이끌어내었다. 실제로 곡면의 국소 넓이 범함수를  $A$ 라 하고, 국소적으로 support를 가지는 임의의 미분가능함수  $\lambda > 0$ 이 주어졌을 때, 곡면의 법선벡터  $\mathbf{n}$ 에 대하여  $\lambda \mathbf{n}$ 을 따른  $A$ 의 변분을 계산하면

$$A'(0) = \iint_D \lambda H dA$$

를 얻는다. 따라서 라그랑주가 정식화한 변분법에 따라 극소곡면은  $H=0$ 이라는 조건으로 정의된다.

한편  $\mathbf{E}^3$ 의 모든 정규곡면은 등은좌표계를 매개변수로 사용하여 나타낼 수 있다. 극소곡면이 가지는 가장 두드러진 성질은 특별한 등은 매개변수를 찾아 국소좌표계를 만들 수 있을 뿐만 아니라 이러한 매개변수들이 서로 등각적으로 표현된다는 것이다. 따라서 극소곡면은 대역적으로 보아 리만면 위에서 정의되었다고 할 수 있다. 이러한 매개변수에 대하여 조화함수를 극소곡면의 좌표함수로 사용할 수 있다는 특별한 성질은 해석학적으로 표현하여 간단한 방정식 꼴로 나타낼 수 있다.

이 조건을 사용하여 동치적으로 정의한 다음과 같은 넓은 의미의 극소곡면의 정의를 잘 사용한다. 즉 리만면  $S$  위에서 정의된 곡면  $X = (X_1, X_2, X_3) : S \rightarrow \mathbf{E}^3$ 에서 각각의  $X_i$ 가 조화함수이고 복소 국소좌표  $(U, z = x_1 + ix_2)$ 에서 정의된 해석함수  $\phi_i = \partial X_i / \partial x_1 - i \partial X_i / \partial x_2$ 가 조건

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0, (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 \neq 0)$$

을 만족시킬 때,  $(X, S)$ 를 일반화된 극소곡면이라고 부른다. 이 때,  $\phi_i$ 를 사용하면 극소곡면을 간단히 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$X(z) = \text{Re} \int^z (\phi_1, \phi_2, \phi_3) dz.$$

## (2) Weierstrass 표현 공식

이러한 극소곡면은 당연히 복소함수론과 밀접한 관계를 가지게 되며, 특별히 Enneper와 Weierstrass에 의하여 발견된 표현공식을 갖는다. 이 표현은 국소적으로 쓰여지나 그 표현이 복소해석함수인 까닭에 대역적 표현으로 확장된다. 즉, 모든 넓은 의미의 극소곡면  $X$ 는 국소적으로 그리고 대역적으로 적당한 리만면  $S$  위에서 정의된 복소 해석 함수  $f$ 와 복소 유리형(meromorphic) 함수  $g$ 에 대하여 다음 꼴로 나타내어진다:

$$X(z) = \text{Re} \int^z \left( \frac{1}{2} f(1-g^2), \frac{i}{2} f(1+g^2), fg \right) dz. \quad (1)$$

여기서  $g$ 는 가우스 사상을 평사도법(stereographic projection)과 합성하여  $\mathbf{C}$ 에서 값을 갖도록 한 사상이 된다. 이것을 극소곡면의 (Enneper-)Weierstrass 표현공식이라 부른다. 여기서  $f$ 와  $g$ 를 Weierstrass data라 부른다.



Weierstrass 표현 공식과 앞의 등온좌표계를 사용하여 조화함수로 나타내어진 극소곡면의 관계는 다음과 같다:

$$\phi_1 \equiv \frac{1}{2}f(1-g^2), \quad \phi_2 \equiv \frac{i}{2}f(1+g^2), \quad \phi_3 \equiv fg.$$

이렇게 나타내어진  $\phi_i$ 는 각각 복소해석 또는 복소 유리형 함수이며 이렇게 정의된 함수는

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$$

를 만족시킨다.

한편 역으로 각각의  $f, g$ 는  $\phi_i$ 에 의하여 다음과 같이 나타내어 진다:

$$f \equiv \phi_1 - i\phi_2, \quad g \equiv \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

여기서  $f$ 를 복소해석 1-형식으로  $w = fdz$ 라고 묶어서 나타내기도 한다.

Weierstrass표현을 사용할 경우 극소곡면의 제1 및 제2기본형식은 Weierstrass data  $f, g$ 를 사용하여 다음과 같이 나타난다:

$$I = \frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)^2|dz|^2,$$

$$II = \text{Re}(fg'dz^2).$$

한편 이 계량에 따른 가우스 곡률은

$$K = -\left(\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2$$

으로 표현된다.

### (3) 극소곡면의 기하학적 성질

복소 해석함수로 표현되는 극소곡면은 복소해석함수가 가지는 좋은 성질을 이어 받는다. 이의 대표적인 예로 극소곡면은 다음과 같은 좋은 대칭성을 가진다: 극소곡면이 3차원 공간의 어떤 평면 안에 품기는 축지선을 가질 때 이 극소곡면은 이 평면에 대하여 대칭이다. 또, 극소곡면이 직선을 품으면 극소곡면은 이 직선에 대하여  $180^\circ$  회전 대칭이다. 특히 평면대칭을 가지는 곡면의 공액곡면은 대응점에서 선대칭이 되며 그 역도 성립한다([21]).

이러한 대칭성은 극소곡면을 분류하고, 극소곡면의 존재와 단함을 증명할 때 그리고 특히 주어진 극소곡면을 그림으로 표현하고자 할 때 매우 많이 활용된다. 이러한 활용법은 대표적으로 Matthias Weber가 Mathematica를 사용하여 Costa의 곡면을 그려낸 예를 보면 잘 알 수 있다([31]).

이 밖에도 극소곡면의 end와 위상적 성질 등에 대한 많은 결과가 있으나 이는 극소 곡면을 나타내는데 일반적으로 적용되는 것은 아니므로 여기서는 언급하지 않는다. 이에 대한 자세한 사항은 극소곡면에 대한 Osserman [27]의 개론서나 Dierkes 등 [9], Nitsche [26] 등의 총괄서와 같은 것을 참조하면 좋다.

#### (4) Björling 문제

극소곡면이 복소해석함수로 나타내어지기 때문에 갖는 해석학적 성질의 하나는 해석연장의 성질로 인하여 극소곡면의 국소적 정보가 극소곡면 전체를 결정짓는다는 것이다. 특히 극소곡면 위에 놓인 어떤 한 해석곡선을 따라서 정보만으로도 극소곡면을 재구성하기에 충분하며, 이는 Björling이 제기한 질문 가운데 하나에 대한 답이 된다.

구체적으로 “ $\mathbb{E}^3$  안에 놓인 실해석곡선  $\gamma(u)$ 가 있고 이  $\gamma$ 를 따라서 실해석벡터장  $N(u)$ 가 주어졌을 때, 이 곡선을 품으며 이 곡선을 따라서  $N$ 에 수직인 극소곡면이 존재하는가”하는 Björling의 질문에 대하여 그 자신이 한 긍정적인 답은 이러한 극소곡면이 유일하게 존재한다는 것이다.

실제로 이 곡면을 구성하는 것은 매우 간단하며 다음과 같은 적분공식으로 나타낼 수 있다: 즉, 해석곡선  $\gamma(u)$ 를 복소영역으로 해석확장한 함수를  $\gamma(z)$ 라 하고, 벡터장  $\gamma'(u) \times N(u)$ 를 복소영역으로 해석확장한 벡터장을 다시  $\gamma'(z) \times N(z)$ 로 쓰기로 하면 이 곡선을 품고  $\gamma$ 를 따라  $N(u)$ 에 수직으로 놓이는 극소곡면은 적분식

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \int^{(u+iv)} (\gamma'(z) - i\gamma'(z) \times N(z)) dz$$

로 나타낼 수 있다.

Björling의 공식은 근본적으로 극소곡면의 매개적 표현이 등좌표계를 쓴다는 사실을 활용하여 주어진 곡선  $\gamma(u)$ 의 접벡터  $\gamma'(u)$ 와 수직이고 길이가 같은 극소곡면의 접벡터  $-\gamma'(u) \times N(u)$ 를 잡아

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u, 0) = \gamma'(u), \quad \frac{\partial X}{\partial v}(u, 0) = -\gamma'(u) \times N(u)$$

가 되도록 한 것이다. 즉, 곡선  $\gamma$ 를 따라 법벡터장  $N(u)$ 가 주어진 것은 실제로  $\partial X / \partial v$ 가 주어진다는 것과 동치이다. 따라서 Björling 문제는 다음과 같이 동치인 문제로 고쳐 쓸 수 있다: 주어진 해석곡선  $\gamma(u)$ 와 이 곡선을 따라 정의된 곡선의 법벡터장  $V(u) \perp \gamma'(u)$ 이  $\|V(u)\| = \|\gamma'(u)\|$  되도록 주어졌을 때, 곡선  $\gamma$ 를 품으며 주어진 벡터장  $V$ 에 접하는 극대곡면을 구하여야. 그리고 이 문제에 대한 답은 위와 동치인 적분식

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \int^{(u+iv)} (\gamma'(z) + iV(z)) dz$$

로 주어진다. 여기서 피적분함수는 주어진 함수들을 복소영역으로 해석확장한 것이다.

여기서 Björling 문제를 불변형태로 해석해 볼 필요가 있다. 주어진 곡선  $\gamma$ 와 법벡터장  $N$ 을 사용해서 법벡터장  $\gamma'(u) \times N(u)$ 를 구성하지만 실제로는 이를 써서 실해석 1형식  $(\gamma'(u) - i\gamma'(u) \times N(u))du$ 를 구성하고 이를 복소영역에서 복소해석 1형식이 되도록 확장하여

$$(\gamma'(z) - i\gamma'(z) \times N(z))dz$$

을 구성한 것이다. 여기서  $\gamma$ 를 실해석함수  $\psi(v)$ 와 합성하여  $\eta(v) := \gamma(\psi(v))$ 로 매개변수를 바꾸었을 때,  $\eta'(v)$ 와  $\eta'(v) \times N(\psi(v))$ 는 바뀐 것 같지만 실제로

$$\eta'(v) = \gamma'(\psi(v))\psi'(v)$$

가 되며, 이 경우의 복소해석 1형식은

$$\begin{aligned} & (\eta'(w) - i\eta'(w) \times N(\psi(w)))dw \\ &= (\gamma'(\psi(w)) - i\gamma'(\psi(w)) \times N(\psi(w)))\psi'(w)dw \\ &= (\gamma'(z) - i\gamma'(z) \times N(z))dz \end{aligned}$$

이 되어 Björling 적분공식의 결과에서 변하는 것은 하나도 없다. 즉 주어진 실해석 곡선  $\gamma$ 와 실해석 법벡터장  $N$ 에서 해석적 매개변수 변환이 Björling의 해에 미치는 영향은 없으며, 따라서 매개변수변환과는 무관하게 기하학적으로 주어지는 해석곡선과 이를 따라 주어진 해석법벡터장의 쌍 하나에 대하여 극소곡면이 하나씩 대응됨을 알 수 있다.

### (5) 함수의 그래프로서의 극소곡면

모든 정규곡면은 국소적으로 함수의 그래프로 볼 수 있다. 극소곡면을 국소적으로 함수  $z = f(x, y)$ 의 그래프라고 보면 함수  $f$ 의 그래프가 극소곡면을 나타내기 위한 조건은 무엇인가를 물어볼 수 있다. 이를 연구한 것은 극소곡면의 연구 초기부터이다. 간단히 정칙곡면  $(u, v, f(u, v))$ 의 평균곡률을 계산하여보면 방정식  $H = 0$ 은 방정식

$$(1 + f_v^2)f_{uu} - 2f_u f_v f_{uv} + (1 + f_u^2)f_{vv} = 0 \tag{2}$$

와 동치이다. 초기 극소곡면의 예에는 직접 이 방정식을 특수한 경우에 풀어서 얻은 극소곡면들이 있음을 앞에서 보았다. 실제로 Gauss 이전의 모든 극소곡면에 대한 이론과 예에서는 Euler를 제외하고는 모두 함수의 그래프 꼴인 곡면만을 다루고 있다.

함수의 그래프 꼴로 표현되는 완비 극소곡면에 대하여는 20세기 초의 유명한 Bernstein의 정리가 이러한 곡면은 평면뿐임을 이야기하고 있다. 20세기 전체를 통하여 함수의 그래프꼴 극소곡면에 대한 대역적정리는 이것뿐이라고 하여도 과언이 아니다.

### 3. 극소곡면의 구성

극소곡면을 구성하는 방법은 앞에 소개한 극소곡면 이론에 따라 몇 가지 방법으로 나뉘어진다. 역사적으로 보아 맨 처음 사용한 방법은 극소곡면을 함수의 그래프 꼴로 보고 이 함수가 만족시키는 극소곡면의 편미분방정식을 푸는 것이다. 이 방법은 현대 해석학에서 많은 도움을 얻을 수 있음에도 불구하고 이 방정식을 구체적으로 푸는 것은 어렵다. 이 방정식을 통하여 단지 몇 가지 예와 극소곡면의 일반적인 성질을 유도해 낼 수 있다.

한편 19세기 말에 개발된 복소함수론과의 관계를 이용하여 극소곡면을 적분 꼴로 나타내는 Weierstrass의 표현공식은 많은 극소곡면을 구체적으로 나타낼 수 있다는 장점을 가지고 있다. 두 개의 임의의 복소해석함수를 잡으면 국소적으로 모든 극소곡면을 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 그러나 이 방법을 사용해서 나타내는 극소곡면의 대역적 성질을 알아내려면 많은 노력이 더 필요하다.

이러한 대역적 성질을 알아내는 데는 몇 가지 이론의 도움이 필요하다. 이 가운데는 복소함수론의 해석연장(analytic continuation)의 이론을 활용한 대칭이론과, 적분표현공식의 특성을 이용한 공액극소곡면 구성법 등을 활용할 수 있다. 이와 함께 Weierstrass의 표현공식을 써서 임의로 구성한 곡면에서 기본군의 원소들을 따라서 적분표현값을 계산하여 주기문제를 해결함으로써 대역적으로 닫힌 극소곡면을 찾는 방법도 활용되고 있다.

한편 국소적으로는 Björling의 공식을 이용하여 곡면을 구성할 수도 있으나 이 공식은 대역적 성질을 알아내는 데는 크게 부족하다. 그러나 이 공식은 Weierstrass의 공식과 밀접한 관련이 있으며, 구체적인 경우에는 Björling의 적분표현에서 Weierstrass의 공식을 유도해 낼 수 있다.

다음은 이들 방법을 간단히 알아본다.

#### (1) 극소곡면의 방정식

우리는 앞에서 함수  $f$ 의 그래프가 극소곡면이 되려면 방정식 (2)를 만족시켜야 한다는 것을 알고 있다. 그리고 초기에 극소곡면을 연구한 사람들이 특수한 좌표를 사용하여 특수한 조건 하에서 이 방정식을 풀었다는 것을 보았다.

방정식 (2)는 2계 의사타원형 편미분방정식으로 이 방정식을 만족시키는 함수  $f$ 는  $C^\infty$  미분가능성을 가진다. 특히 경계값 문제를 다루려면 이러한 미분가능성을 다룰 수 있다는 것이 많은 좋은 결과를 이끌어낸다. 20세기 전반에 Douglas, Radó에 의하여 해결된 Plateau 문제는 이 방정식에 대한 편미분방정식의 이론에 크게 힘입었으며 20세기의 타원형 편미분방정식 이론을 발전시키는 초석이 되었다고 할 수 있다.

근래에 여러 방향으로 발전하는 극소곡면과 관련된 곡면 이론에서 이 방정식은 모든 관련된 방정식의 모형 역할을 하고 있다.

## (2) Weierstrass 공식과 곡면의 대칭성

Weierstrass와 Enneper 등에 의하여 개발된 적분공식은 이론 초기부터 극소곡면의 예를 구성하는데 가장 많이 사용되는 공식이었으며 현재도 가장 효과적인 방법이다. 이 방법은 국소적으로 임의로 잡은 두 개의 해석함수(Weierstrass data)를 사용하여 극소곡면을 구성할 수 있으며, 이 방법은 해석연장을 통하여 대역적인 해로 확장할 수 있다는 점에서 모든 극소곡면을 표현할 수 있는 방법이다.

그럼에도 불구하고 이 공식만으로 모든 구성문제가 해결되지 않는 것은, 우리가 구성한 곡면이 자체로 닫혀서 기하학적으로 단순한 end만을 가지는 완비 또는 proper인 곡면이기를 바라기 때문이다. 따라서 문제는 주어진 Weierstrass data가 닫힌곡면을 주는가 또는 완비인 곡면인가 등을 확인하는 작업이 필요하다는 것이며, 이 작업은 개개의 예에 따라 개별적으로 해결해야 하는 문제이다. 특히 닫힌곡면인가를 확인하기 위한 작업은 구체적인 적분 계산을 필요로 하며 이는 또 다른 어려움을 준다.

앞에서 알아본 극소곡면의 대칭성은 특히 Weierstrass 표현공식을 사용하여 곡면을 나타내는 경우 많은 도움이 된다. Weierstrass data가 복소해석함수인 까닭에 어떤 경우에는 간단히 이 곡면에 포함되는 직선이나 평면촉지선을 알아볼 수 있다. 이러한 경우에는 이 직선 등을 경계로 하여, 보다 작은 영역에서만 계산을 하여도 곡면의 전체적인 모양을 알아낼 수 있다.

## (3) 공액극소곡면

극소곡면의 Weierstrass 표현공식 (1)에서  $f, g$ 를 각각 함수  $e^{i\theta}f, e^{i\theta}g$ 로 바꾸었을 때 나타나는 극소곡면의 족을 처음 주어진 극소곡면의 수반족(associate family)라고 부른다. 이 가운데 특별히  $\theta = \pi/2$ 인 경우를 공액극소곡면(conjugate surface)이라고 한다. 수반극소곡면들은 원래곡면과 근본적으로 같은 가우스사상  $g$ 를 가지며 극소곡면의 계량도 변하지 않아 국소적으로 등장적인 극소곡면족을 이룬다. 주어진 극소곡면에서 수반족 특히 공액극소곡면을 구성함으로써 흥미로운 극소곡면을 새로이 구성할 수 있다.

대표적인 예로서 현수면의 Weierstrass data는  $f(z) = e^{-z}$ ,  $g(z) = e^z$ 이며 나선면의 Weierstrass data는  $f(z) = e^{-z}$ ,  $g(z) = ie^z$ 이다. 이 두 곡면은 서로 공액극소곡면이다.

## (4) 주기문제

주기문제는 Weierstrass data를 써서 적분으로 닫힌 극소곡면을 구성할 때에 곡면이 닫히도록 Weierstrass data의 계수 등 parameter를 적절히 결정하는 문제이다. 이를 성공적으로 해결하면 닫혀있는 극소곡면을 얻어낼 수 있다. 예를 들어 Matthias Weber가 Costa의 곡면을 구성하는 방법을 설명하면서 주기문제를 해결하는 부분을

보자([31]).

Weber는 Costa의 곡면의 Weierstrass data로 다음 두 함수를 사용한다. (이 data를 찾는 것은 또 다른 문제이다.)

$$f(z) = \sqrt{\frac{z}{(z^2-1)}}, \quad g(z) = \rho \sqrt{\frac{1}{z(z^2-1)}}$$

이 때, 상수  $\rho$ 의 값을 아무렇게나 주어서는 닫힌 Costa곡면을 얻을 수 없다. 따라서 적절한 실수값  $\rho$ 를 결정해야 하며 이는 구성하려 하는 곡면의 함수꼴을 보아 영역에서 적절한 특이점을 찾고, 이 특이점 주위를 둘러 Weierstrass 적분을 할 때 생기는 주기가 0이 되도록 하는  $\rho$ 를 결정하여야 한다. 실제로 Weber는 이 경우에  $z=0$ 와  $z=1$ 을 모두 둘러 돌아오는 닫힌곡선의 상이 곡면 위에서도 닫힌곡선이 되도록 하는 값으로

$$\rho = \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) / \left(\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\right)$$

을 선택하였으며 이 경우 이 값만이 이러한 성질을 가진다. 이렇게 함으로써 영역이 되는 리만면인 윤회면의 모든 homology generator에 대한 주기가 0이 되도록 만들 수 있고, 이 값에 대하여 위의 Weierstrass data는 Costa의 곡면을 정의함을 증명할 수 있다.

임의로 잡은 대부분의 Weierstrass data는 이러한 주기문제가 해결되지 않으며 따라서 닫힌 극소곡면을 정의하지 않는다. 즉, Weierstrass data만으로 극소곡면을 새로이 구성하려고 할 때는 적절히 주기문제가 해결될 수 있는 Weierstrass data를 찾는 것이 관건이라고 할 수 있다.

## 4. 극소곡면의 고전적인 예

### (1) 현수면

이미 앞에서 살펴본 바와 같이 현수면(catenoid)은 1744년에 쓰여진 Euler의 책 *Methodus inveniendi*<sup>3)</sup>에 처음 나타난다. 이 곡면은 Euler가 처음으로 면적을 최소화하는 성질을 가진 회전면으로 만들었으며, 평면을 제외하고 처음 발견된 극소곡면이다. 현수면은 Plateau가 catenoid라는 이름을 붙이기 전까지는 *alysseid*라고 불리었다.

3) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (A method for discovering curved lines having a maximum or minimum property or the solution of the isoperimetric problem taken in its widest sense)

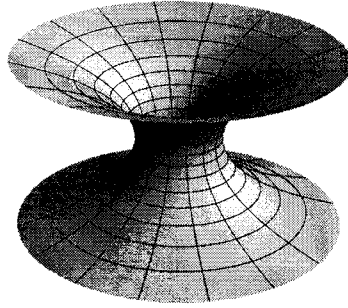


그림 1. 현수면(catenoid)

곡면의 평균곡률에 해당하는 개념을 처음 만들고 현수면의 평균 곡률이 0이라는 것을 처음 발견한 것은 Meusnier이다. 그러나 Euler는 이 적분의 극소값을 주는 곡면의 일반적인 미분방정식을 생각하지 못했으며, 따라서 곡면의 평균곡률의 개념을 찾지 못했다. 이로 인하여 처음으로 극소곡면을 발견한 공은 Meusnier에게로 돌아가게 되었다.

따라서 현수면은 회전 극소 곡면이며, 유계가 아니고, 주기가 없는, 물린 곡면이다. 삼차원 공간에서는 함수  $f(x) = \cosh x$ 의 그래프를  $x$ 축으로 회전시키면 되며, 매개변수식으로  $X(u, v) = (u, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v)$ 로 표시된다. 이는 회전극소곡면을 생성하는 함수에 대한 방정식  $1 + f'(u)^2 = f(u)f''(u)$  을 풀어 얻는다.

한편 이 곡면의 Weierstrass data는  $f(z) = 1, g(z) = \frac{1}{z}$  또는 이의 해석변수 변환 풀인  $f(z) = e^{-z}, g(z) = e^z$  등을 많이 사용한다.

이 곡면은 가장 잘록한 허리 부분에 평면에 포함되는 평면축지선이 있으며 이 평면에 대하여 대칭이다. 또 축을 포함하는 모든 평면과의 교선이며 모선인 현수선이 평면축지선을 이루며 이 평면들에 대하여도 대칭이다.

## (2) 나선면

나선면을 처음 발견한 것은 Meusnier로 1776년 평면, 현수면 이후 세 번째로 발견된 극소곡면이다. 이 곡면의 이름 Helicoid는 helix와의 유사성에 의해 명칭이 붙여졌다. Meusnier는 Lagrange와 Legendre가 계산한 방정식을 풀어서 나선면과 현수면이 극소곡면 조건을 만족시키는 곡면이라는 것을 발견하였다.

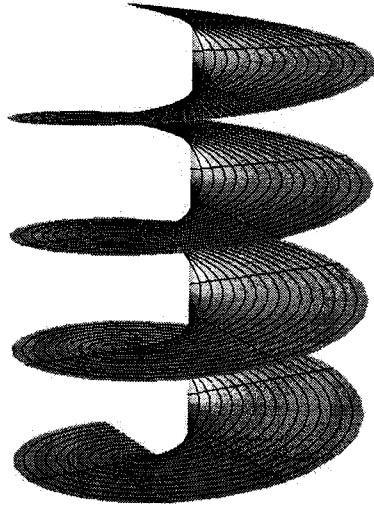


그림 2. 나선면(helicoid)

이 곡면의 매개변수 표현은

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$$

이다. 나선면과 현수면은 서로 공액곡면이며 Weierstrass data는  $f(z) = 1, g(z) = \frac{i}{z}$  또는 이의 해석변수변환꼴인  $f(z) = e^{-z}, g(z) = ie^z$  등을 많이 사용한다.

나선면은 완비극소곡면이며 선직면이다. 이 곡면은 직선이 축을 따라 이동하며 회전하여 만들어진 곡면으로 이 각각의 직선들에 대하여 회전대칭 꼴이다. 한편 이 곡면의 축에 대하여도 회전대칭 꼴이다.

나선면은 Scherk가 발견한 일반나선면의 특수한 경우이다.

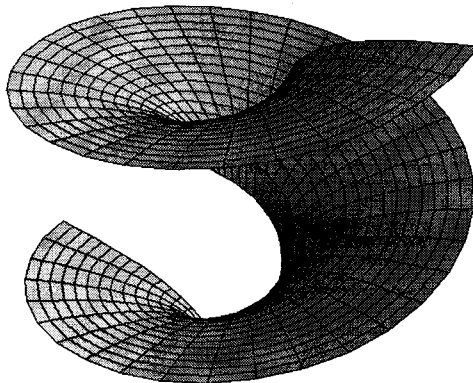


그림 3. 일반나선면



### (3) Scherk의 곡면들

Scherk가 발견한 곡면 가운데 가장 유명한 두 가지는 2중주기곡면(doubly periodic surface) 및 안장기둥곡면(saddle tower)이다.

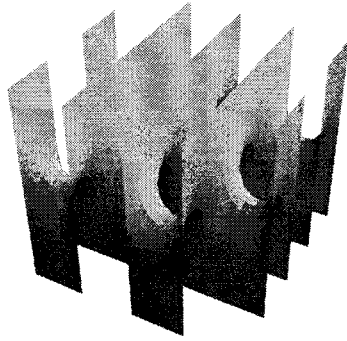


그림 4. 2중주기곡면

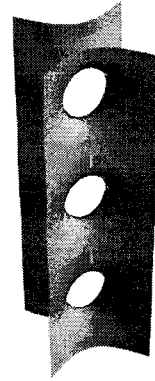


그림 5. 안장기둥곡면

Scherk 2중주기곡면은 Weierstrass data로

$$f(z) = \frac{i}{1+z^4}, g(z) = z$$

를 사용하여 얻을 수 있다. 이 곡면은 기본영역의 경계에 직선을 포함하며 이 직선에 대하여 회전대칭꼴이다. 또 기본영역의 중심을 가로지르는 두 평면에 대하여 대칭이다. Scherk의 제1 곡면이라고도 한다.

Scherk는 이 곡면을 함수  $f(x,y) = g(x) + h(y)$  꼴의 함수의 그래프인 극소곡면으로서 구하였다. 그 결과 다음과 같은 미분방정식을 얻었다:

$$g'(x)(1+h'^2(y)) + h''(y)(1+g'(x)) = 0$$

그는 이와 같이 변수분리형의 곡면으로 첫 번째 곡면의 방정식

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}$$

을 얻었다.

안장기둥곡면은 위의 2중주기곡면과 서로 공액곡면으로 Weierstrass data로

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}, g(z) = z$$

를 사용하면 된다. 이 곡면도 그림에서 알 수 있는 축을 포함하는 두 평면은 물론 축에 수직인 여러 평면에 대하여 대칭모양을 이룬다. 또 이 곡면의 기본영역은 수평방향으로 놓이고 서로 수직으로 만나는 두 직선을 포함하고 있으며 이 각각에 대하여 선대칭을 이룬다. 이 곡면은 Scherk의 제5곡면이라고 한다. 방정식으로 나타내면

$$\sin z = \sinh x \sinh y$$

이 되며 매개변수로 표현하면

$$X(u, v) = (\operatorname{arcsinh} u, \operatorname{arcsinh} v, \operatorname{arcsin} uv)$$

이다.

#### (4) Catalan의 곡면

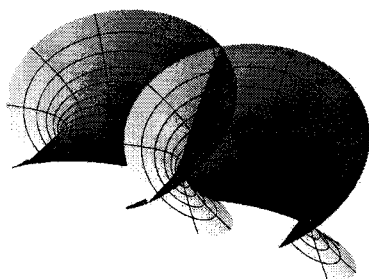


그림 6. Catalan의 곡면

1855년에 Catalan에 의해  $\mathbf{R}^3$ 에서 유일한 nonplanar end를 갖는 선직 극소곡면으로 구성되었다. Catalan의 곡면은 사이클로이드를 축지선으로 품는 극소곡면을 찾기 위해 Bjöling의 문제를 풀어서 구했다. 이 곡면의 매개변수 표현은

$$X(u, v) = \left( u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, 4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2} \right)$$

이다.

#### (5) Enneper의 곡면

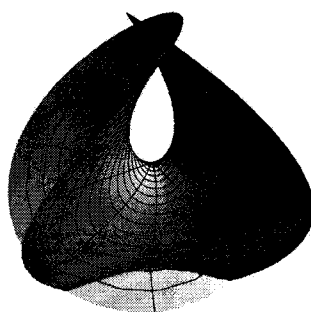


그림 7. Enneper의 곡면

Enneper의 곡면은 가장 간단한 Weierstrass data  $f(z) = 1, g(z) = z$ 를 써서 얻을 수 있다. 매개변수 표현으로는

$$X(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

으로 표현된다.

이 곡면은 중심점을 지나는 두 개의 평면과 두 개의 직선에 대하여 각각 평면대칭 및 선대칭이다. 이 곡면은 극소곡면 가운데 가장 단순하고도 아름다우나 묻혀 있지 않고 단지 잠겨(immersed)있다. 이 곡면은 자기 자신과 공액(self-conjugate)이다. 대칭을 이루는 두 평면과 두 직선은 이 공액관계로 서로 대응된다. 이 곡면을 위상적으로 조금 변형시킨 곡면으로 Chen-Gackstatter의 곡면 (5절 (6)참조)이 있다.

### (6) Riemann의 극소곡면

Riemann이 발견한 곡면은 단일주기 곡면으로 이 곡면의 한 주기의 매개변수 영역으로 윗반평면을 잡을 수 있다. 이 한 주기는 두 개의 planar end를 갖는다. 이 곡면을 수평으로 자르면 항상 원이 되며 이 가운데 하나는 직선이 되어 주기적으로 직선을 품는 곡면이며, 따라서 두 평행한 곡면을 채우는 평면이 아닌 극소곡면이 되기도 한다. 이 곡면은 이 밖에도 많은 기하학적 성질을 가지고 있다.

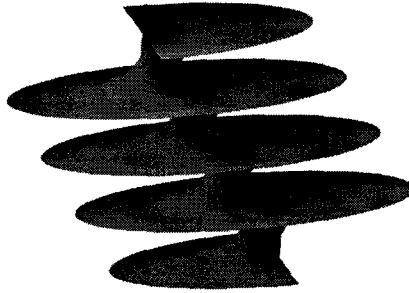


그림 8. Riemann의 곡면

### (7) Schwarz의 곡면

Schwarz는 1865년에 처음으로 Plateau 문제를 구체적으로 해결하여 다음과 같은 곡면을 얻었다. 그는 경계선으로 비틀어진 사각형을 잡았다.

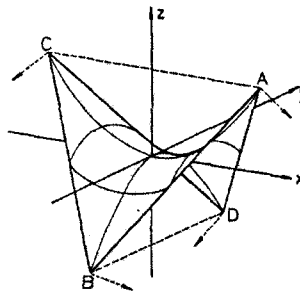


그림 9. Schwarz의 곡면([26])

Riemann도 이 문제에 대한 연구 결과가 있다. Schwarz는 이 곡면이 특이점을 가질 수 없으며 따라서 해석함수로 표현가능하여 경계 너머로 해석확장된다는 사실과 또 이 곡면의 Gauss 사상이 1대1이 되어야 한다는 사실을 사용하여 Weierstrass의 표현 공식을 사용할 수 있었다. 그는 이 밖에도 많은 다각형 및 다면체를 경계로 하는 극소곡면을 구성하였으며 이들은 경계에 대한 대칭이동으로 확장되어 공간을 채우는 3중주기 극소곡면의 예가 되었다. 이러한 곡면들은 Schwarz의 H족 및 PD족 곡면 등으로 분류된다([9]).

20세기에 들어 많은 3중주기 곡선이 A. Schoen 및 Fischer, Koch 등에 의하여 발견되었다.

### (8) Henneberg의 곡면

이 곡면은 1875년에 발견되었으며 이 곡면의 Weierstrass data는

$$f(z) = 2\left(1 - \frac{1}{z^4}\right), \quad g(z) = z$$

이고, 이를 적분하여 유리함수꼴의 매개변수 표현을 얻을 수 있다. 이 곡면은 피비우스의 띠를 매개변수 영역으로 하고 있다.

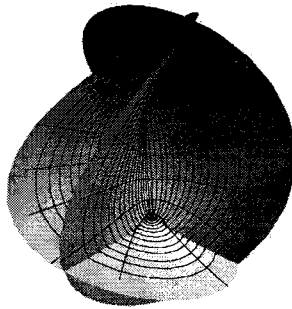


그림 10. Henneberg의 곡면

## 5. 현대에 발견된 극소곡면

### (1) 3중주기 극소곡면 (A. Schoen의 극소곡면 등)

Schwarz의 3중주기 극소곡면의 뒤를 이어 1970년대에 A. Schoen은 3중주기를 가지는 여러 곡면족을 발견하였다. 그는 크리스탈의 구조를 연구하기 위하여 존재 가능한 군의 작용을 연구하였으며 이렇게 하여 가능한 3중주기 극소곡면들을 분류하였다. 그러나 그는 수학자가 아니어서 이러한 곡면의 존재성을 보이지는 못했다. 이 곡면의

존재성은 후에 Karcher에 의하여 증명되었다. 이러한 곡면의 예는 다음에서 찾아볼 수 있다([35]).

특히 gyroid는 A. Schoen에 의해 1970년 발견되어진 대칭구조를 전혀 가지지 않는 무한연결 3중주기 극소곡면이다. 이 곡면은 직선을 포함하지 않으며, 물힌 곡면이다.

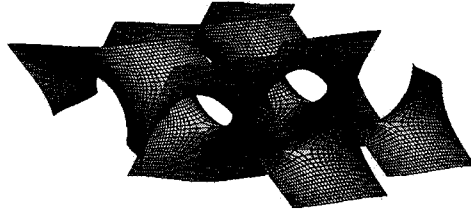


그림 11. A. Schoen의 gyroid

## (2) Costa의 곡면과 그 일반화

Costa의 곡면은 Costa가 Weierstrass의  $\rho$ -함수를 가지고 구성하였다. 이 곡면의 Weierstrass data는

$$f(z) = \sqrt{\frac{z}{(z^2 - a^2)}}, \quad g(z) = \rho \sqrt{\frac{1}{z(z^2 - a^2)}}$$

이며, 이 곡면은 종수 1인 유클리드 공간 위에 정의는 세 개의 end를 갖는 물힌 곡면이다. 이 세 end 가운데 두 개는 catenoid end이며 하나는 planar end이다. 이 곡면의 전곡률은  $-12\pi$ 이다. 이 곡면이 물힌 곡면임은 D. Hoffman과 W. Meeks가 밝혔다.

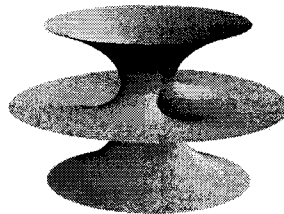


그림 12. Costa의 곡면

## (3) Karcher의 여러 곡면들

Karcher는 Scherk의 단일주기 및 2중주기를 갖는 곡면을 변형하여 여러 가지 재미 있는 곡면들을 구성하였다. 그는 이 곡면의 Weierstrass data를 변형하고 기본영역에서의 해석함수들의 행동을 자세히 연구하여 이 곡면을 비틀고 적절히 병목을 변형하는 등의 곡면 구성이 가능함을 보였다. 이 밖에도 Weierstrass data를 잘 선택하여 여러 가지 곡면을 구성하는 방법을 설명하고 있다. 이에 대한 자세한 해설은 Karcher [21]를 참조하면 좋다. 이에 대한 간략한 해설이 Dierkes 등 [9]에 나와 있다.

#### (4) Kapouleas와 Yang의 곡면구성법

Kapouleas와 Yang은 두 개의 극소곡면을 작은 현수면의 가는 목 부분을 사용하여 연결합(connected sum)을 구성한 곡면이 거의 대부분의 점에서 극소곡면이고 아주 조그만 영역에서 평균곡률이 매우 작다는 사실을 사용하여 해석학적으로 적절한 범위 안에서 이 곡면의 end 부분을 섭동함으로써 이 곡면의 근방에서 다시 극소곡면을 찾을 수 있음을 보였다. 그들은 평균곡률작용소에 적절히 Schauder의 고정점 정리를 적용하여 이러한 곡면의 존재를 증명하였다. 이 방법은 20세기에 개발된 편미분방정식의 이론을 적용하여 구성한 첫 번째 극소곡면이다.

#### (5) Chen-Gackstatter의 곡면

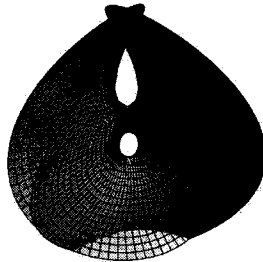


그림 13. Chen-Gackstatter의 곡면

이 곡면은 유클리드 공간에서 위에 정의된 극소곡면으로 단 하나의 end를 가진다. 따라서 이 곡면은 Enneper의 곡면과 유사하나 한 개의 handle을 가지는 곡면이다. 이 곡면의 Weierstrass data는

$$f(z) = 2\wp(z), \quad g(z) = \frac{\rho\wp'(z)}{\wp(z)}$$

이다. 이 곡면은 Gackstatter와 Kunert [19]에 나와 있다. 이 곡면은 모든 자연수 개의 handle을 가지는 곡면으로 일반화된다.

#### (6) Trinoid 등

Jorge와 W. Meeks 에 의하여 1983년에 발견되었다. 이 곡면은 현수면의 end의 갯수를 늘려 나가며 구성되는 곡면이다. 일반적으로 자연수  $n$ 에 대하여  $n$ -noid가 구성된다. trinoid의 Weierstrass data는

$$f(z) = \frac{1}{(z^3 - 1)^2}, \quad g(z) = z^2$$

으로 주어진다.  $n$ -noid는 변형에 따라 다른 크기의 catenoid end를 붙일 수도 있고 end가 붙는 각도를 조절할 수도 있는 등 다양하게 구성된다. 이에 대한 구성 예는 Dierkes 등 [9]에 있다.

## 6. 극대곡면의 개념

### (1) 로렌츠-민코프스키 공간의 기하학

3차원 로렌츠-민코프스키 공간은 삼차원 실벡터공간  $\mathbf{R}^3$ 의 좌표  $(x, y, t)$ 에 대한 비퇴화 2차형식

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$$

에서 유도된 semi-riemannian metric을 계량으로 가지는 공간이며  $\mathbf{L}^3$ 로 나타낸다. 이 공간은 유클리드 공간과 유사한 이론을 전개할 수 있는 반면에 기하학적으로 유클리드 공간과는 매우 다른 양상을 보인다.

대표적으로 이 공간에서의 수직 개념은 유클리드공간과 다르며, 이 공간의 벡터의 자기 자신과의 내적은 모든 실수값을 가질 수 있다. 이 값이 양수인 벡터를 공간꼴(spacelike) 벡터라 하고, 이 값이 음수인 벡터를 시간꼴(timelike) 벡터라 한다. 이 두 개념의 경계에 놓여 이 값을 0으로 하는 벡터는 빛꼴(lightlike) 벡터라고 부른다.

곡면도 그 법선벡터가 모두 시간꼴 벡터이면 이 곡면은 공간꼴 곡면이라 하며 반대로 법선벡터가 모두 공간꼴 벡터이면 이 곡면은 시간꼴 곡면이라 부른다. 공간꼴 곡면은 공간의 형태를 나타낸다고 볼 수 있으며, 시간꼴 곡면은 시간을 따라 변화하는 물리적 실체를 나타낸다고 볼 수 있다. 이 두 가지 곡면은 모두 물리적으로 중요한 대상이 된다.

본 논문에서 우리가 우선 관심을 가지는 것은 공간꼴 곡면이며 시간꼴 곡면에 대하여는 다음 기회로 남겨 둔다.

공간꼴 곡면은  $\mathbf{L}^3$ 에서 그 곡면의 각 점에 유도되는 계량이 양정치(positive definite)여서 리만계량이 된다. 따라서 이러한 곡면의 이론은 비교적 유클리드 공간의 곡면과 내재적으로 유사한 곡면이 된다. 이 곡면의 점에서 법선벡터를 품는 평면과의 교선을 생각하고 이 교선의  $\mathbf{L}^3$  안에서의 곡률을 계산하여 법곡률이라 하면 이 법곡률은 일반적으로 최대 최소값  $\kappa_1, \kappa_2$ 를 가지며 이 두 주방향에 따라 곡면의 제2 기본형식을 대각화할 수 있다. 이 모든 계산은 유클리드 공간의 곡면론과 모두 일치한다. 그러나 이 곡면의 리만계량의 가우스곡률을 계산하여 보면 다음 식을 만족시킨다.

$$K = -\kappa_1\kappa_2$$

이렇게 되는 이유는 Gauss의 방정식에서 법벡터의 자기자신과의 내적이 음수가 되어 마이너스 사인을 주기 때문이다. 따라서 평균곡률  $H = \kappa_1 + \kappa_2$ 이 0이 되는 곡면의 경우 Gauss 곡률은  $K = \kappa_1^2$ 이 되어 유클리드 공간의 극소곡면과는 반대로 항상 음이 아닌 곡률을 가지게 된다.

$\mathbf{L}^3$ 의 회전면을 다룰 때 조심할 점은  $\mathbf{L}^3$ 의 회전에 세 가지 종류가 있다는 것이다. 그 회전축의 방향이 시간꼴이나 공간꼴이나 아니면 빛꼴이나에 따라 이 축을 중심으

로 하는 등장사상(isometry)의 모양이 달라진다. 기본적인 세 가지 회전을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix}.$$

## (2) 극대곡면의 정의

로렌츠-민코프스키 공간의 (공간꼴) 극대곡면은 유클리드 공간의 극소곡면에 대응하는 개념으로 정의된다. 극대곡면은 물리학에서 여러 가지로 중요한 예를 제공해 주므로 4차원 시공간은 물론 3차원 시공간에 해당하는 로렌츠-민코프스키 공간에서의 극대곡면 이론은 많은 사람들의 관심의 대상이 되고 있다. 근래에 들어 여러 기하학자의 연구의 대상이 되고 있으며 새로운 결과들이 보고되고 있는 활발한 분야로 부상하고 있다. 로렌츠-민코프스키 공간의 기하학 및 극대곡면의 이론은 여러 곳에 정리되어 있으며 여기서는 특히 Estudillo 와 Romero [15]를 따른다.

로렌츠-민코프스키 공간  $L^3$ 는  $R^3 = (x_1, x_2, x_3)$ 에 로렌츠 계량  $ds_L^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$ 을 부여한 공간이다. 리만면  $S$ 에서 이 공간에 정의된 사상  $X = (X_1, X_2, X_3): S \rightarrow L^3$ 에서 각각의  $X_i$ 가 조화함수이고 국소좌표  $(U, z)$ 에서 이의 도함수  $\phi_i = \partial X_i / \partial z$ 가 조건

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0 \quad (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 \neq 0)$$

을 만족시킬 때,  $(X, S)$ 를 일반화된 극대곡면이라고 부른다. 이러한 정의는 유클리드 공간의 일반화된 극소곡면에 해당하는 것이다.

이러한 정의는 이렇게 정의된 극대곡면이 국소적으로 곡면의 넓이를 극대로 하는 곡면이 된다는 점에서, 로렌츠-민코프스키 공간에서 극대곡면은 유클리드 공간에서 극소곡면이 갖는 위치와 동등한 위치를 갖는다. 이것은 기본적인 변분법의 계산을 통하여 알 수 있으며, 이 계산은 극소곡면에 대한 계산과 유사하다. 이 사실만으로 보면 극대곡면의 이론은 극소곡면의 이론과 거의 동일한 이론의 전개가 가능한 듯이 보인다.

그러나 실제로 극대곡면의 이론을 구성함에 있어서 극소곡면과는 본질적으로 다른 양상이 로렌츠-민코프스키 공간의 구조에서부터 전개된다. 가장 중요하게는 이렇게 정의된 극대곡면은 가장 단순한 예인 평면을 제외한 모든 극대곡면이 특이점을 가진다는 특별한 성질을 갖는다. 이 사실을  $L^3$ 에서 처음 밝힌 것은 Calabi [4]이며, 일반차원에서는 Cheng과 Yau [5]에 의하여 증명되었다. 이러한 이유로 오래 동안 극대곡면에 대한 연구는 활발하지 않았으나 1983년도에 O. Kobayashi에 의하여 첫 예인 catenoid와 helicoid가 주어지면서 관심을 끌기 시작하였다.

물리학에서의 관심과 기하학적 도구의 개발로 1992년에 Estudillo와 Romero [15]에



의하여 극대곡면의 기본 성질이 밝혀지기 시작하였으며 이로부터 여러 연구결과가 뒤를 이었다. 그러나 많은 연구 결과에도 불구하고 이 공간의 특이점에 대한 연구는 기초적 수준이었다. 방법론의 부재로 인하여 더딘 진전을 보였던 극대곡면의 특이점의 연구는 최근에 특이점에서의 Björling 문제의 구성 및 해결을 계기로 그 전기를 맞고 있다고 생각된다.

### (3) 극대곡면의 방정식과 표현공식

$L^3$ 의 공간꼴(spacelike) 곡면이란 미분 가능한 곡면으로 그 접평면에 유도된 계량이 곡면의 대부분의 점에서 양정치(positive definite)인 곡면을 말한다. 공간꼴 곡면의 계량을 계산해 보면 우선

$$\phi_k = \frac{\partial X_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial X_k}{\partial u_2}$$

이고  $\langle \phi_i, \phi_i \rangle = 0$  이므로  $g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} = 0$ 이 성립한다. 따라서

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{2}(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2) \geq 0, \quad g_{12} = 0$$

이 성립한다.

$L^3$ 의 곡면론은 유클리드 공간의 곡면론과 거의 평행하게 전개된다. 민코프스키 내적의 특수한 성질로 인한 몇 가지 사소한 차이점을 빼면 유클리드 공간 곡면론의 기본적인 공식과 정리들은 그대로 성립한다. 특히 몽쥬조각(Monge patch)  $Z(u, v) = (u, v, f(u, v))$ 이 극대곡면을 이룰 필요충분조건은  $p = f_u, \quad q = f_v, \quad r = f_{uu}, \quad s = f_{uv}, \quad t = f_{vv}$ 라 할 때,

$$(1 - q^2)r + 2pq s + (1 - p^2)t = 0$$

이다.

한편 이러한 극대곡면에 적절한 등온좌표계를 도입하여 매개화된 이론을 전개하면 일반화된 극대곡면은  $X(z) = \text{Re} \int (\phi_1, \phi_2, \phi_3) dz$ 라고 표시되며, 여기서

$$w = f dz = (\phi_1 - i\phi_2) dz, \quad g = \frac{\phi_0}{\phi_1 - i\phi_2}$$

라고 놓으면 이 적분식은

$$X(z) = \text{Re} \int \left( \frac{i}{2}(1 - g^2)w, \frac{1}{2}(1 + g^2)w, gw \right)$$

라고 나타낼 수 있다. 이것을 공간꼴 극대곡면의 Weierstrass 표현 공식이라고 부른다. 여기서 복소해석함수  $g$ 는 이 곡면의 가우스 사상이다. 이 표현에 따르면 곡면의 계량은  $ds^2 = \frac{1}{4}|f|^2(1 - |g|^2)^2|dz|^2$ 와 같이 나타내어진다. 따라서 계량이 퇴화되는  $|g| = 1$ 인 점은  $L^3$  안에서 특이점 형태를 띠게 된다.

#### (4) Björling 문제

유클리드 공간의 Björling 문제와 마찬가지로  $L^3$ 의 극대곡면에 대하여도 Björling 문제를 만들 수 있고 이는 똑같은 방법으로 풀 수 있다. 이를 극대곡면의 Björling 공식이라고 부른다. 즉, 주어진 공간꼴 해석곡선  $\gamma$ 와 이 곡선을 따라 주어진 시간꼴 해석벡터장  $N$ 에 대하여 벡터장  $\gamma'(u) \times N(u)$ 를 복소영역으로 해석확장한 벡터장을 다시  $\gamma'(z) \times N(z)$ 로 쓰기로 하면 이 곡선을 품고  $\gamma$ 를 따라  $N(u)$ 에 수직으로 놓이는 극대곡면은 적분식

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \int^{(u+iv)} (\gamma'(z) - i\gamma'(z) \times N(z)) dz$$

로 나타내어진다. 여기서  $z = u + iv$  이고 외적은  $L^3$ 의 외적이다.

극대곡면에 대한 Björling의 공식도 근본적으로 극대곡면의 매개적 표현이 등운좌표계를 쓴다는 사실을 활용하여 주어진 곡선  $\gamma(u)$ 의 접벡터  $\gamma'(u)$ 와 수직이고 길이가 같은 접벡터  $-\gamma'(u) \times N(u)$ 를 잡아

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u, 0) = \gamma'(u), \quad \frac{\partial X}{\partial v}(u, 0) = -\gamma'(u) \times N(u)$$

가 되도록 한 것이다. 즉, 곡선  $\gamma$ 를 따른 법벡터장  $N(u)$ 이 주어진 것은 실제로  $\partial X / \partial v$ 가 주어진다는 것과 동치이다. 따라서 Björling 문제는 다음과 같이 동치인 문제로 고쳐 쓸 수 있다: 주어진 해석곡선  $\gamma(u)$ 와 이 곡선을 따라 정의된 공간꼴 법벡터장  $V(u) \perp \gamma'(u)$ 로서  $\|V(u)\| = \|\gamma'(u)\|$ 일 때, 곡선  $\gamma$ 를 품으며 주어진 벡터장  $V$ 에 접하는 극대곡면을 구하여라.

그리고 이 문제에 대한 답은 위와 동치인 적분식

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \int^{(u+iv)} (\gamma'(z) + iV(z)) dz$$

로 주어진다. 여기서 피적분함수는 주어진 함수들을 복소영역으로 해석확장한 것이다. 일반적인 Björling 문제를 이러한 방식으로 재해석하면 특이점으로 확장이 가능하다.

### 7. 극대곡면의 성질, 특이점

#### (1) 특이 Björling 문제

원래의 Björling 문제에서  $\gamma$ 가 상수곡선이어서 그 상이 한 점인 경우는 Björling 문제를 구성할 수 없다. 그러나 위의 동치인 형태를 고려하면 이 경우를 포함하여 일반적으로 퇴화된 경우의 Björling 문제를 구성하고 이에 대한 답을 줄 수 있다. 이를 특이 Björling 문제(singular Björling problem)라고 한다: 즉, 주어진 해석곡선  $\gamma(u)$ 가  $\|\gamma'\| \equiv 0$ 이고,  $\gamma$ 따라 벡터장  $V(u)$ 가  $\|V\| \equiv 0$  되도록 주어지면,  $\gamma$ 를 품고  $\gamma$ 를 따라  $V$ 에 접하는 극대곡면이 존재한다. 이 곡면은 Björling data의 해석확장에 대하여

다음과 같은 특이 Björling 공식(singular Björling formula)으로 주어진다([24]):

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \int^{(u+iv)} (\gamma'(z) + iV(z)) dz$$

이 공식의 중요점은 이 공식이 특이점 주변에서의 극대곡면을 구성할 수 있게 하여 줄 뿐만 아니라, 특이점의 구조를 해석하는데 도움을 주리라는 기대 때문이다.

### (2) 극대곡면의 대칭성

Weierstrass 공식과 Björling 공식은 극소곡면의 경우와 마찬가지로 극대곡면의 대칭성에 대한 정보를 알려준다. 극대곡면이 직선을 포함하면 이 직선에 대하여 공간에서 선대칭을 이룬다. 한편 극대곡면이 어떤 평면과 수직으로 만나면 이 평면에 대하여 면대칭을 이룬다. 이러한 기본적인 성질들은 Björling 공식에서 쉽게 알 수 있다.

극대곡면은 특이점에서의 Björling 공식을 가지고 있으므로 특이점에서의 대칭성을 생각할 수 있다. 일반화된 극대곡면에서 대칭성과 관련된 특이점은 수축특이점(shrunken singularity)과 접힌특이점(folded singularity)이다. 이 두 특이점에 대하여 다음과 같은 대칭성이 있다: 즉 적당한 등각매개변수  $(u, v)$ 에 대하여 수축특이점  $X(u, 0) = (0, 0, 0)$ 의 주변에서는  $X(u, -v) = -X(u, v)$ 이고, 접힌특이점  $X(u, 0)$ 의 주변에서는  $X(u, v) = X(u, -v)$ 이다.

여기서 수축특이점과 접힌특이점이 서로 수반극대곡면에서의 특이점이라는 관계가 있으며 이 두 대칭성은 이 사실을 반영하는 것이다.

### (3) 극대곡면의 특이점

극대곡면의 특이 Björling 공식에 따라 극대곡면의 특이점은  $\gamma$ 의 상이 한 점인 경우와  $\gamma$ 의 접벡터가 빛꼴(light like)인 경우가 있음을 알 수 있다. (이 밖에 해석함수의 진성특이점(essential singularity)로부터 나타나는 특이점을 생각할 수 있으나 이는 해석학적 성질에 가까우며 기하학에서는 다루어진 경우가 없다.)

극대곡면의 특이점 가운데 가장 단순한 형태는 매개변수 영역에서  $|g|=1$ 인 곡선의 점들이 퇴화되어 공간에서 한 점으로 나타나는 경우로서 곡면에서의 상(image)만을 보아 고립특이점 또는 위수 0인(rank-0) 특이점이라고 부르는 경우이다. 고립특이점의 대표적인 예는 극대현수면(maximal catenoid)에 보인다. 이러한 특이점을 가지는 곡면들은 Fernández, López, Souam([16], [17], [18]) 등에 의하여 분류되어 있다.

이에 반하여  $|g|=1$ 을 만족시키는 곡선의 상이 곡선으로 나타나는 경우가 있다. 이러한 곡선 위의 특이점을 위수 1인(rank-1) 특이점이라고 부른다. 극대곡면에 나타나는 특이점은 보편적으로 위수 1인 특이점들이지만 주기적이 되어 닫힌 극대곡면으로 이러한 특이점을 가지는 곡면은 많이 알려져 있지 않으며 대표적으로 Kim-Yang의 곡면족을 들 수 있다([22]).

특이점에 대한 분류는 다 이루어져 있지 않다. 가장 대표적인 경우로 conelike,

cuspidal edge, cusp, cross hat, butterfly 등의 특이점이 나타나는 것이 알려져 있다 ([30]). 일반적으로 파곡이론에서 가능한 모든 꼴의 특이점이 실제로 극대곡면의 특이점으로 존재하는지는 알려져 있지 않다.

극대곡면의 고립특이점은 다음과 같은 특수한 성질을 가지고 있다. 고립특이점을 고정시키고 타원형 또는 쌍곡형 회전과 적절한 확대를 혼합하여 극대곡면을 한쪽 방향으로 기울이면 이 고립특이점 근방의 곡면은 포물형 현수면으로 수렴한다. 특히 포물형 현수면은 이러한 등장변환(isometry)에 대하여 불변이다([23]).



그림 14. 고립특이점 근방의 수렴

## 8. 극대곡면의 예와 그 구성

### (1) O. Kobayashi의 극대 현수면

O. Kobayashi는 그의 논문에서 세 종류의 축에 대하여 회전대칭인 극대곡면을 구성하였다. 이는 각각 타원형, 포물형, 쌍곡형 현수면이다. 이들은 유클리드 공간의 극소곡면 경우와 마찬가지로 회전면으로서의 극대곡면을 찾은 것이다.

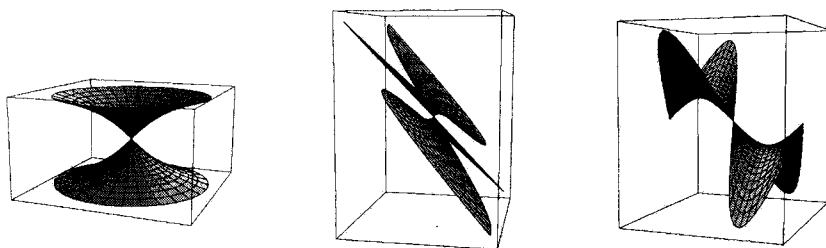


그림 15. 타원형, 포물형, 쌍곡형 현수면 (순서대로)

(2) 극대 나선면

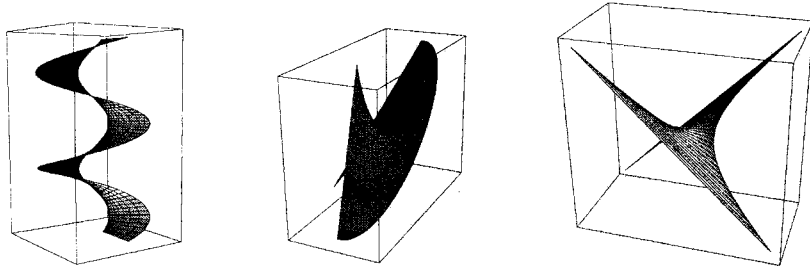


그림 16. 제1종 나선면, Cayley의 선직면, 제2종 나선면 (순서대로)

극대 나선면도 세 가지가 있으며 이들은 [1]에서 각각 제1종 나선면, Cayley의 선직면, 제2종 나선면이라고 불린다. 제1종 나선면의 매개변수꼴 표현은 다음과 같다:

$$X(u, v) = (\sin v \cosh u, \cos v \cosh u, v).$$

(3) Enneper꼴 극대곡면

Weierstrass data를  $f(z) = 1$ ,  $g(z) = z$ 로 하여 얻은 곡면이다. 매개변수꼴로 쓰면

$$X(u, v) = \left( u^2v - v - \frac{1}{3}v^3, -uv^2 + u + \frac{1}{3}u^3, u^2 - v^2 \right)$$

이다. 이 곡면은 Estudillo와 Romero([15])의 논문에 처음 나온다.

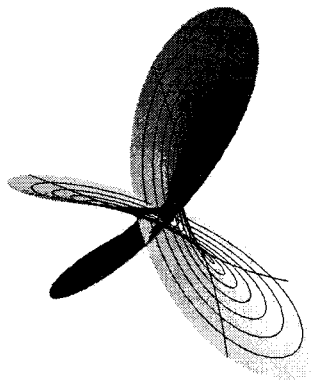


그림 17. 극대 Enneper 곡면

(4) Scherk꼴 분리형 극대곡면

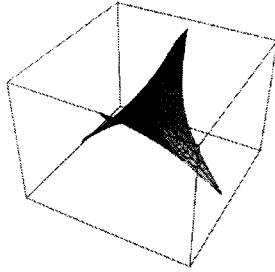


그림 18. 분리형 Scherk 극대곡면

$f(x,y) = g(x) + h(y)$  꼴로 표시되는 극대곡면을 찾으려면 유일하게 다음 함수의 그래프를 구할 수 있다.

$$f(x,u) = \log \frac{\cosh y}{\cosh x}$$

이 곡면의 매개변수꼴 표현은

$$X(u,v) = \left( \log \left| \frac{z-i}{z+i} \right|, \log \left| \frac{z+1}{z-1} \right|, \log \left| \frac{z^2+1}{z^2-1} \right| \right)$$

이다. 이 곡면은 영역  $\{(x,y) : \tanh^2 x + \tanh^2 y < 1\}$ 에서만 공간꼴 곡면이 되며 이 경계는 이 곡면의 특이점으로 branch point가 된다. 이 곡면은 Estudillo와 Romero([15])의 논문에 처음 언급되었다.

### (5) 고깔꼴 특이점을 갖는 극대곡면들

Fernández, López, Souam은 그들의 논문 [16], [17], [18]에서 고깔꼴의 고립특이점을 가지며 평면 전체에서 함수의 그래프꼴로 나타내어지는 극대곡면을 모두 분류하였다. 이러한 곡면에는 유한개의 고립특이점만을 가지는 곡면들과 주기적 형태의 곡면들이 있다. 그들은 이 곡면들의 moduli 공간을 연구하였다. 이 곡면들은 단순히 함수의 그래프꼴 곡면으로 분류되었으나 Kim-Yang([24])의 Björling 공식에 따라 고깔점에서 점대칭을 이루어야 하며 이런 방식으로 확장된다.

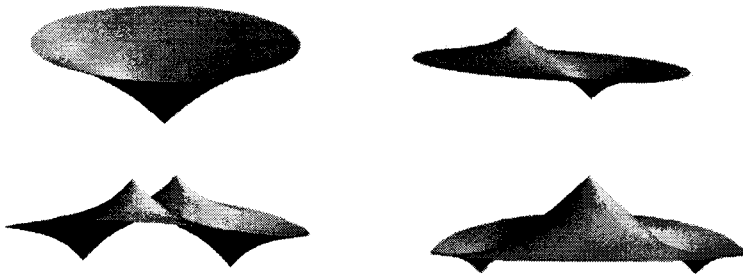


그림 19. 유한 고립특이점 극대곡면([17])

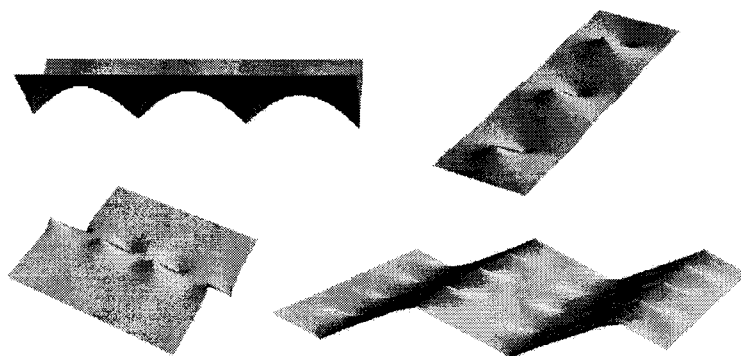


그림 20. 주기적 고립특이점 극대곡면([18])

### (6) Scherk꼴의 2중주기 극대곡면

Scherk의 2중주기 극소곡면과 같은 영역 위에 정의되는 극대곡면으로 앞의 Scherk 꼴 분리형 곡면의 공액곡면을 생각하자. Weierstrass data를

$$f(z) = \frac{i}{z^4 + 1}, \quad g(z) = z$$

라 놓고 이로 부터 곡면을 구성하면 아래와 같은 곡면을 얻을 수 있다. 이 곡면은 4개의 고립특이점을 가지며 이 고립특이점 너머로 점대칭으로 확장되어 Scherk의 2중주기 곡면과 같은 영역 위에 정의된다. 이것은 김영욱과 양성덕에 의하여 발견되었다 ([22]).

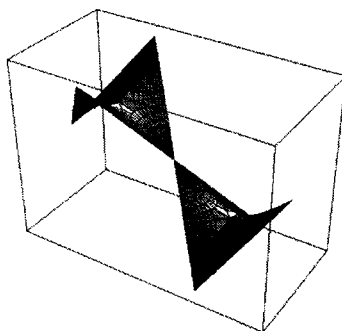


그림 21. Scherk꼴의 2중주기 극대곡면

### (7) Kim-Yang의 극대곡면

2005년도 Kim-Yang의 논문 [23]에 발표된 극대곡면은 임의의 종수  $n$ 인 유클리드 공간 위에 정의된 극대곡면으로 두 개의 catenoid end를 가지며 각 좌표평면에 대하여 대칭이다. 이 곡면은 극대곡면으로서 Costa-Hoffman-Meeks의 극소곡면과 유사한 극대곡

면으로 보고되었다. 이 곡면은 좋은 대칭성과 특이점을 가지고 있으며 유클리드 공간 위에서 정의된 첫 번째 극대곡면의 예이다.

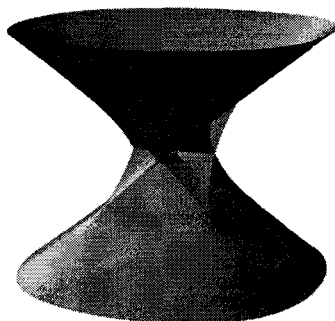


그림 22. Kim-Yang의 Costa 꼴 극대곡면

### 참고 문헌

1. L. J. Alías, R. M. B. Chavês, P. Mira, *Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 134(2) (2003) 289–316.
2. Barbosa, J. L., Colares, A. G., *Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Lect. Notes Math. 1195, Springer, New York, 1986.
3. Bernstein, S., *Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique*, Comm. de la Soc. Math. de Kharkov(2-ème sér.) 15, 38–45 (1915–1917). Translation in Math. Z. 26, 551–558 (1927) under the title: Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus.
4. Calabi, E., *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math., 15 (1970) 223–230.
5. Cheng, S.-Y., Yau, S.-T., *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math., 104 (1976) 407–419.
6. Colding, T. H., Minicozzi II, W. P., *Minimal Surfaces*, Courant Lecture Notes Math. 4, Courant Inst. Math. Sci, New York, 1999.
7. Courant, R., *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces*, Dover Publications, Incorporated, 2005.
8. Darboux, *Leçon sur la théorie générale des surfaces*, Part 1, Gauthier-Villars, Paris, 1887.
9. Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., Wohlrab, O., *Minimal Surfaces I, II*, Springer, Berlin, 1992.



10. do Carmo, M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1976.
11. Choe, J., *On the analytic reflection of a minimal surface*, Pacific J. Math. 157 (1993) 29-35.
12. Choe, J., *On the existence of higher dimensional Enneper's surface*, Comment. Math. Helvetici 71 (1996) 556-569.
13. Choe, J., Soret, M., *Nonexistence of certain complete minimal surfaces with planar ends*, Comment. Math. Helvetici 75 (2000) 189-199.
14. Enneper, A., *Analytisch-geometrische Untersuchungen*, Z. Math. Phys. 9, 1864, 96-125.
15. Estudillo, F. J. M., Romero, A., *Generalized maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space  $L^3$* , Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 111 (1992) 515 - 524.
16. Fernández, I., López, F., *Periodic Maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski space  $L^3$* , To appear in Math. Z. arXiv:math.DG/0412461 v3.
17. Fernández, I., López, F., Souam, R., *The space of complete embedded maximal surfaces with isolated singularities in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space  $L^3$* , Math. Ann. 332(3) (2005) 605 - 643.
18. Fernández, I., López, F., Souam, R., *The moduli space of embedded singly periodic maximal surfaces with isolated singularities in the Lorentz-Minkowski space  $L^3$* , arXiv:math.DG/0412190 v1.
19. Gackstatter, F., Kunert, R., *Konstruktion vollständiger Minimalflächen von endlicher Gesamtkrümmung*, Arch. Ration. Mech. Anal. 65 (1977) 289-297.
20. Karcher, H., *The triply periodic minimal surfaces of Alan Schoen and their constant mean curvature companions*, Manuscr. Math. 64 (1989) 291-357.
21. Karcher, H., *Construction of minimal surfaces*. Surveys in Geometry, 1989/90, University of Tokyo, 1989, Also: Vorlesungsreihe Nr. 12, SFB 256, Bonn, 1989, 1-96.
22. Kim, Y. W., *Spacelike maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space*, K. M. S., 2006 Fall Conference, Seoul National University (2006).
23. Kim, Y. W., Yang, S.-D., *A Family of Maximal surfaces in Lorentz-Minkowski three-space*, Proc. A. M. S. 134(11) (2006) 3379-3390.
24. Kim, Y. W., Yang, S.-D., *Prescribing singularities of maximal surfaces via a singular Björling representation formula*, J. Geo. Phy. 57 (2007) 2167-2177.
25. Kim, Y. W., Koh, S.-E., Shin, H., Yang, S.-D., *Generalized surfaces with constant  $H/K$  in Euclidean three-space*, Manuscr. Math. 124 (2007) 343-361.
26. Nitsche, J. C. C., *Lectures on Minimal Surfaces*, vol.1, Springer, New York, 1975.
27. Osserman, R., *A Survey of Minimal Surfaces*, Van Nostrand, New York, 1969.
28. Schwarz, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Band I, II, Springer, Berlin, 1890.

29. Struick, D. J., *Lectures on Classical Differential Geomerty*, 2nd ed., Dover, New York, 1988.
30. Umehara, M., Yamada, K., *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. 35(1) (2006) 13–40.
31. Weber, M., <http://www.math.uni-bonn.de/people/weber/mathematica/costa/costa.html>.
32. Weierstrass, K., *Fortsetzung der Untersuchung über die Minimalflächen*, Monatsbericht der Königl. Akademie d. Wiss., 855–856, December 1866 and Math. Werke 3, 219–220, Mayer & Müller, Berlin, 1903.
33. Weierstrass, K., *Über eine besondere Gattung von Minimalflächen*, Monatsbericht der Königl. Akademie der Wiss., 511–518, August 1887 and Math. Werke 3, 241–247, Mayer & Müller, Berlin, 1903.
34. Weierstrass, K., *Analytische Bestimmung einfach zusammenhängender Minimalflächen, deren Begrenzung aus geradlinigen, ganz im endlichen liegenden Strecken besteht*, Math. Werke 3, 221–238. Mayer & Müller, Berlin, 1903.
35. <http://www.susqu.edu/brakke/evolver/examples/periodic/periodic.html>.

## History of the Search for Minimal and Maximal Surfaces

Dept. of Math., Korea University **Young Wook Kim**

Dept. of Math., Korea University **So Young Kim**

Dept. of Math., Korea University **Ji Yean Kim**

Theory of minimal surfaces has always been in the center of differential geometry. The most difficult part in minimal surfaces is how to find meaningful examples. In this paper we survey the history of search for minimal surfaces. We also introduce examples of recently emerging maximal surfaces in the Lorentz–Minkowski space and compare the processes in the search for the minimal and the maximal surfaces.

*Key words* : Minimal Surfaces, Maximal Surfaces.

2000 Mathematics Subject Classification : 01A50, 01A55, 01A60, 53-03

논문 접수 : 2008 년 1월

심사 완료 : 2008 년 2월