한국수학사학회지 제21권 제1호(2008년 2월), 29 - 44

퍼지 논리의 시조 Zadeh

충북대학교 수학과 **이승온**
solee@chungbuk.ac.kr

충북대학교 수학과 **김진태**
kjtmath@hanmail.net

퍼지 논리는 1965년 Zadeh([13])에 의하여 소개된 이후 꾸준히 확장, 발전하였다. 퍼지 논리와 관련된 수학사 및 수학교육 논문([1], [2], [3], [4], [5], [7])들이 많이 발표 되었지만 정작 퍼지 논리의 창시자인 Zadeh에 대한 연구 논문은 아직 발표되지 않았다. 본 논문에서는 Zadeh의 생애와 업적을 알아보고 이를 통해 우리가 배워야 할 점들에 대해 논의한다. 또한 이가 논리, 다가 논리, 퍼지 논리, 직관주의 논리 및 직관적 퍼지 집합을 비교, 분석하고 직관적 퍼지 집합에서 '직관적(intuitionistic)'이라는 용어의 부적절성에 대해 논의한다.

주제어 : Zadeh, 이가 논리, 다가 논리, 퍼지 논리, 직관주의, 직관적 퍼지 집합

0. 서론

퍼지 논리는 1965년 Zadeh에 의하여 제창된 이래 커다란 반향을 일으키며 다양한 여러 분야-자연과학, 경영과학, 사회과학, 경제학, 철학, 법률, 심리학, 언어학, 의학, 제어 이론 등-에 큰 영향을 끼치며 성장해 왔다. 퍼지 이론은 수학의 여러 분야-위상수학, 해석학, 대수학, 확률론, 그래프 이론 등-에 적용되어 많은 학자들에 의해 활발히 연구되고 있다. 국내에서도 퍼지 이론 뿐 아니라 수리철학 분야의 연구가 진행되고 있다. 다수의 논문([2], [3], [4], [5])에서 저자는 현대 철학의 경향이 퍼지 논리와 유사하다는 점에 주목하고 퍼지 논리가 1960년대에 등장한 것이 우연만은 아니라고 주장한다. 현재 수학교육계의 교육철학은 '학습이란 지식의 전수가 아닌 학습자 자신이 구성해 나가는 활동'으로 보는 구성주의(constructivism) 이론인데 구성주의가 현장에서 실천되기 위해서는 무엇보다도 인간 혁신과 인간 활동을 중심으로 하는 교육 내용이 마련되어야 한다. 이를 위해 이가 논리(two-valued logic)를 바탕으로 한 수학 교육보다 퍼지 논리를 바탕으로 한 수학 교육으로 방향이 전환되어야 한다고 주장하는 국내학자들도 다수 존재한다([1], [7]). 이처럼 퍼지 논리와 관련된 수학사 및 수학 교육 논문들은 많이 발표되었지만 정작 퍼지 논리의 창시자인 Zadeh에 대한 연구 논

문은 아직 발표되지 않았다. 본 논문에서는 Zadeh의 생애와 업적을 알아보고 이를 통해 우리가 배워야 할 점들에 대해 논의한다. 마지막으로, 이가 논리, 다가 논리, 퍼지 논리, 직관주의 논리 및 직관적 퍼지 집합을 비교, 분석하고 직관적 퍼지 집합에서 '직관적(intuitionistic)'이라는 용어의 부적절성에 대해 논의한다.

1. Zadeh

Lotfi A. Zadeh(1921-)는 구소련 아제르바이잔 바쿠에서 1921년에 태어났다. 퍼지 논리의 창시자로써, Zadeh는 자신이 시간이나 장소에 구애받지 않는 세상에 속한다고 생각한다. 다음은 그의 이런 주장을 잘 대변해 주고 있다.

"문제는 내가 미국인, 러시아인, 이란인, 아제르바이잔인 또는 그 밖의 다른 민족에 속해있다는 것이 아니라, 내가 이러한 모든 사람들과 문화들에 의해 영향을 받고 있으며 그들 사이에서 매우 안락함을 느낀다는 것이다."

이는 Zadeh가 생각지도 못한 절대적 범주들을 어떻게 피할 수 있는가에 대한 생생한 예이며, 컴퓨터 기술에 강한 영향을 주고 있는 비전통적 이론인 퍼지 논리를 특징짓는 생각과 같은 종류의 것이라 여겨진다.

이란의 저널리스트로 일하는 아제르바이잔인 아버지와 의사인 러시아 어머니 사이에서 태어난 Zadeh는 어린 시절 많은 혜택을 누리며 성장하였다. Zadeh는 처음 3학년을 바쿠에 있는 초등학교에 다녔는데 7살부터 10살까지의 3년은 사물을 보는 그의 방식과 생각에 중대하고 지속적인 영향을 끼쳤다. 그 기간(1928-1931)동안 그는 다음과 같은 소련의 사상을 끊임없이 주입받았다 : "이상적이어야 한다.", "개인의 요구보다 사회의 요구를 우선시해야 한다.", "과학에 흥미를 가져야 한다.", "열심히 일해야 한다."

소련은 과학과 기술을 매우 중시했으며 Zadeh에게 사회에 빚을 지고 있으므로 다른 사람들을 위해 무언가를 공헌해야 한다는 믿음도 주입시켰다.

Zadeh는 책을 열심히 읽었다. 외아들인 그를 부모님은 도서관에 자주 데리고 다녔는데, 열 살 때 러시아의 Tolstoy(1828-1910), Dostoyevski(1821-1881), Chekhov(1860-1904), Turgenev(1818-1883)의 작품과, 러시아어로 번역된 영국의 Shakespeare(1564-1616)의 작품을 읽었다. 어린 시절 그가 받은 모든 사랑과 관심은 사물에 대한 호기심을 더욱 높여주었으며 이러한 호기심은 계속해서 그가 여러 분야에서 공헌을 할 수 있는 소중한 밑거름이 되었다. 이와 관련된 그의 말을 들어보자.

"나는 아주 호기심이 많은 사람이다. 신문과 잡지를 많이 읽고 다른 여러 나라에서 일어나는 일들에 대하여 두루 관심을 가지고 있다. 나는 전 세계의 여러 회담에 참여하였고 때로 사람들은 내가 그들 나라의 정치 및 동향에 대해 꽤 많이 알고 있다는 사실에 놀라기도 한다. 일반적으로 사람들은 나이가 들어갈수록 과학적인 일에 대하여 흥미를 잃어가며 가족, 어린아이, 손자, 재산, 사업, 회사와 같은 일에 관심을 갖지만 나는 그렇지 않다. 무엇보다 내 분야에서 일어나는 일들에 대해 지속적인 호기심을 가진 결과 계속해서 나는 활동적일 수 있었다. 호기심이 없었다면 나는 계속해서 여러 공헌들을 할 수 없었을 것이다."

열 살이 되던 무렵, Stalin(1879 ~ 1953)이 소련 연방 전체의 농장을 국유화하자, 곳곳에서 굶주림과 기아가 창궐했다. 설상가상으로 Stalin은 강력한 이민 정책을 실시하였는데 이 때문에 Zadeh의 가족들은 아버지의 고향 테헤란으로 돌아갈 수밖에 없었다. 그곳에서 Zadeh의 부모는 미국에서 온 장로교 선교사들이 관리하는 Alborz College에 그를 입학시켰다. Zadeh는 이들에게 매우 깊은 영향을 받았는데 그들은 매우 점잖고, 친절하고, 정직하며, 다른 사람들에게 귀감이 되는 사람들이었다. Zadeh에게 그들은 미국에서 찾을 수 있는 가장 좋은 사람들이었다. 그들은 정말로 다른 사람들의 이익을 위해 자신들을 봉사할 줄 아는 '착한 사마리아인들'이었다. 이런 친절한 태도는 Zadeh에게 큰 영향을 주었으며 미국에서 살고 싶다는 소망을 갖게 해주었다. 어린 시절의 이러한 경험과 흥미는 Zadeh의 삶과 생애를 형성하는데 큰 기여를 하였다. 실제로 그는 바쿠에서의 삶뿐만 아니라 테헤란에서의 청소년기까지 그러한 환경에서 자랄 수 있었던 것을 큰 행운으로 여기고 있으며 오늘날 많은 젊은이들이 존경할 만한 역할 모델의 부재로 인해 음주, 섹스, 마약 등과 같은 부정적인 요소들에 영향을 받는 것에 대해 크게 염려 하고 있다. 나아가, Zadeh는 21세기의 젊은이들에게 다음과 같은 조언을 하고 있다.

"젊은이들에게 착하고 침착하며 숙고하고 사려 깊은 사람이 되라고 충고하기는 쉽다. 하지만 의문이 생긴다. 이러한 조언들이 정말 가치가 있는 것일까? 우리가 겸손해야 함은 분명한 사실이다. 문제는 엄청나게 경쟁적이고 무엇보다 수입에 의해 성공이 측정되는 사회에서 그런 식으로 행동할 수 있느냐 하는 것이다. 청소년들은 지속적으로 가식적이고 거짓으로 가득 차 있는 광고들에 의해 폭격을 받고 있다. 이것이 오늘날 우리가 살고 있는 환경이다. 소비주의는 이데올로기이다. 이것은 청소년들의 긍정적인 태도를 향상시키는데 도움이 되지 않으며 인생이 무엇인지 이해하는데도 도움을 주지 못한다. TV에서 보고 듣는 것은 불건전하며 이러한 것들을 중요하게 생각하지 말아야 함을 깨닫는 일은 매우 중요하다. 한마디로, 젊은 사람들은 TV 보다 책에서 중요한 것들을 배우고 책을 읽는 습관을 들여야 한다."

고등학교 졸업 후, Zadeh는 국가에서 실시하는 대학 입학시험을 치렀고 전국 2위의 높은 점수를 획득했다. 1942년에 그는 테헤란 대학의 전기공학과를 졸업하였으며 2차 세계 대전 중에 미국으로 건너가 1946년에 매사추세츠 공과대학에서 석사학위를 취득하였다. 그 후 1949년에 컬럼비아 대학에서 박사학위를 취득했으며 그곳에서 시스템 이론(Systems theory)를 가르치기 시작했다. 1959년 이후 그는 캘리포니아 대학 버클리 분교의 전기공학과의 교수로 생활하고 있다.(전기공학과는 후에 컴퓨터 과학부로 통합됨.)

1991년 이후, Zadeh는 공식적으로는 은퇴하였으나 여전히 캠퍼스내의 사무실에 매일 출근하고 있으며 여러 회담 및 협의회로 인해 자주 외국으로 출국한다. 그는 일반적으로 East Coast행 심야 비행기를 이용하여 밤새도록 여행하는 것을 좋아하는데 그 이유는 일정이 너무 바빠서 많은 시간을 공항과 호텔에서 보낼 수 없기 때문이란다.

Zadeh는 마르고, 조용하며, 겸손한 사람이다. 그는 종종 그의 견해에 동조하지 않는 사람들에게 조차도 매우 품위 있는 인물-유럽인의 관점에서 본 신사-로 묘사되곤 한다. 여가시간에, Zadeh는 지난 세월을 간직하기 위해 사진 찍는 것을 좋아하는데 이를 위해 많은 시간을 투자하곤 한다. 그는 흑백 초상화(회색 빛깔의 명도가 선명한)를 매우 좋아하며, Truman(1884-1972)과 Nixon(1913-1994) 대통령을 포함한 많은 유명 인사들과 함께 사진을 찍었다.

Zadeh는 학구적인 과학자들뿐만 아니라 일상생활로부터 나오는 구체적이고 실질적인 예들에 대한 과학적 원리의 묘사에 의해 길들여지지 않은 대부분의 초보자에게 조차 생각의 유연함을 제공하는 천부적인 재능을 가지고 있다. 그는 두 그룹 모두에게 접근하기 위해 최선을 다한다.

1965년에 발표된 퍼지 논리에 대한 그의 최초 논문은 여러 회의론에 부딪쳤다. 실제로 Zadeh의 말에 따르면 때때로 노골적으로 적대시 되었다고도 한다. 하지만 그는 이것이 중요하게 여겨질 것이라고 생각했다. 실제로 Zadeh는 날짜가 적힌 봉투에 그의 예언과 함께 퍼지 논리를 봉인하고 직감이 맞는다면 20-30년 후에 이것을 열어 공개하는 방안에 대해 생각했었다. 그는 이 논문이 새로운 방향으로 주목을 끌 것이라고 생각했으며 언젠가 퍼지 논리가 버클리 대학의 전기공학 컴퓨터 시스템부에서 가장 중요한 것들 중 하나로 판명될 것이라고 생각했다. Zadeh는 퍼지 이론이 세계적인 사건이 되기를 꿈꾸지는 않았으나 그의 예상은 빗나갔다. 여기서 한 가지 생각하고 넘어가야 할 점이 있다. 처음 Zadeh는 왜 '퍼지(fuzzy)'라는 용어를 사용했을까? 다음의 그의 말을 들어보자.

"나는 이것이 이론 내에서 무엇이 진행되고 있는지를 가장 정확히 묘사하는 것이라고 느꼈기 때문에 '퍼지'라는 용어를 사용하였다. 나는 가치를 떨어뜨리지 않는 의미를 지닌 좀 더 우아한 용어를 고를 수 있었다. '부드러운(soft)'이라는 용어를 생각해봤지만 이것은 내 마음속에 있는 것을 정확하게 표현하지 못하였다. '무딘(unsharp)', '흐릿한(blurred)', '탄력있는(elastic)' 도 (내 마음속에 있는 것을) 설명하지 못하였다.

결국 나는 더 정확한 것을 생각하지 못하였고 ‘퍼지’라는 용어를 택하였다.”

퍼지 논리의 응용 범위는 어느 정도 일까? 30년이 지난 후, 초창기만큼은 아니더라도 퍼지 논리에 대한 논쟁은 여전히 존재한다. 하지만 수많은 퍼지 논리의 응용은, 특히 일본에서, 너무도 명백하여 이를 부정하기는 어렵다고 보여 진다. 최근에 Zadeh는 진행속도가 너무 빨라 이 분야의 발전 속도를 자신이 따라가기가 어렵다고 말한다. 하지만 다음의 말에서 알 수 있듯이 퍼지 논리가 전통적인 논리 체계보다 훨씬 더 광범위할지라도, 이것이 만병통치약이 아님을 Zadeh는 인정한다.

“오늘날 우리가 생각할 수 있는 컴퓨터의 능력, 어떠한 기계와 논리체계도 뛰어 넘는, 인간이 편안함을 가지고 수행할 수 있는 일들이 존재하고 또 존재하게 될 것이다.”

버클리에 새롭게 건설된 컴퓨터 과학 건물에 있는 그의 사무실의 복도와 천장에는 퍼지와 관련된 기사들이 많이 도배되어 있다. Zadeh는 진보된 교육을 제공하는 모든 나라에 퍼지 논리를 연구하는 사람들이 있다고 믿고 있다. 표지에 ‘퍼지’라는 단어를 포함하는 12개의 저널이 현재 발행되고 있다. 세계 여러 곳의 저널들에 게재된 논문들을 정확히 파악하기가 힘들다 하더라도, 어림잡아 15,000편의 논문들이 발행되었다고 보고 있다. 퍼지 논리에 대한 약 3,000개의 특허가 접수되었으며, 1000여개 정도가 승인되었다. 일본에는 2,000여명 정도의 과학자들이 퍼지 논리를 연구하고 있으며 협력을 통해 가전제품, 전자장비 등과 같은 소비재 개발에 박차를 가하고 있다. Mitsushita(Panasonic으로 유명한)는 1991년과 1992년 사이에 퍼지 논리를 이용한 제품들이 10억 달러 이상 판매되었다고 보고 있다.

Zadeh의 지적 공헌은 무수히 많다. 그는 ‘Who's who in the world’에 등재되었고 퍼지 논리는 1980년대 후반부터 일본에서 많은 관심을 불러 일으켰으며 급속도로 팽창되었다. 이러한 공로가 인정되어 1991년 그는 일본에서 Honda상을 받고, 전 세계의 다양한 메달뿐만 아니라 명예회원 및 박사학위도 받았으며 또한 여러 의장직을 수행하였다. 아제르바이잔 공화국은 1993년에 Zadeh를 아제르바이잔 국립 석유학회의 명예교수로 임명하였다.

2. Zadeh의 경력 및 수상

(1) 경력

Zadeh는 1959년에 캘리포니아 주립대 버클리 분교의 전기공학과 교수로 임용되었으며 1963년부터 1968년까지 학과장으로 일했다. 버클리에 오기 전, 그는 컬럼비아 대

학의 전기공학과 교수였다. 1956년에는 뉴저지 주 프린스턴에 있는 고등과학원의 방문 연구원이었으며 이 외에도 여러 곳을 방문하며 연구하였는데 1962년과 1968년에는 MIT의 방문교수로, 1968년, 1973년, 1977년에는 IBM 연구소의 방문학자로 활동하였다. 그리고 1981년에는 국제 SRI 인공지능 센터의 방문학자로, 1987년과 1988년에는 스탠포드 대학의 언어 및 정보센터의 방문학자로 활동하였다. 현재 그는 BISC (Berkeley Initiative in Soft Computing)의 소장으로 재직하고 있다.

1965년까지 Zadeh의 연구는 시스템 이론(system theory)과 결정 해석(decision analysis)에 집중되었다. 그 후 그의 주된 관심은 퍼지 이론과 인공지능, 언어학, 논리, 결정 해석, 제어 이론, 전문가 시스템, 신경조직 등에 퍼지 이론을 응용하는 문제로 옮겨갔다. 현재 그의 연구는 퍼지 논리, 부드러운 계산(Soft Computing), 언어의 계산(Computing with words), 지각의 계산 이론(Computational theory of perceptions) 등에 초점이 맞춰져 있다.

테헤란 대학, MIT, 컬럼비아 대학의 졸업생으로서 Zadeh는 IEEE, AAAS, ACM, AAAI 및 국가 공학회(National Academy of Engineering)의 회원으로 등록되어 있다.

(2) 수상

1973년 : IEEE 교육 메달 수상.

1984년 : IEEE 100주년 기념 메달 수상.

1989년 : Honda재단으로부터 Honda상 수상.

1991년 : 캘리포니아 대학으로부터 버클리 감사장 수상.

1992년 : '퍼지 집합의 개념화를 포함하여 정보과학과 체계에 대한 공로'로 IEEE Richard W. Hamming 메달 수상.
The Russian Academy of Natural Sciences의 외국인 회원으로 등재.
The International Foundation for Artificial Intelligence로부터 AI특별 공로상 수상.
Kampe de Ferit상 수상.
The Austrian Society of Cybernetic Studies 명예회원으로 등재.

1993년 : The American Society of Mechanical Engineers로부터 '시스템 이론, 결정 해석 및 퍼지 집합과 이의 인공지능, 언어학, 논리, 전문가 시스템, 신경조직에의 응용에 대한 공로'로 Rufus Oldenburger 메달 수상.
독창적 연구에 대한 Grigore Moisil 상 수상.
The Second International Conference on Fuzzy Theory and Technology 에서 최고 논문상 수상.

1995년 : '퍼지 논리의 개척과 여러 분야에의 응용에 대한 공로'로 명예 IEEE 메달 수상.

1996년 : '퍼지 논리 및 이의 응용을 통한 정보과학의 발전에 대한 공로'로 Okawa

상 수상.

1997년 : The Academy of Sciences of the Czech Republic으로부터 '퍼지 수학에서의 뛰어난 업적'의 공로로 B. Bolzano 메달 수상.
The IEEE Systems, Science and Cybernetics Society로부터 J. P. Wohl Career Achievement상 수상.

1998년 : The International Society for Intelligent Systems로부터 Edward Feigenbaum 메달 수상.
The American Council on Automatic Control로부터 Richard E. Bellman Control Heritage상 수상.
The Association for Intelligent Machinery로부터 정보 과학상 수상.
The Society for Fuzzy Theory in Japan으로부터 Soft Scientific Contribution Memorial상 수상.

1999년 : 버클리 특별 회원으로 선출
IFSA(International Fuzzy Systems Association)으로부터 유공증 수상.

2000년 : IEEE 새천년상 수상, IEEE 개척자상 수상.
'수의 계산으로부터 언어의 계산까지 - 측정의 조작으로부터 지각의 조작까지'라는 논문으로 ACIDCA 2000상 수상.

2001년 : 퍼지 논리의 발전을 통한 인공지능에 대한 공로로 ACM Allen Newell상 수상.

3. 다양한 논리들 사이의 비교, 분석

이 절에서는 현재까지 소개된 여러 종류의 논리들을 알아보고 그들 사이의 관계 및 차이점을 비교, 분석해 보고자 한다.

(1) 이가 논리(Two-valued logic)[6]

집합 A가 전체집합 X의 부분집합일 때, χ_A를 A의 특성함수라고 하면 $x \in A$인 경우는 $\chi_A(x)=1$이고 $x \not\in A$인 경우는 $\chi_A(x)=0$이다. $p_A(x)$를 'x가 A에 속한다'라는 명제 함수라 두면 p_A는 $x \in A$일 때, $p_A(x)=1$, $x \not\in A$일 때, $p_A(x)=0$가 되므로 $\chi_A = p_A$로서 p_A는 X에서 $\{0, 1\}$로 가는 함수가 된다. 즉, X의 부분집합 A는 'x가 A에 속한다'라는 명제 함수 p_A를 정의한다.

역으로, 전체집합 X의 임의 고정된 원소 x에 따라서 $p(x)$가 참 또는 거짓이 되는 명제 함수일 때, $p(x)$가 참이 되는 x들의 집합 $\{x \in X \mid p(x)\text{는 참}\}$은 X의 부분집합이 된다. 그러므로, 다음의 정리를 이끌어 낼 수 있다.

3.1 정리. X가 전체집합일 때, X의 멱집합을 $P(X)$, X에서의 명제 함수들의 집합을 $\xi(X)$라 하면 대응 f : $P(X) \to \xi(X)$, $A \mapsto f(A) = p_A z$는 집합 $P(X)$의 수학적 체계와 이가 논리 $\xi(X)$의 수학적 체계를 연결시키는 동형사상이다.

이 대응에 의해 보통집합 족에서 연산 합집합 ($\cup$)은 명제들의 집합에서 논리합 ($\vee$)에 대응하고, 교집합 ($\cap$)은 논리곱 ($\wedge$)에 대응하며, 여집합은 논리부정과 대응하고, '포함한다'($\subset$)은 함의 ($\to$)에 대응된다. 또한 X는 항진명제, $\varnothing$은 모순명제에 대응하며 집합론에서의 모든 정리와 결과들은 이가 논리에서의 정리와 결과로 변형되어질 수 있다.

(2) 다가 논리(Multi-valued logic)[6]

양자역학의 불확정성 원리처럼 어떤 명제에 관한 진리값이 본질적으로 불확정적인 경우가 있다. Werner Karl Heisenberg(1901-1976)의 불확정성 원리란 한 입자의 정확한 위치와 운동량을 동시에 측정하기란 물리적으로 불가능하다는 것으로, 원자보다 작은 입자의 현상을 측정할 때 일어나는 불확정성은 근본적으로 피할 수 없다는 것이다. 그래서 수학에서 이러한 명제들을 모두 다루기 위해서는 진리값의 불확실성도 고려한 논리체계가 필요하며 이에 대한 대안으로 다가 논리를 생각하게 된 것이다. 그러므로 모든 다가 논리는 고전 논리인 참, 거짓의 이분법에 하나 또는 여러 개의 진리값을 0과 1사이에 허용함으로써 전개하고 있다.

1) 3가 논리

3가 논리란 참일 때의 값은 1, 거짓일 때의 값은 0, 중립일 때의 값을 1/2로 매기는 논리로 폴란드의 수학자 Lukasiewicz(1878-1956)가 처음으로 제안했다. p, q를 명제라고 하면 Lukasiewicz의 3가 논리에 관한 진리표는 아래와 같다.

Lukasiewicz의 3가 논리

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1/2	0	1/2	1/2	1	1/2	1	1/2
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1/2	1	1/2	0	1/2	1	1	1/2	1/2
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1
1/2	0	1/2	1	0	1/2	1/2	1	1/2
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1/2	1	1/2	0	1/2	1	1/2	1/2
0	0	1	1	0	0	1	1	1

3.2 예. 삼단긍정법(modus ponens)은 Lukasiewicz의 3가 논리에서 항진 명제가 아니다.

		Lukasiewicz의 3가 논리				
p	q	$(p \to q)$	$\wedge$	p	$\to$	q
0	0	1	0	0	1	0
0	1/2	1	0	0	1	1/2
0	1	1	0	0	1	1
1/2	0	1/2	1/2	1/2	1/2	0
1/2	1/2	1	1/2	1/2	1	1/2
1/2	1	1	1/2	1/2	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	1/2	1/2	1/2	1	1	1/2
1	1	1	1	1	1	1

2) n가 논리

자연수 n에 대해 n가 논리란 명제의 참인 정도에 따라 [0, 1]을 $n-1$등분한 $0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}$, 1로 진리값을 매기는 것으로, Lukasiewicz는 명제 p의 진리값을 $T(p)$라고 하면, 명제 논리의 기본적인 다섯 가지 논리 결합 기호에 다음과 같은 진리값을 주었다.

$$T(\sim p) = 1 - T(p),\ T(p \wedge q) = \min\{T(p),\ T(q)\},\ T(p \vee q) = \max\{T(p),\ T(q)\},$$

$$T(p \to q) = \min\{1,\ 1 - T(p) + T(q)\},\quad T(p \leftrightarrow q) = 1 - |T(p) - T(q)|$$

(3) 퍼지 논리(fuzzy logic)[6]

지난 수 천년동안 수학자들은 이가 논리를 이용해서 엄밀한 수학의 세계에서 일어나는 문제들을 성공적으로 이끌어 오고 있다. 그러나 B. Russell(1872-1970)도 언급했듯이 모든 전통적인 논리는 관습적으로 명확한 기호만을 사용하므로 우리의 삶에 바로 적용될 수 없는 약점을 가지고 있다. 예를 들면, 이가 논리에서는 배중률이 참이지만 다가 논리나 실생활에서는 배중률이 성립하지 않는다.

퍼지 논리란 넓은 의미에서는 근사적 추론을 다루는데 필요한 개념과 법칙, 방법에 관한 하나의 수학적 체계로 볼 수 있고 좁은 의미에서는 여러 가지 다가 논리의 일반

화로 볼 수 있다. n가 논리에서 나타난 명제 변수의 진리값 집합인 $\left\{0, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$을 단위 구간 [0, 1]로 확장한다면 Lukasiewicz 연속 논리를 얻게 되는데, 이는 퍼지 논리의 특별한 예이다. 이와 같이 좁은 의미에서의 퍼지 논리는 [0, 1]에서 진리값들을 갖는 모든 논리들의 족으로서 이해될 수 있다. 퍼지 집합은 보통 집합의 일반화이고 무한가 논리는 이가 논리의 일반화이다. 보통 집합과 이가 논리의 일대일 대응처럼 퍼지 집합과 무한가 논리도 같은 맥락으로 일대일 대응한다.

(4) 직관주의(Intuitionism)[8]

직관주의는 1908년 네덜란드의 수학자 Brouwer(1882-1966)에 의하여 본격적으로 제기되었다. 직관주의에 의하면 수학의 존재에 관한 증명은 반드시 유한 번에 의하여 구성될 수 있어야 한다. 따라서 존재하지 않는다고 가정하여 모순을 이끌어내는 모순율은 직관주의에서 사용될 수 없다. 이는 현재의 수학에서 빈번히 사용되는 존재성의 증명이 직관주의자에게는 받아들여질 수 없음을 의미한다. 직관주의가 이가 논리와 가장 다른 점의 하나는 배중률을 부정하는 것이다.

참, 거짓을 판정할 수 있는 문장을 명제라 하고, 이들을 p, q, r, … 등으로 나타낸다. 명제 p가 참일 때 p는 진리값 T, p가 거짓일 때 p는 진리값 F를 가진다고 한다. 따라서 모든 명제는 반드시 진리값 T, F중 하나를 가져야 한다. p, q가 명제일 때, $p \vee q$의 진리값이 T라는 정의는 p와 q중 적어도 하나의 진리값이 T가 되는 것을 증명할 수 있을 때에 한한다.

여기서 $p \vee \sim p$의 진리값이 T가 되려면 p와 $\sim p$중 적어도 하나의 진리값이 T가 되는 것을 증명할 수 있어야 한다. 즉, 유한번의 과정을 통하여 p가 T인지 $\sim p$가 T인지를 구성적으로 보일 수 있어야 한다는 것이 직관주의 입장인데 반하여, $p \vee \sim p$는 항상 참이라는 것이 이가 논리의 입장이다. 배중률에 대한 예를 들어서 직관주의와 이가 논리의 차이를 살펴보자.

3.3 예. a^b이 유리수가 되는 무리수 a와 b가 존재하는가?

증명. 만약 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$이 유리수이면, a^b이 유리수가 되는 $a = b = \sqrt{2}$가 존재한다. 만약 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$이 무리수이면, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = a$라 놓자. $a^{\sqrt{2}} = 2$가 되고, 따라서 a^b이 유리수가 되는 무리수 $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$가 존재한다. 따라서 a^b이 유리수가 되는 무리수 a와 b는 항상 존재한다.

이 증명에서 '$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$이 유리수이다'를 명제 p라고 하자. p가 참인지 $\sim p$가 참인지 증명할 수 없음에도 불구하고, $p \vee \sim p$는 항상 참이라는 배중률을 사용하였으므로 직관주의는 이를 받아들이지 않는다.

(5) 직관적 퍼지 집합(Intuitionistic fuzzy sets)[8], [10], [12]

퍼지 집합의 일반화로 K. Atanassov(1954-)는 직관적 퍼지 집합의 개념을 도입하였다.

X가 공집합이 아닐 때, 직관적 퍼지 집합 A는 순서쌍 $A=(\mu_A,\ \gamma_A)$를 의미한다. 여기서 $\mu_A : X \to I$는 소속정도(degree of membership)를 나타내고 $\gamma_A : X \to I$는 비소속정도(degree of nonmembership)를 나타내며 $\mu_A + \gamma_A \leq 1$을 만족한다. 분명히 X상의 모든 퍼지 집합 μ는 $(\mu, 1-\mu)$형태의 직관적 퍼지 집합이라 생각할 수 있다. 즉, 퍼지 집합은 직관적 퍼지 집합의 특수한 예로써 해석 될 수 있다. 직관적 퍼지 집합들 사이의 연산은 다음과 같다.

3.4 정의. X상의 직관적 퍼지 집합 $A=(\mu_A,\ \gamma_A)$와 $B=(\mu_B,\ \gamma_B)$ 는 다음을 만족한다.

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B,\ \gamma_A \geq \gamma_B$.

(2) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B,\ \ B \subseteq A$.

(3) $A^c = (\gamma_A,\ \mu_A)$.

(4) $A \cap B = (\mu_A \wedge \mu_B,\ \gamma_A \vee \gamma_B)$.

(5) $A \cup B = (\mu_A \vee \mu_B,\ \gamma_A \wedge \gamma_B)$.

(6) $0_{\sim} = (\bar{0}, \bar{1}),\ 1_{\sim} = (\bar{1}, \bar{0})$.

여기서 Atanassov는 왜 '직관적(Intuitionistic)'이라는 용어를 사용했을까? 직관적 퍼지 집합과 직관주의 사이에 어떤 관련이 있는 것일까? J. Gutiérrez García 와 S.E. Rodabaugh([11])는 직관적 퍼지 집합에서의 '직관적'이라는 용어는 잘못 사용되어졌음을 지적하고 있다. 이에 관하여 살펴보기로 하자.

3.5 정의. P는 집합이고 $\leq$는 P의 관계(binary operation on P)이다. P의 임의의 x, y, z에 대하여 다음 조건을 만족할 때, $(P, \leq)$를 순서집합(partially ordered set, 혹은 poset)이라고 한다.

(1) $x \leq x$

(2) $x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$

(3) $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$

특별히 혼동될 염려가 없을 때 우리는 순서집합 $(P,\ \leq)$를 간단히 P로 표시한다.

3.6 정의. 순서집합 $(L,\ \leq)$의 모든 유한부분집합이 join과 meet를 가질 때, $(L,\ \leq)$을 격자(lattice)라고 한다.

3.7 정의. 격자 L의 임의의 원소 a, b, c에 대하여 다음이 성립할 때, L을 분배격자(distributive lattice)라고 한다.

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

3.8 정의. 1) 격자 L의 원소 a에 대하여 $x \wedge a = 0,\ x \vee a = 1$을 만족하는 L의 원소 x를 a의 complement라 한다.

2) 분배격자 L의 모든 원소가 complement를 가질 때, L을 불 대수(Boolean algebra)라고 한다.

3.9 Remark. 1) 분배격자의 원소가 complement를 가지면 그것은 유일하다. 분배격자의 원소 a에 대하여 a의 complement를 $\neg a$라고 나타낸다.

2) 불 대수 L의 원소 a, b에 대하여, $c \wedge a \leq b \Leftrightarrow c \leq \neg a \vee b$

3.10 정의. 격자 L의 임의의 a, b에 대하여 $c \wedge a \leq b \Leftrightarrow c \leq a \rightarrow b$인 $a \rightarrow b$가 L에 존재할 때, L을 헤이팅 대수(Heyting algebra)라고 한다.

3.11 정리. 격자 L이 헤이팅 대수이기 위한 필요충분조건은

함수 $_ \rightarrow _ : L \times L \rightarrow L\ \ ((a,\ b) \rightarrow (a \rightarrow b))$가 다음 조건을 만족하는 것이다.

1) $a \rightarrow a = 1$

2) $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$

3) $b \wedge (a \rightarrow b) = b$

4) $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$

불 대수 B에서, $a \rightarrow b = \neg a \vee b$이므로 임의의 $a \in B$에 대하여 $\neg a = a \rightarrow 0$이다.

3.12 정의. 헤이팅 대수 L의 원소 a에 대하여, $a \rightarrow 0$을 a의 pseudocomplement라 하고 이를 a^*로 표시한다.

3.13 정리. 헤이팅 대수 L의 원소 a, b에 대하여 다음이 성립한다.

1) $0^{*}=1,\ \ 1^{*}=0.$

2) $a \wedge a^{*}=a^{*} \wedge a^{**}=0.$

3) $a \leq a^{**}.$

4) $a^{***}=a.$

5) $a \wedge b=0 \Leftrightarrow a^{**} \wedge b=0.$

6) $a \leq b \Rightarrow b^{*} \leq a^{*}.$

7) $(a \vee b)^{*}=a^{*} \wedge b^{*}.$

8) $(a \wedge b)^{**}=a^{**} \wedge b^{**}.$

9) $(a^{**} \wedge b^{**})^{**}=(a \vee b)^{**}.$

10) $(a \vee a^{*})^{*}=0.$

3.14 정의. $\alpha, \beta \in[0,\ 1],\ \ \alpha+\beta \leq 1$이라 하자. X상의 직관적 퍼지 점 (Intuitionistic fuzzy point) $x_{(\alpha,\ \beta)}$는 다음과 같이 정의되는 X상의 직관적 퍼지 집합이다.

$$x_{(\alpha,\ \beta)}(y)=\begin{cases}(\alpha,\ \beta) & \text{if } y=x, \\ (0,\ 1) & \text{if } y \neq x.\end{cases}$$

$\alpha \leq \mu_A(x),\ \beta \geq \gamma_A(x)$일 때, 직관적 퍼지 점 $x_{(\alpha,\ \beta)}$는 직관적 퍼지 집합 $A=(\mu_A,\ \gamma_A)$에 '속한다(belong)'라고 하고 이를 $x_{(\alpha,\ \beta)} \in A$와 같이 표시한다.

직관적 퍼지 점은 다음과 같이 퍼지 점들의 순서쌍으로 표현 될 수 있다.

$x_{(\alpha,\ \beta)}=(x_\alpha,\ 1-x_{1-\beta})$

직관적 퍼지 집합 A는 A에 속한 모든 퍼지 점들의 합집합으로 표현됨을 쉽게 알 수 있다.

이제 $A=(\mu_A,\ \gamma_A)$를

$$\mu_A(x)=\begin{cases}-1.2x+0.8 & \text{if } 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0.2 & \text{if } 0.5 \leq x \leq 1\end{cases},\quad \gamma_A(x)=\begin{cases}0.2 & \text{if } 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1.2x-0.4 & \text{if } 0.5 \leq x \leq 1\end{cases}$$

인 I=[0, 1]상의 직관적 퍼지 집합이라 하자.

이제 $x_{(0.4,\ 0.5)}=(x_{0.4},\ 1-x_{0.5}),\ x \in \left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ 라 하면 $x_{(0.4,\ 0.5)}$는 I상의 직관적 퍼지 점이 되고 $x_{(0.4,\ 0.5)} \in A$가 됨을 알 수 있다. 여기서 $(x_{(0.4,\ 0.5)} \cup (x_{(0.4,\ 0.5)})^c)^c$을 계산하면

$$\begin{aligned}(x_{(0.4,\ 0.5)} \cup (x_{(0.4,\ 0.5)})^c)^c &= ((x_{0.4},\ 1-x_{0.5}) \cup (1-x_{0.5},\ x_{0.4}))^c \\ &= ((1-x_{0.5}) \wedge x_{0.4},\ x_{0.4} \vee (1-x_{0.5})) \neq (0,\ 1)\end{aligned}$$

이 되어 정리 3.13의 10)이 성립되지 않음을 알 수 있다. 따라서 직관적 퍼지 집합은 헤이팅 대수가 아니며 따라서 직관주의 수학이 아니라는 결론에 도달할 수 있다.

4. 결론

앞에서 언급한 바와 같이 퍼지 논리가 처음 발표될 당시 많은 학자들이 회의를 품었으며 어떤 이들은 노골적으로 적대시하였다. 하지만 현재 퍼지 논리는 다양한 분야에 강한 영향을 주며 전성기를 구가하고 있다. 이와 관련된 에피소드를 하나 소개하려고 한다. '발명광'이라고 불리는 B. Franklin(1706-1790)은 번개가 칠 때 연을 날리는 실험을 함으로써 번개가 전기임을 증명하여 피뢰침을 발명한 것으로 유명하다. 어느 날 그는 또 하나의 발명을 하여 친구 집에 뛰어가 자랑스럽게 그것을 보여 주었다. 그런데 계속되는 그의 발명에 약간 싫증이 난 친구는 "도대체 그렇게 유치한 것을 만드는 게 뭐가 대단하며, 무슨 소용이 있나?"라고 말했다. 그러자 Franklin은 옆에 누워 있던 갓난아이를 가리키며 이렇게 반문하였다. "그렇다면 이 아기는 무슨 쓸 데가 있는가?" Franklin의 이 말은 중요한 것을 시사하고 있다. 창조라는 것은 출발점에서는 모두 유치하다는 것이다. 다시 말해서 창조의 원형은 아기와 같고 그것이 충분히 성장해야만 비로소 이용 가치가 밝혀지는 것이다([9]). 1965년 논문을 발표할 당시 Zadeh는 퍼지 논리가 현재처럼 다양한 분야에 응용되리라고 생각지도 못했다고 고백하고 있다. 다음의 그의 말을 들어보자.

"초창기에 나는 사람들이 사회과학의 여러 분야-경제학, 심리학, 철학, 어학, 정치학, 사회학, 종교학 그리고 다수의 다른 분야-에서 퍼지 논리를 깨닫길 기대하고 있었으며 오늘날까지 소수의 사회과학자들만이 퍼지 논리의 유용성을 깨달은 것에 대해 무척이나 큰 의구심을 가지고 있었다. 퍼지 논리는 공학자들이 처음으로 받아들였고, 산업 현장에 사용되었다. 한 예로 사람들은 퍼지 논리를 이용하여 Jittering(파형의 순간적인 흐트러짐)을 상쇄시키는 손으로 잡는 캠코더와 단 하나의 버튼을 누름으로써 완전하게 요리하는 전자레인지를 생각해 냈다. 1965년 논문을 발표할 당시 나는 퍼지 논리가 이러한 방향으로 사용될 줄은 생각지도 못했다."

초창기의 퍼지 논리는 비록 보잘 것 없었지만 Zadeh는 끝까지 인내심을 갖고 이론을 발전시켜 왔으며 결국 현재 수많은 이용가치를 인정받고 있다. 또한, 공식적인 은퇴를 하였지만 왕성한 호기심과 식을 줄 모르는 연구 열정과 그로 인한 수많은 업적을 이루었다. 이러한 점들은 우리에게 좋은 귀감이 되리라 생각한다. 마지막으로 우리는 이가 논리, 다가 논리, 퍼지 논리 및 직관적 퍼지 집합에 대해 살펴보았다. 이가 논리로 설명하기 어려운 문제들을 해결하기 위해 사람들은 다가 논리를 고려하였고

이를 더욱 확장하여 Zadeh는 퍼지 논리의 개념을 고안하였다. 한편 Atanassov는 퍼지 집합의 일반화로 직관적 퍼지 집합의 개념을 도입하였다. 직관적 퍼지 집합에서 부적절함이 밝혀진 '직관적(intuitionistic)'이라는 용어는 퍼지 논리를 연구하는 학자들 사이에 많은 논쟁을 불러 일으켰다. 앞으로 새로운 수학적 개념에 적절한 용어를 사용함으로써 이런 소모적인 논쟁을 가급적 줄여 나가는 노력이 필요하다고 생각한다.

감사의 글 본 논문을 심사하여 주시고 좋은 의견을 주신 세 분의 심사위원님들께 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. 강미광, 이병수, 수학교육에서 퍼지(FUZZY)개념의 도입, J. Korea. Soc. Math. Ed. Ser. A: The mathematical Education June 1997, Vol 36, No. 1, 49-60.
2. 박창균, 퍼지이론의 배경과 수학사적 의의, Historia Math, Vol. 7. No. 1, 1992, 61-70.
3. 박창균, 수학에서의 포스트모던 경향-퍼지 논리를 중심으로, Historia Math, Vol. 12. No. 2, 1999, 135-141.
4. 박창균, 비트겐슈타인 철학과 퍼지 논리-언어 사용을 중심으로, Historia Math, Vol. 13. No. 2, 2000, 145-150.
5. 박창균, 수학적 대상으로서 '애매모호'에 대한 고찰, Historia Math, Vol. 14. No. 2, 2001, 93-100.
6. 이병수, 강미광, 조성진, 퍼지수학의 기초와 응용, 북스힐, 2005.
7. 이성향, 김재겸, 퍼지이론의 중등수학교육과정에의 도입에 관하여, J. Korea. Soc. Math. Ed. Ser. A: The mathematical Education June 1993, Vol 32, No. 3, 195-204.
8. 이승온, 김혁수, 박진원, 이병식, 직관주의 논리, Historia Math, Vol. 12. No. 1, 1999, 32-44.
9. 히로나카 헤이스케, 학문의 즐거움, 김영사, 1993.
10. K. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986), 87-96.
11. J. Gutiérrez García, S.E. Rodabaugh, *Order-theoretic, topological, categorical redundancies of interval-valued sets, grey sets, vague sets, interval-valued intuitionistic sets, intuitionistic fuzzy sets and topologies*, Fuzzy Sets and Systems 156 (2005), 445-484.
12. S. J. Lee, E. P. Lee, *The category of intuitionistic fuzzy topological spaces*,

Bull. Korean Math. Soc. 37 (2000), No. 1, pp. 63-76.
13. L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control 8 (1965), 338-353.

Lotfi A. Zadeh, the founder of fuzzy logic

Department of Mathematics, Chungbuk National University **Seung On Lee**
Department of Mathematics, Chungbuk National University **Jin Tae Kim**

Fuzzy logic is introduced by Zadeh in 1965. It has been continuously developed by many mathematicians and knowledge engineers all over the world. A lot of papers concerning with the history of mathematics and the mathematical education related with fuzzy logic, but there is no paper concerning with Zadeh. In this article, we investigate his life and papers about fuzzy logic. We also compare two-valued logic, three-valued logic, fuzzy logic, intuisionistic logic and intuitionistic fuzzy sets. Finally we discuss about the expression of intuitionistic fuzzy sets.

Key words: Zadeh, Two-valued logic, Multi-valued logic, Fuzzy logic, Intuitionism, Intuitionistic fuzzy set.

2000 Mathematics Subject Classification: 68T27, 68T37, 94D05

ZDM Classification: A30, E70

논문 접수: 2007 년 11월 심사 완료: 2007년 12월