

산학계몽과 묵사집산법의 비교*

광운대학교 수학과 허 민
mher@kw.ac.kr

중국의 산학서 산학계몽은 산학의 훌륭한 입문서로 조선 산학에 지대한 영향을 끼쳤다. 이의 편제와 내용을 본받은 조선 산학서 묵사집산법은 많은 문제와 별해를 추가하고 산학계몽에서 다루지 않은 산학의 몇 가지 주제도 보완해서 교육적 개선을 시도하였다. 그러나 묵사집산법은 정부술을 배제시킴으로써, 전통적인 방정술을 이용할 수 없었다. 또 천원술도 회피함으로써, 일반적인 승방(다항 방정식)의 표현과 풀이에도 큰 제약을 받았다.

주제어 : 산학계몽, 묵사집산법, 정부술, 천원술, 방정술, 증승개방법

0. 머리말

원의 주세걸(朱世傑, 13세기 말 14세기 초)이 1299년에 발간한 산학계몽(算學啓蒙)의 정확한 이름은 신편산학계몽(新編算學啓蒙)으로, 기초적인 수학 내용을 다룬 <신편산학계몽목록>과 함께 상·중·하 3권, 20문(門)¹⁾ 259문제로 이루어져 있다. 당시 수학의 다양한 면과 내용을 거의 모두 포함하고 있으며, “얕은 데서부터 깊은 데로 들어가며 차례를 따라 점차 나아가니 확실히 계몽의 책이다.”([5, p. 173], [12, p. 1314]) 산학계몽은 당시의 실제 상황과 부합되는 문제를 다루었는데, 당시 동아시아 삼국에 지대한 영향을 미쳐 새로운 역법의 채용, 과학기술의 발전, 정치적 목적을 위한 토지 개혁 등의 다양한 목적 아래 필수적인 학습서로 자리 잡았고, 14세기 이후에 조선과 일본에서 많은 관련 저술의 간행과 학문의 발전에 커다란 영향을 미쳤다([4, p. 339]). 특히, 조선에서 산학계몽은 양휘산법(楊輝算) 및 상명산법(詳明算)과 함께 산학의 취재(取才)의 출전으로서 경국대전(經國大典)에 못 박히게 되어 그 중요성이 더욱 커졌다([2, p. 145]).

묵사집산법(默思集算法)은 조선의 중인 산학자 경선징(慶善徵, 1616~?)이 저술했는

* 이 논문은 2006년도 광운대학교 교내 학술연구비에 의하여 연구되었음.

1) 문(門)은 같은 주제의 몇 개의 문제(問)로 이루어지며, 장(章, chapter)에 해당한다.

데. 우리나라 산학자가 저술한 현존하는 산학서 중 최초로 보인다. 천·지·인 3권, 25문(門)²⁾ 400문제로 이루어졌는데([1, 천권 p. v]), 편제와 내용에서 산학계몽의 영향을 역력히 볼 수 있다. 그런데 묵사집산법은 산학계몽 및 조선의 다른 산학서와도 뚜렷하게 구별되는 특색을 보이고 있다. 곱셈 구구를 다시 고대의 모습으로 $9 \times 9 = 81$ 부터 나열하고, 평방(이차 방정식)으로 변환하여 해결하는 문제를 많은 경우에 정사각형의 분할로부터 얻는 결과인 곱셈으로 풀기도 한다([8, p. 4]). 이에 대해 [2, p. 232.]에는 “이 보수성은 일본의 數學史家를 감탄시키고 있을 정도로 古式에 충실하다.”고 썼다. 또, 묵사집산법은 정부술과 천원술도 배제함으로써, 이와 관련된 문제의 풀이가 다른 산학서와 다를 수밖에 없고 여러 가지 제약을 피할 수 없었다.

산학계몽과 묵사집산법의 이런 유사성과 차별성은 자연스럽게 두 산학서를 비교하게 된다. 여기서는 산학계몽을 지렛대 삼아 묵사집산법의 특색과 장단점을 문항 분석을 통해 파악하고자 한다.

1. 편성의 차이

묵사집산법은 산학계몽의 문제를 그대로 실은 경우도 많이 있다.³⁾ 그러면서도 단순한 상황의 문제에서도 소재와 수치를 바꾸어 차별화하려는 시도를 엿볼 수 있다. 예를 들어 산학계몽 상권과 묵사집산법 천권의 처음 두 문인 <중형인법문>과 <신외가법문>의 각 문항에 이용된 소재 및 풀이에 필요한 계산 내용은 각각 다음과 같다.

산학계몽 상권 <중형인법문>	묵사집산법 천권 <중형인법문>	산학계몽 상권 <신외가법문>	묵사집산법 천권 <신외가법문>
粟 216×2	粟 23156×2	米 68.4×110	米 484×11
絲 144×300	鈔 62.8×30	羅 34.6×120	稷 646×12
羊 354×4	絲 144×400	鹽 873×13	白米 15750×13
銀 547×50	麻 895×50	地 324×14	稷米 3578.8×1.4
絹 736×6	布 634×60	木香 198×15	木香 258×15
麻 892×700	絹 736×7	黃蠟 3850×16	茴香 357×16
布 634×80	羅 8857×800	柑子 436×17	生梨 389×17
馬 425×90	銀 425×90	軍人 3270×1.8	芝草 6723×1.8
		雞 345×190	軍人 47938×1.9
		夫匠 538×194	稅租 46181.24×1.07
		木棉 3260×1705	

2) 산학계몽의 <총괄>에 해당하는 <포산선습문>을 포함한 수치이다.

3) [1]에는 천권 <귀제승실문>부터 각 문(門)마다 산학계몽과 묵사집산법의 서로 대응하는 문제를 짝지어 놓았다.

그렇지만 목사집산법에 있는 문항의 수는 산학계몽의 문항 수의 1.5배보다 많다. 저자 경선징은 산학계몽을 중심으로 이 책을 편집하면서 교육적인 효과를 거두기 위해서 기본적인 문제를 다수 추가하였으며,⁴⁾ 문항의 위치도 바꾸었다. 목사집산법의 25문(門) 중에서 산학계몽과 일치하는 제목은 8문에 불과한데, 당시의 주요 산학서를 참고해서 문(門)을 구성하고⁵⁾ 산학계몽에 없는 산학의 주제를 새로운 문(門)으로 추가하고 보완하였음을 알 수 있다.

1.1. 학습 위계를 고려한 편성

산학계몽은 단순한 내용에서 복잡한 것으로 순차적으로 진행하는 ‘계몽’과 ‘입문’을 위한 매우 훌륭한 교과서이다([5, 상권, p. iv]). 그렇다고 개선할 점이 없는 것은 아니다. 아래에서 살펴보듯이, 경선징은 적절한 학습 위계를 고려해서 산학계몽의 몇 가지 문(門)을 재구성하고 문항을 보완해서 목사집산법을 편집한 것으로 보인다.

산학계몽은 곱셈과 관련된 기본적인 문제들을 <종횡인법문>, <신외가법문>, <유두승법문>의 3개의 문(門)으로 나누어 실었다. 여기서 <유두승법문>에서 일반적인 곱셈으로 해결하는 문제를 다루었다. 목사집산법에서는 이런 문제를 <종횡인법문>, <신외가법문>, <유두승법문>, <열위승법문>의 4문으로 나누어 실었다. 여기서 <유두승법문>에는 곱수(승수)의 유효숫자 중에서 가장 작은 자리의 수가 1인 경우의 곱셈인 신전인으로 해결하는 문제만으로 구성했고 <열위승법문>에서 일반적인 곱셈으로 해결하는 문제를 다룬다. 이렇게 곱셈에 관한 문제들을 좀 더 세분함으로써 곱셈 연산을 익힐 수 있는 단계를 늘렸다.

또, 산학계몽에서는 나눗셈만이 필요한 기본적인 문제를 <신외감법문>과 <구귀제법문>의 2문으로 분류하여 실었는데, 목사집산법에서는 이를 <단위귀법문>, <신외감법문>, <수신귀제문>의 3문으로 나누어 실었다. 여기서 <단위귀법문>은 나눗수(제수)가 한 자리 수인 경우로 산학계몽에서는 <구귀제법문>의 처음 8문이 이에 해당한다. <단위귀법문>은 한 자리 수의 곱셈과 관련된 문제를 다룬 <종횡인법문>과 대응하며, 이런 편성은 학습 위계에도 적절한 분리와 배열로 보인다.

산학계몽 중권에서는 대수학적 주제인 <구차분화문>과 <차분균배문>의 두 문(門)이 입체도형과 관련 있는 <창돈적속문>과 <상공수축문> 사이에 들어 있다. 그리고 <상공수축문> 뒤에는 또다시 대수학적 주제인 <귀천반올문>이 배치되어, 기하학과 대수학의 주제가 혼재되어 있다. 이에 비해 목사집산법 지권에서는 도형의 측정과 관련된 <전무형단문>, <창돈적속문>, <상공수축문>의 세 문(門)을 연이어 배치해서,

4) 이를테면 산학계몽 중권 <전무형단문> 16문, <창돈적속문> 9문, <상공수축문> 13문, <차분균배문> 10문은 차례로 목사집산법 지권 <전무형단문> 24문, <창돈적속문> 12문, <상공수축문> 18문, 하권 <차등균배문> 16문으로 확장되었다.

5) 목사집산법 지권의 <취물추분문>과 <화합차분문>은 상명산법의 용어와 일치한다([12]).

기하학 및 대수학과 관련된 주제를 분리했다.

한편, 묵사집산법에서는 각 문(門)에서도 문항의 배열을 세심하게 배려하였으며, 유사한 문항을 추가해서 연습할 수 있는 기회를 더 제공하기도 했다.

산학계몽과 묵사집산법에서 <창돈적속문>의 모든 문제와 관련된 입체도형을 나열한 아래의 표에서 쉽게 알 수 있듯이, 묵사집산법에서는 관련된 입체도형을 의도적으로 ‘기둥 → 빨대 → 빨’의 순서로 배열한 것으로 보인다. 그리고 제곱근과 세제곱근 풀이와 관련된 산학계몽 하권 <개방석쇄문>의 처음 5문항과 묵사집산법 인권 <개방해은문>의 처음 8문항에서 다른 승방(다항 방정식)을 나타낸 아래 표에서 알 수 있듯이, 묵사집산법에서는 제곱근 풀이와 세제곱근 풀이를 완전히 분리하고 각각 몇 문항을 보완했다.

산학계몽 중권 <창돈적속문>	묵사집산법 지권 <창돈적속문>	산학계몽 하권 <개방석쇄문>	묵사집산법 인권 <개방해은문>
1. 직육면체	1. 직육면체	1. $x^2 = 4096$	1. $x^2 = 1444$
2. 원빨	2. 정사각기둥	2. $x^3 = 17576$	2. $x^2 = 226576$
3. 정사각기둥	3. 원기둥(부피)	3. $x^2 = 59414 \frac{1}{16}$	3. $x^2 = 1573 \frac{16}{36}$
4. 원빨의 $\frac{1}{2}$	4. 정사각빨대	4. $x^3 = 133766 \frac{288}{343}$	4. $x^3 = 19683$
5. 원빨의 $\frac{1}{4}$	5. 원빨대	5. $x^4 = 1129458 \frac{511}{625}$	5. $x^3 = 6859$
6. 원기둥(부피)	6. 원빨		6. $x^3 = 128787625$
7. 정사각빨대	7. 원빨의 $\frac{1}{2}$		7. $x^3 = 25934.336$
8. 원빨대	8. 원빨의 $\frac{1}{4}$		8. $x^3 = 188872 \frac{115}{512}$
9. 원기둥(둘레)	9. 원빨의 $\frac{3}{4}$		
	10. 원기둥(높이)		
	11. 원기둥(둘레)		
	12. 원기둥(둘레)		

구장산술 제6권 <균수>에 나타나는 대나무 마디와 관련된 등차수열의 문제가 산학계몽 중권 <구차분화문>의 제9문으로 한 번 나타난다. 묵사집산법에서는 이 문제를 지권 <화합차분문>에 수치를 달리하는 제25, 26, 27, 28문의 네 문항으로 늘려서 그 원리를 이해하고 익힐 수 있는 기회를 확대했다.

묵사집산법은 산학계몽의 문제들을 각 문(門) 안에서 재배열하고 보완했을 뿐만 아니라, 다른 문(門)으로 옮겨서 적절한 위치를 찾으려고 시도했다.

산학계몽 상권 <절번호차문>에서 실제로 절번호차(또는 취물추분)의 해법이 요구되는 문제는 제6문과 제7문뿐이다. 목사집산법에 인권 <취물추분문>에서는 이 두 문제를 포함해서 4문제를 다루고 있다. 산학계몽 <절번호차문>의 다른 문제는 목사집산법 천권 <귀제승실문>과 인권 <호승화합문>에 나누어 실었다.

산학계몽 하권 <퇴적환원문> 14문에서는 퇴타술 및 그 역을 다룬다. 여기서 마지막 여섯 문제는 처음 여섯 문제의 역으로 승방(다항 방정식)의 풀이가 필요한데, 이는 하권 <개방석쇄문>의 주제로 이곳에서 다루는 것이 적절해 보인다. 목사집산법에서는 지권 <퇴타개적문> 10문에서 퇴타술만을 다룬다. 그리고 이의 역 문제인 승방의 풀이는 인권 <개방해은문>에서 다른 승방의 풀이와 함께 다룬다.

1.2. 주제의 범위

목사집산법에는 산학계몽에서 다룬 주제를 어느 수준까지는 거의 모두 다루는데, 산학계몽에서 다루지 않은 산학의 문제와 주제도 몇 가지 더 다루고 있다.


예를 들면, 목사집산법에서는 산학계몽에 없는 삼릉산자일숙(三稜筭子一束, 세모꼴 산대 한 묶음)과 부병일타(缶瓶一埽)의 예도 다루고 있다.⁶⁾ 그리고 <전무형단문>을 비교하면, 목사집산법에서는 산학계몽에 없는 우각전(牛角田, 쇠뿔 모양의 밭), 미전(眉田, 눈썹 모양의 밭), 요고전(腰鼓田, 장구 모양의 밭), 대고전(大鼓田, 큰 북 모양의 밭), 곡척전(曲尺田, 곱자 모양의 밭), 삼광전(三廣田)⁷⁾ 등을 다루고 있다.⁸⁾

산학계몽은 당시의 산학을 두루 다루고 있지만, 몇 가지의 중요한 주제를 빠뜨리고 있다. 목사집산법은 이를 다음과 같이 보완하고 있다.

산학계몽에는 구장산술 제9권 <구고>에 해당하는 내용이 없다. 반면에, 목사집산법 지권 <측량고원문>은 구장산술 <구고>의 측량 문제 및 해도산경의 첫 문제를 포함해서 아홉 문항으로 구성됐다. 산학계몽에서 구고술과 관련된 문제는 하권 <방정정부문>에 있는 직사각형 밭에 관한 단 두 문제로, 구고술을 알고 있다는 가정에서 방정술로 풀고 있다. 목사집산법에서는 이 문제들을 포함해서 구고술을 요구하는 기본적인 문제를 인권 <개방해은문> 제30문부터 제35문까지 다루고 있다.

산학계몽에 없는 산학의 중요한 주제의 하나는 중국인의 나머지 정리다. 목사집산법 지권 <인잉구총문>에는 이 정리에 관한 세 문제를, 풀이에 필요한 사항을 기억할

6) 목사집산법 지권 <퇴타개적문> 제4, 5, 6문, 인권 <개방해은문> 제16, 17문

7) 목사집산법에서 제시한 삼광전은 과 같은 모양의 밭인데, 이와 같은 문제와 해법은 양취산법 <전무비류승제첩법> 상권 제26문에서 찾아볼 수 있다. 그러나 [7, pp. 202~203]과 [1, 지권, p. 91]에서 밝힌 대로 이는 부정확하다.

8) 그렇지만 산학계몽에서 다룬 완전(畹田, 나지막하고 볼록한 둥근 언덕 모양의 밭)과 팔각전(정팔각형의 밭)을 목사집산법에서는 다루지 않고 있다.

수 있도록 만든 시와 함께 제시하고 있다.

이와 같이 묵사집산법은 당시에 존재했던 산학을 좀 더 폭넓게 다루고 있음을 알 수 있다. 문제도 보완해서 더 많이 다루고 있지만, 깊이 있게 다루고 있지는 않다.⁹⁾ 이것은 묵사집산법이 심화된 내용을 피하면서도 당대의 산학을 포괄적으로 충실하게 다룸으로써 산학에 쉽게 접근할 수 있도록 목표한 것으로 보인다. 이에 따라 “이 책은 산학의 입문서로서, 특히 중인 산학자를 대상으로 쓴 것이라 생각된다([3, p. 2]).”

1.3. 묵사집산법 편성의 문제점

묵사집산법은 새로운 주제와 문제를 추가하고 산학계몽의 편제를 개선해서 교육적인 효과를 높이려고 노력한 것으로 보이지만, 아쉬운 점도 있다. 특히, 주제가 불명확한 지권 마지막 <가감승제문>과 인권의 처음 두 문 <화답호환문>과 <호승화합문>은 구성상 문제가 있어 보인다.

<화답호환문> 11문에서는 노인과 동자 사이의 대화를 통해 제기된 나이, 곡식의 수량, 책의 장수, 지팡이의 길이와 관련된 여섯 문제 및 수령들의 대화를 통해 제기된 호수와 쌀의 수량을 계산하는 다섯 문제를 다루고 있다. 대부분 [연립] 일차 방정식을 이용해서 풀 수 있는데, 풀이 과정에 등비 급수가 이용되기도 하고 제10문에서는 중국인의 나머지 정리가 이용된다. 줄거리가 있는 이야기와 같은 발문의 형식이 기발하고 그 내용도 재미있다. 여러 가지 학습 내용을 종합적으로 평가해 볼 수 있는 곳이기도 하다. 그런데 제5, 7, 8문에서는 그 다음 <호승화합문>에서 설명할 영부족술이 이용된다. 이에 따라 <화답호환문>은 영부족술이 설명된 <호승화합문>보다 뒤쪽에 배치하거나, 인권의 끝에 부록과 같은 형식으로 배열하는 것이 더 바람직해 보인다.

<호승화합문>은 영부족술과 관련된 문제(제3~9문)와 함께, 손자산경의 두 문항,¹⁰⁾ 산학계몽 상권 <절변호차문>의 세 문항, 중권 <쌍거호환문>의 한 문항 등 여러 가지 주제의 문제가 혼재되어 혼란스럽다. 영부족술과 관련된 문항들만으로 별도의 문(門)을 편성하고, 이에 지권의 <가감승제문>을 합체시키는 것이 좋을 듯하다. <호승화합문>의 나머지 문제는 다른 적절한 곳에 배치할 수 있을 것이다. 이를테면 손자산경의 두 문제는 분수와 관련된 <약분제해문>에서 먼저 다룰 수 있을 것이다.

인권의 끝에 별도로 있는 문제는 <화취호해문>에 포함시켜야 하고, <화취호해문>의 마지막 문제는 <개방해은문>으로 옮겨야 한다.

9) 극히 예외적으로 묵사집산법 지권 <화합차분문> 제4, 6~9, 12, 17문은 산학계몽에서 다루지 않은 약간 더 발전된 형태의 문제를 다루고 있다.

10) 세 딸의 귀가 문제와 그릇 수로 손님 수 구하기 문제([6, p. 110, p. 132])

2. 해법의 차이

목사집산법에서는 문두도 좀 더 명확하고 친절하게 제시하려고 노력한 것으로 보인다. 예를 들어, 산학계몽 중권의 <귀천반율문>의 제2문부터 제8문까지는 차례로 ‘귀천율, 귀천석률, 귀천균율, 귀천칭률, 귀천근율, 귀천냥율, 귀천수율’ 등에 따른다는 표현을 사용한다. 반면에 이와 같은 문제를 다룬 목사집산법 지권 <화합차분문>의 제19문부터 제24문까지는 ‘1문에 사는 복숭아는 살구보다 1매 적다, 참기름 1석의 값은 들기름 1석의 값보다 1문 더 비싸다, 푸른 실 1권의 값은 붉은 실 1권의 값보다 1문 싸다’와 같이 알기 쉽게 서술하고 있다. 그래서인지 목사집산법에는 별도의 <귀천반율문>이 없다.

그 밖에 산학계몽에서 문항의 유형과 그에 대응하는 해법에 따라 이름을 붙인 <고무해세문>, <절변호차문>, <영부족술문>, <방정정부분문>의 이름도 목사집산법에는 없다. 경선징은 이런 문항의 분류를 극복하고 정형화된 해법을 탈피해서 새롭고 다양한 해법을 제시하려고 노력한 것으로 보인다.

2.1. 정형화된 해법 탈피

경선징은 문제의 유형에 따라 적용하는 정형화된 해법에 변화를 주고 싶었던 것으로 보인다. 예를 들어 목사집산법 <이승동제문> 14문에서 처음 8문은 산학계몽의 <이승동제문> 8문과 같은 유형이다. 나머지 6문은 통상 쇠분 또는 차분의 방법으로 해결하는 문제이다. 이런 문제들을 <이승동제문>에 포함시키고 적절한 해석을 통해 이승동제의 방법으로 답을 구했다.

그리고 경선징은 산학계몽 상권의 <고무해세문>과 <절변호차문> 및 중권의 <쌍거호환문>에 있는 거의 대부분의 문제를 목사집산법 천권 <귀제승실문>에 모아 실었다. <귀제승실문>에 포함된 문제 중에는 쇠분의 방법으로 해결할 수 있는 문제¹¹⁾도 있고, 도형에 관한 문제¹²⁾도 있다([1, p. 142]). 이런 문제들도 정형화된 해법에 얽매이지 않고 이미 배운 이승동제의 방법 등을 활용해서 곱셈과 나눗셈으로 적절하게 해결할 수 있음을 밝힘으로써, 수학적 해법의 통일성을 기하고 그 효율성을 최대로 보이게 하려고 했던 것으로 보인다.

경선징이 정형화된 해법을 탈피하려고 노력한 예로 다음과 같은 산학계몽 하권 <영부족술문>의 제7문을 들 수 있다.

11) 제3, 17, 18, 32~36, 43, 44문

12) 제53~66문

지금 있는 사람이 술을 지니고 봄놀이를 하는데, 술의 양은 알 수 없다. 다만 일을 만나면 술의 양의 1배를 더하고 꽃을 만나면 3말 4되를 마신다고 한다. 지금 일을 만나고 꽃을 만나기를 각각 4차례 하여 술을 다 마시고 술 단지가 비었다. 처음 지닌 술의 양은 얼마인가? 今有人携酒游春 不知其數 只云 遇務而添酒一倍 逢花而飲三斗四升 今遇務逢花俱各四次 酒盡壺空 問元携酒數幾何

이 문제의 해법에서는 처음에 지닌 술이 3말 2되이면 2되가 남고 처음에 지닌 술이 3말이면 3말이 부족하다는 계산 결과를 이용하고 영부족술을 이용해서 풀고 있다.

목사집산법에서는 이 문제를 마시는 술의 양 3말 4되를 3말 6되로, 일을 술집으로, 4차례를 5차례로 바꾸어 지권 <가감승제문>의 제1문으로 실었다. 그런데 목사집산법의 해법에서는 영부족술을 이용하지 않고 거꾸로 풀기 전략을 이용하고 있다. 당시로서는 매우 독창적인 발상이었을 것으로 보인다. 또 별해에서는 등비 급수와 관련된 풀이 방법을 제시했다.

2.2. 다양한 해법의 제시

산학계몽에서는 본질적으로 각 문항에 대한 해법(術曰 ...)이 하나뿐이며, 별해(又術曰 ...)가 있는 문항은 단 세 개뿐이다.¹³⁾ 이에 비해 목사집산법에는 무려 107개의 문항에 별해가 있고, 이 중에서 6개의 문항에는 별해가 2개이다.¹⁴⁾ 이것도 다양한 해법의 제시를 통해 해법의 정형화를 탈피하려는 저자의 의도로 보인다.

산학에는 매우 크거나 복잡한 수치가 많이 등장한다. 그리고 그 계산이 용이하지 않은 경우가 많이 있다. 목사집산법에서는 이런 경우에 간편한 계산을 유도하는 별해를 많이 추가하고 있다.

이승동제의 방법의 그대로 적용하면 곱셈한 뒤에 나누어야 한다. 그러나 경선징은 이 과정에 변화를 주어 계산의 편의를 도모하고 있다. 목사집산법 천권 <이승동제문>에서 제4문의 해법 및 별해와 관련된 계산식은 다음과 같다.

$$\text{해법: } (83895 \times 534) \div 9870 = 44799930 \div 9870 = 4539$$

$$\text{별해: } (83895 \div 9870) \times 534 = 8.5 \times 534 = 4539$$

또, 제8문의 해법과 별해와 관련된 계산식은 다음과 같다.

13) 상권 <절변호차문>의 제2문과 제3문 및 중권 <구차분화문>의 제1문

14) 천권 <귀제승실문> 제11문, 지권 <화합차분문> 제9문, <전무형단문> 제13문, <창돈적속문> 제9문, <상공수축문> 제14, 15문

해법: $(6282 \times 3046.5) \div 54837 = 19138113 \div 54837 = 349$

별해: $6282 \div (54837 \div 3046.5) = 6282 \div 18 = 349$

묵사집산법에서 이승동제의 방식을 활용하여 문제를 푸는 경우에 나눗셈을 먼저 시행함으로써 관련된 수의 크기를 줄여서 계산의 편의를 도모하는 경우는 그 뒤에서도 찾아볼 수 있다.¹⁵⁾

묵사집산법 천권 <이승동제문>의 제9문에서 제분, 즉 최대 공약수를 구하는 방법을 일찍 도입한 뒤에¹⁶⁾ 이를 활용한 훨씬 더 간단한 계산 방식을 별해에 추가하고 있다. 위 제9문의 경우에 해법에서는 $(21 \times 42560) \div 48$ 의 계산을 제시하고, 별해에서는 21과 27의 최대 공약수 3을 이용한 계산 방식 $(42560 \div 16) \times 7$ 을 제시한다. 그 다음 제10문의 경우에는 해법에서는 $(23940 \times 48) \div 42560$ 의 계산을, 별해에서는 23940과 18620의 최대 공약수 2660으로 두 수를 나누어 얻은 값 9와 7을 이용한 $(48 \div 16) \times 9$ 의 계산 방식을 제시한다. 이렇게 최대 공약수를 이용하여 계산의 편의를 도모한 별해가 그 뒤에도 있다.¹⁷⁾¹⁸⁾

이렇게 계산의 편의를 제공하는 별해 이외에도 묵사집산법에는 독자의 이해를 돕기 위한 친절한 별해도 있다. 산학계몽 하권 <퇴적환원문>의 제4문 과일 삼각타와 제5문 과일 사각타의 해법에는 전체의 개수를 구하는 알고리즘만을 소개하고 있다. 반면에 이에 대응하는 묵사집산법 지권 <퇴타개적문>의 제7문과 제8문에는 산학계몽의 해법과 함께 별해를 제시하는데, 2층, 3층, 4층, 5층인 특수한 경우의 전체 개수를 제시해서 귀납적 이해를 돕고 있다.

별해는 아니지만 묵사집산법에는 같은 유형의 문제에 대해 전혀 다른 계산 방식과 풀이 방법을 제시하기도 하였다. 이를테면 묵사집산법 <개방해은문>에서 제1문과 제2문은 모두 제곱근 풀이에 해당하는 문제이다. 그런데 두 문제의 해법은 완전히 다르다. 제1문의 해법이 대수학적이라면, 제2문의 해법은 기하학적이다. 마찬가지로 제4, 5, 6, 7문은 모두 세제곱근 풀이에 해당하는 문제인데, 제4문과 제5문의 해법이 대수학적이라면 제6문과 제7문의 해법은 기하학적이다. 이에 대해서는 다음에 또 언급한다.

15) 예를 들면, 천권 <귀제승실문>의 제1, 2, 3, 7, 8, 9문 등이 있다.

16) 산학계몽에서는 하권 <지분제동문>에 처음으로 최대 공약수의 개념이 등장한다.

17) 예를 들며, 천권 <귀제승실문>과 지권 <취물추분문> 등에서 찾아볼 수 있다.

18) 산학계몽에 있는 세 개의 별해 중에서 상권 <절변호차문> 제2문과 제3문의 별해는 최대 공약수를 이용한다. 제2문에서는 관련된 수치 30과 5를 6과 1로 바꾸어 계산한 것이고, 제3문에서는 55와 5를 11과 1로 바꾸어 계산한 것이다. 그러나 산학계몽의 경우 최대 공약수에 대한 설명이 하권 <지분제동문>에야 나오기 때문에, 이런 설명은 완전할 수 없다.

3. 목사집산법의 특이점

전통 산학에서는 음수의 필요성을 일찍부터 인식했고, 이를 문제 풀이에 활용했다. 구장산술 제8권 <방정> 제3문의 해법에 양수와 음수의 덧셈과 뺄셈 규칙인 정부술이 등장한다. (연립 방정식의 확대 행렬에 기본 행 연산을 적용시켜 해를 구하는 방법과 같은) 방정술을 자유롭게 적용하기 위해서는 정부술이 필수적이다. 이에 방정정부법이 라는 말도 있다. 산학계몽에서는 <신편산학계몽목록>에 이미 ‘명정부술’을 제시했다. 또, ‘명승제단’에서는 양수와 음수의 곱셈 법칙을 중국 수학사에서 최초로 정식으로 제시했다([10, p. 319]).

정부술은 방정술뿐만 아니라 일반적인 승방(다항 방정식)을 다루는 천원술과 증승 개방법에도 필요하다.

그런데 목사집산법에는 정부술이 없다. <포산선습문>은 25조로 이에 해당하는 <신편산학계몽목록>의 18조보다 더 많은 기본적인 사항을 나열하고 있지만, 명정부술과 명승제단에 대응하는 항목이 없다. 이는 단순한 착오에 의한 누락이 아니고 저자가 의도적으로 정부술을 제거한 것으로 보인다. 왜냐하면 목사집산법에서는 전통적인 방정술에 의한 풀이를 찾아볼 수 없고, 천원술도 찾아볼 수 없기 때문이다.

3.1. 방정술

산학계몽 하권 <방정정부문>에서는 구장산술과 같은 방정술을 활용하는 9개의 문항이 있다. 이 문제들은 모두 목사집산법 인권 <화취호해문>과 책 끝 문제에 등장하지만, 정부술이 없는 목사집산법에서 이런 문제의 풀이 방법은 다를 수밖에 없다. 실제로 목사집산법에서는 계수들을 산대로 나타내지도 않았고 정부술을 이용해서 답을 구하지도 않았다.

목사집산법에서는 주어진 조건에 따라 음수인 계수나 뺄셈을 이용하지 않고 식을 세울 수 있는 제1, 3, 4, 6문 및 책 끝 문제는¹⁹⁾ 그 뒤의 조작에서도 음수 항이 나타나지 않도록 주어진 양들 사이의 균형을 유지하면서 답을 구했다. 모든 식을 더하거나 어느 식에 양수를 곱해서 모든 미지수에 대한 계수가 큰 식을 얻고 이것으로부터 각 미지수의 계수가 크지 않은 식을 빼는 방법으로 미지수의 계수가 음수가 되지 않도록 했다. 그리고 음수인 계수나 뺄셈이 있는 제2문과 제5문은 풀이의 처음 단계에서 음수인 계수와 뺄셈을 없앤 상태로 만들고 위와 같이 풀었다.

뺄셈은 큰 양수에서 작은 양수를 빼는 경우만 남겼기 때문에, 정부술에 의존하지 않을 수 있었다. 그렇지만 이를 위해서는 각 연산 단계에서 각 미지수에 대응하는 사

19) 제6문과 책 끝 문제에서는 현재와 같이 미지수를 이용해서 식을 세울 때, 등호의 양쪽에 모두 계수가 양수인 미지수가 나타난다.

물의 수량과 증감에 대해 항상 주의를 기울여야 한다. 방정술에서는 해당하는 수들을 행렬과 같이 나열한 뒤에는 기계적으로 문제를 풀 수 있지만, 묵사집산법의 방법으로 문제를 풀려면 대단한 집중력이 요구된다.

한편, 산학계몽 <방정정부문> 제8문과 제9문은 직사각형 발의 구(句, 짧은 변 x), 고(股, 긴 변 y), 현(弦, 대각선 z) 사이의 주어진 길이 관계로부터 방정술과 함께 구고술(제8문) 또는 천원술(제9문)을 이용해서 구, 고, 현의 길이를 구하는 문제이다. 두 문제의 풀이에 필요한 연립 방정식을 현대적으로 나타내면 오른쪽 같다.

$$\begin{array}{l} \text{제8문} \quad \begin{cases} \frac{x+z}{2} + \frac{2(y+z)}{9} = 54 \\ -\frac{x+z}{6} + \frac{2(y+z)}{3} = 42 \end{cases} \\ \text{제9문} \quad \begin{cases} -\frac{4(x+z)}{7} + \frac{6(y+z)}{7} = 22 \\ \frac{5(x+z)}{8} - \frac{y+z}{3} = 14 \end{cases} \end{array}$$

그런데 이 두 문제를 경선징은 각각 두 문제로 나누어 묵사집산법 <화취호해문> 제7, 8, 9, 10문에 구고(직각 삼각형) 모양의 발에 관한 문제로 실었다. 이에 따라 각 문제는 형식상 단 한 개의 일차 부정 방정식의 풀이로 귀결시켰다. 그렇지만 $x : y : z = 3 : 4 : 5$ 인 구고를 가정함으로써, 변수가 한 개인 일차 방정식을 풀이 답을 구했다.

방정술과 관련된 산학계몽의 문제를 이렇게 변형시키고 문제에 없는 조건을 이용한 이유는 분명하지 않다. 그 문제들의 답을 보면 실제로 $x : y : z = 3 : 4 : 5$ 인데, 이것을 가정으로 사용할 수 있다고 착각했을 수도 있다. 다른 문제와 달리 음수인 계수가 나타나는 관계를 적절하게 해결할 수 없었기 때문에, 문제를 나누고 편법적으로 풀이했을 수도 있다.

3.2. 개방술

산학계몽 하권 <개방석쇄문>에서는 승방(다항 방정식)의 풀이인 개방술을 다룬다. 정사각형의 넓이로부터 한 변의 길이를 구하는 제1문과 정육면체의 부피로부터 한 모서리의 길이를 구하는 제2문의 해법에서는 증승개방법의 과정이 상세히 설명되어 있다. 제8문부터 해법에서는 천원술을 이용해서 문제 해결에 필요한 일반적인 승방을 구하고 있지만, 일반적인 승방을 푸는 증승개방법은 설명하지 않고 있다. 앞에 있는 <퇴적환원문>에서도 제8문부터 제14문까지 문제 풀이에 필요한 승방을 해법에 제시했지만, 그런 승방의 풀이 방법은 제시하지 않았다. 기계적인 과정이라 생략했을 것으로 보인다.

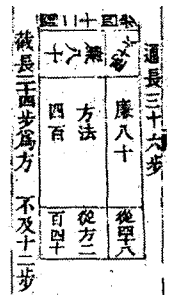
한편, 묵사집산법 인권 <개방해은문>에서 정사각형의 넓이로부터 한 변의 길이를 구하는 제1문의 해법과 정육면체의 부피로부터 한 모서리의 길이를 구하는 제4문과

제5문의 해법은 완벽한 증승개방법이다. 그런데 정사각형의 넓이로부터 한 변의 길이를 구하는 제2문의 해법과 정육면체의 부피로부터 한 모서리의 길이를 구하는 제6문과 제7문의 해법은 증승개방법이 아니다. 이는 구장산술의 개방법과 개입방법에 대한 유희의 주석에서 서술한 기하학적 방법으로 가장 잘 설명할 수 있다.([11, p. 53], [13, pp. 206~210, pp. 218~223], [14, pp. 221~224]를 보라.)

목사집산법 인권 <개방해은문>에서는 제곱근 풀이와 세제곱근 풀이에 해당하는 처음 12문제에 뒤이어 제13문부터 제19문까지는²⁰⁾ 퇴타술의 역에 대응하는 문제들로 산학계몽 하권 <퇴적환원문> 제8문부터 제12문까지와 대응한다. 그리고 <개방해은문> 제20문부터 제29문까지는 산학계몽이 아니라 양휘산법 <전무비류승제첩법> 하권 27문 중에서 제6문부터 제15문까지에 대응하는 문제를 싣고 있다.²¹⁾

목사집산법 하권 <개방해은문>에서 (단순한 제곱근 풀이만이 요구되는 제15, 16, 17문을 제외하면) 제13문부터 제22문까지의 풀이에 필요한 승방은 양수 a, b, c 에 대해 $x^2 + ax = b$ 또는 $x^3 + ax^2 + bx = c$ 꼴로 나타낼 수 있는데, 모든 계수가 양수이고 최고차 항의 계수는 1이다. 또, 제18문을 제외하면²²⁾ 이런 승방을 산학계몽에서 증승개방법을 암시하는 방식으로 나타내지도 않았고, 증승개방법으로 풀지도 않았다. 사실, 목사집산법에서는 천원술을 이용하지 않았기 때문에 승방을 나타내고 이를 푸는 과정을 나타내기도 쉽지 않았을 것이다.

이 중에서 양수 a 와 b 에 대한 $x^2 + ax = b$ 꼴의 평방(이차 방정식)은 구장산술 <구고> 제20문에 나타나는 평방과 같은 풀이다. 목사집산법의 평방과 관련된 제13, 14문 및 그 뒤의 제20, 21, 22문의 해법은 서로 같은데, 해법의 설명 부족 또는 누락된 단어 등으로 그 방법을 정확하게 알기는 어렵다. 여기서 제20문은 양휘산법 <전무비류승제첩법> 하권 제6문의 유제(比類)와 일치하는데, 평방 $x^2 + 12x = 864$ 의 풀이를 요구한다. 양휘산법의 해법에는 “앞과 같은 대중개평방으로 푸는 방법을 이용한다(取用同前帶從開平方除之)”고 썼다([12, p. 961]). 그 앞의 제6문²³⁾의 해법에는 오른쪽과 같은 기하학적 도식과 함께 문제 풀이를



- 20) 제16문과 제17문은 세모꼴 산대와 관련 있으며 목사집산법에만 있다.
- 21) 단, 목사집산법 <개방해은문> 제24, 25, 26문은 차례로 산학계몽 하권 <개방석쇄문>의 제 8, 9, 10문과 일치하거나 수치만 다르고, 이는 다시 <전무비류승제첩법> 하권 제9, 11, 8문과 수치만 다르다.
- 22) 제18문에는 두 개의 해법이 있는데, ‘法曰’과 ‘又曰’이 아니라 예외적으로 모두 ‘法曰’로 시작한다. 첫째 해법은 산학계몽 하권 <퇴적환원문>의 제11문에 있는 해법과 일치하며, 풀이에 필요한 입장을 정확하게 나타내고 있다. 둘째 해법은 목사집산법의 다른 문제와 같은 해법을 제시하고 있다. 이에 첫째 해법은 “후에 저자가 아닌 다른 사람이 첨가하였을 가능성이 있는 것으로 보인다([8, pp. 3~4]).”
- 23) 직사각형 밭의 넓이는 864보다. 다만 너비가 길이보다 12보 짧다면, 너비는 얼마인가?(直田積八百六十四步 只云闊不及長一十二步 問闊幾步)

위한 산대 계산 과정이 있다. 아래의 ①, ②, ③은 그 풀이에 제시된 산대 계산을 숫자로 나타낸 것이고 나머지는 보완한 것이다.²⁴⁾

	①	②		③		
商位		2	2	2	2	24 24
置積	864	864	224	224	224	224 0
方法		⇒ 2	⇒ 2	⇒ 4	⇒ 4	⇒ 44 ⇒ 44
從方	12	12	12	12	12	12 12
隅算	1	1	1	1	1	1 1

위의 해법은 구장산술 <구고> 제20문의 해법에 대한 [11, p. 53~54]의 설명인 대중개방법(帶從開方法, corollary to extracting the square root)과 유사하다. 평방에 대한 이런 해법은 위에 제시한 도형을 이용해서 기하학적으로 쉽게 설명할 수 있다. 이 부분은 묵사집산법이 양휘산법을 따르고 있기 때문에, 묵사집산법의 평방과 관련된 제13, 14, 20, 21, 22문의 해법은 이런 기하학적 방법에 의존한 것으로 보인다.

한편, 묵사집산법 <개방해은문> 제18, 19문에서 푼 입방은 모두 왕효통(王孝通)의 집고산경(緝古算經)에 등장하는 입방과 같은 형태이다. 왕효통은 이를 개방법과 대중개방법의 확장으로, 개입방법에서 진화한 대중개입방법(帶從開立方, corollary to extracting the cube root)으로 풀었다([11, p. 103]). “삼차 방정식(입방)의 해법을 보면 경선징은 조립제법을 이용한 증승개방법을 모르고 있는 것으로 보인다([8, p. 11]).”는 평도 고려할 때, 묵사집산법 <개방해은문>에서 제18, 19문의 입방은 제6문과 제7문의 세제곱근을 구하는 기하학적 해법 및 평방과 관련된 기하학적 해법을 활용하여 역시 기하학적으로 푼 것으로 보인다.

산학계몽은 천원술 등을 이용해서 “기하 문제를 대수적 방법으로 해결했으며, 기하학적 속박에서 벗어나게 했다([10, pp. 352~355].)”는 말을 듣고 있다. 그런데 위에서 살펴본 바와 같이, 묵사집산법에서는 구장산술과 집고산경과 같은 훨씬 이전의 산학서에서 다룬 형태의 승방만을 다루고 있으며, 그 해법도 증승개방법이 아니라 기하학적 방법에 의존한 것으로 보인다.

게다가 묵사집산법 <개방해은문>에서 제23문부터 제29문까지는 완전히 고법을 이용하는데, 산학에서 큰 정사각형을 네 개의 직사각형과 한 개의 정사각형으로 분할함으로써 그 정당성을 확인하는 관계 $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ 를 이용하고 있다. 물론, 이런 고법은 산학계몽 <개방석쇄문> 제8문²⁵⁾의 해법에 있는 주석과 양휘산법 <전무비류승제첩법> 하권 제8문²⁶⁾과 그 유제²⁷⁾ 및 제11문²⁸⁾의 해법에서 찾아볼 수

24) [9, p. 213~215]에 있는 이와 같은 문제의 풀이와 비교해 보자.

25) 묵사집산법 <개방해은문>제24문과 같음.

있다. 그렇지만 산학계몽에서는 이런 문제들의 해법을 천원술로 음수 항이 나타나는 승방을 얻어 해결하고 있다. 또, 양휘산법에서도 음수 항이 있는 승방을 익적, 감종, 번적 등의 증승개방법으로 해결하고 있다.

묵사집산법에는 산학계몽 <개방석쇄문> 제26문부터 나타나는 여러 가지 평면도형과 입체도형이 관련된 문제로 좀 더 복잡한 계산이 필요한 문제들은 다루지 않았다. 이런 문제들의 풀이에 필요한 식을 천원술로 나타내면 최고차 항의 계수가 1이 아닌 경우와 음수 항이 있는 경우가 많다. 삼승방(사차 방정식)과 사승방(오차 방정식)이 필요하기도 하다. 묵사집산법과 같이 정부술과 천원술 없이 그리고 기하학적 방법에 의존해서 산학을 전개하는 경우에는 쉽게 다룰 수 없는 문제들로 보인다.²⁹⁾

4. 맺음말

경선징은 산학계몽을 기본 지침서로 삼아 묵사집산법을 편성하였다. 산학계몽과 완전히 일치하는 문항도 많이 있지만, 수치만이라도 바꾼 문항도 많다. 그렇지만 묵사집산법에는 141개나 더 많은 문항이 있고, 측량술 및 중국인의 나머지 정리와 같이 산학계몽에서 없는 산학의 주요한 주제도 몇 가지 더 추가하였다. 경선징은 이런 보완을 통해 묵사집산법을 산학에 대한 충실한 입문서로 편집하려고 시도한 것으로 보인다. 편집상에 일부 개선을 요하는 면도 있지만, 매우 의미 있는 시도로 보인다.

경선징은 묵사집산법을 편집하면서 무엇보다도 교육적인 효과를 거두기 위해 노력한 것으로 보인다. 적절한 학습 위계를 고려해서 같은 주제에 대해 기본적인 문항을 더 많이 추가했고, 문항들의 배열에도 세심한 주의를 기울였다. 각 문항에 대해서도 별해를 다수 추가하여 문제 풀이에 대한 이해를 도왔으며 산학계몽과 다른 자신의 새로운 해법을 제시하여 정형화된 풀이 방법을 탈피하도록 유도하였다. 이런 다양한 해법은 저자가 산학에 대해 깊이 연구했음을 보여주는 척도이기도 하다.

경선징은 또한 정부술과 천원술 등을 의도적으로 배제시킨 것으로 보이는데, 이런 상황에서 얻을 수 있는 산학을 최대한 유도하려고 시도했던 것으로 보인다. 이런 제약 속에서도 묵사집산법과 같은 산학 세계를 구축할 수 있었지만, 전통 산학의 중요한 면을 많이 제외시켜야 했다. 방정술을 사용할 수 없어서 연립 방정식의 풀이가 필요한 문제를 아주 어렵고 긴 시간을 들여 풀어야 했다. 이차 방정식

26) 산학계몽 <개방석쇄문> 제10문 및 묵사집산법 <개방해은문> 제26문과 수치만 다름.

27) 묵사집산법 <개방해은문> 제23문과 같음.

28) 산학계몽 <개방석쇄문> 제9문 및 묵사집산법 <개방해은문> 제25문과 수치만 다름.

29) 산학계몽 <퇴적환원문> 제14문은 삼각타와 사각타의 혼합 문제인데, 풀이에서는 천원술을 이용해서 입방을 얻는다. 묵사집산법에는 이 문제도 없다.

$x(60 - x) = 864$ 정도에 대응하는 식의 연산 과정을 서술하거나 그 결과를 나타내기도 쉽지 않았을 것이다. 그러므로 일반적인 승방에 대한 증승개방법은 물론이고 그런 승방의 도입도 제외시켜야 했다. 이에 따라 단순한 평방과 입방만을 다루었으며, 고법 등 기하학적 방법에 의존해야 했다.

감사의 글 본 논문은 심사위원님들의 적절한 지적과 훌륭한 의견에 따라 많은 부분을 수정·보완하였습니다. 본 논문을 세심하게 검토해주고 값진 조언을 해주신 심사위원님들께 깊은 감사의 뜻을 표합니다.

참고 문헌

1. 경선징 저/유인영, 허민 역, 묵사집산법 천·지·인, 교우사, 2006.
2. 김용운, 김용국, 한국수학사, 열화당, 1982.
3. 김용운 편, 한국과학기술대계 수학편 1, 여강출판사, 1985.
4. 남권희, “庚午字本 《新編算學啓蒙》과 諸版本 研究,” 書誌學研究 제16집, pp. 335~360(1998).
5. 주세걸 저/허민 역, 산학계몽 상·중·하, 한국학술진흥재단 2005년도 동서양 학술명저 번역 지원 사업 최종 결과물 제출본, 2007.
6. 차종천 편, 산경십서 하, 동양수학대계 II, 교우사, 2006.
7. 차종천 편, 양휘산법, 동양수학대계 V, 교우사, 2006.
8. 홍영희, “조선 시대의 방정식론,” 한국수학사학회지 제17권 제4호, pp. 1~16(2004).
9. 홍정하 저/강신원, 장혜원 역, 구일집 지, 교우사, 2006.
10. 孔國平, 李治朱世杰与金元數學, 河北科學技術出版社, 2000.
11. 李儼, 杜石然 저/J.N. Crossley · A.W.-C. Lun 역, Chinese Mathematics - A concise history, Claredon Press, 1987.
12. 靖玉樹 編勘, 中國歷代算學集成 上, 山東人民出版社, 濟南, 1994.
13. Kangshen, S · Crossley, J.N. · Lun, A.W.-C., *The Nine Chapters on Mathematical Art - Companion and Commentary*, Oxford University Press, 1999.
14. Martzloff, Jean-Claude, *A History of Chinese Mathematics*, Springer, 1987.

A Comparison between *Suanxue qimeng*(Introduction to Mathematical Studies) and *Muksa-jipsanbup*

Department of Mathematics, Kwangwoon University **Min Her**

Suanxue qimeng(算學啓蒙) is the introduction to mathematics which greatly influenced Chosun mathematics. *Muksa-jipsanbup*(默思集算法) imitated the style and the contents of *Suanxue qimeng*, but contains a lot of problems, secondary solutions and topics which is not in *Suanxue qimeng* and tried to achieve educational improvement. However *Muksa-jipsanbup* could not use the method of rectangular arrays(方程術) because it excluded the method of positive and negative(正負術), and has a serious limitation in applying the method of extracting roots by iterated multiplication(增乘開方法) because it avoided the technique of the celestial element(天元術).

Key words: *Suanxue qimeng*(算學啓蒙), *Muksa-jipsanbup*(默思集算法), method of positive and negative(正負術), technique of the celestial element(天元術), method of rectangular arrays(方程術), method of extracting roots by iterated multiplication(增乘開方法)

2000 Mathematics Subject Classification: 01A13, 01A25, 01A45, 00A07

ZDM Subject Classification: A30, U20, U40

논문 접수: 2007년 12월

심사 완료: 2008년 1월