

위상학적 최적구조 모델링을 위한 민감도해석의 공식화

Formulations of Sensitivity Analyses for Topological Optimum Modelings

이 동 규*

Lee, Dong-Kyu

신 수 미**

Shin, Soo-Mi

Abstract

The objective of sensitivity analyses is to identify critical variables of structural models and how their variability impacts mechanical response results. The sensitivity analyses have been used as significant basis data for practical applications of measuring and reinforcing fragile building structures. This study presents several sensitivity analysis methods for topological optimum designs of linear elastostatic structural systems. Numerical examples for structural analyses and topological optimum modeling demonstrate the reliability of sensitivities formulated in the present study.

요 지

민감도 해석은 구조 모델링 변수의 변화에 따른 역학적인 거동의 특성을 찾는 것을 목적으로 한다. 따라서 건물의 구조 진단과 보수 보강 분야에서 특히 중요한 설계 자료로서 활용되고 있다. 본 연구는 구조물의 위상학적 최적 모델링에서 중요하게 다루어지는 민감도 해석을 다양한 방법을 사용하여 공식화하였다. 감차법과 변분법을 적용하여 직접법과 수반법으로서 최종적인 해석적인 민감도 식들을 유도하였다. 구조 해석에 관한 간단한 수치예제를 통하여 유도된 민감도 식들의 해가 적절함을 수치적인 민감도 해석치와 비교하여 검증하였고, 최종적으로 이산화 민감도 해석에 의한 밀도분배법의 위상학적 최적 모델링을 수행하여 민감도 공식들을 위상 최적화 문제에서 정식화하였다.

Keywords : Density distribution method, Sensitivity analyses, Topological optimum modeling

핵심 용어 : 밀도분배법, 민감도해석, 위상학적 최적 모델링

* 정희원, (재)포항산업과학연구원 건축연구실 선임연구원

** 정희원, 부산대학교 건축학과 BK21 박사후연구원, 교신저자

E-mail : shinsumi82@pusan.ac.kr 051-510-3564

• 본 논문에 대한 토의를 2008년 12월 31일까지 학회로 보내 주시면 2009년 3월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

1. 서론

최적 설계변수에 의한 목적함수의 미분은 민감도 해석을 통하여 평가된다. 민감도 해석은 구조물의 기하학적 형상이나 재료 성분의 변화에 반응하는 역학적인 거동의 정보를 나타내기 때문에 반복적이고 순차적으로 최적화 되는 구조 모델링 과정에서 매우 중요한 자료를 제공한다.

민감도 해석은 일반적으로 해석적인 방법(analytical method)과 수치적인 방법(numerical method)이 널리 이용되고 있다(Haug 등, 1986; Adelman 등, 1986). Fig. 1에서 민감도 해석의 방법들을 분류하여 도시하였다. 해석적 방법은 이산화법(discrete sensitivity method)이나 변분법(variational sensitivity method)을 통해 수행될 수 있다. 이산화법에서는 이미 감차된 역학 문제의 미분이 수행되나, 변분법의 경우는 처음에 연속적인 구조 시스템이 미분된 후에 감차된다. 이러한 방법들은 모두 동일한 민감도 해석의 결과를 생산한다. 확정된 최적 설계조건들과 설계변수에 의해 최적화 문제가 정의된 경우에 변분법이 수치적인 효율성 면에서 이산화법보다 더 우수하다고 알려져 있다. 이산화법과 변분법은 둘 다 직접법(direct method)과 수반법(adjoint method)을 통하여 유도가 가능하다. 직접법의 경우 설계변수에 대한 변위 장의 민감도가 직접 계산되나, 수반법에서는 라그랑지 상수를 이용하기 때문에 계산 시간이 많이 소모되는 변위 장의 민감도 해석이 필요 없다. 민감도 해석의 수치적인 방법은 전차분, 후차분, 중앙 차분법이 있다. 이 방법들은 해석적인 방법과 비교했을 때 수치적인 오차가 크기 때문에, 실제 민감도 해석에 사용되지 않고 주로 해석적인 방법에 의해 산출된 민감도 결과의 검증에 이용된다.

본 연구에서는 평면응력 상태의 등방성 재료를 가지는 선형탄성 단순보(MBB) 구조물의 위상학적 최적 구조 모델링 문제에 대해 변분법과 이산화법에 의한 민감도 해석을 위한 수식을 공식화하였으며, 이러한 해석적인 방법의 결과 비교 및 수치적인 방법에 의한 민감도 결과와 비교하여 해의 적합성을 검증하였다.

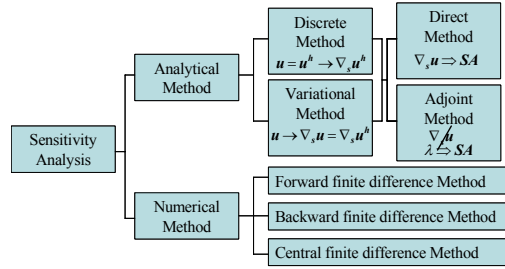


Fig. 1 민감도해석 방법

기존연구(Ha 등, 2004; Wang 등, 2002)에서는 위상최적모델을 위한 민감도해석으로서 요소밀도 설계 변수의 사용으로 인해 감차법보다는 변분법에 기초한 해석적인 방법을 주로 사용하고 있으나, 본 연구는 위상최적설계를 위한 과정으로서 민감도해석에 대해 해석적인 두 가지 방법을 모두 공식화하여 수치예제로 다룸으로써 이들의 상용화에 기여할 것으로 판단된다.

2. 구조 민감도 해석

2.1 변분 민감도법의 공식화

정적 선형 탄성 구조물을 지배하는 설계영역 $\Omega_x \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = \text{차원}$)에서 적합한 위상 최적화 문제는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Minimize} : \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C}(E) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega_x$$

Subject to :

$$\int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{u}) \mathbf{C}(E) \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) d\Omega_x \\ = \int_{\Omega_x} \mathbf{b}^T \delta \mathbf{u} d\Omega_x + \int_{\Gamma_f} \mathbf{t}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma_f$$

$$E(\Phi) = E_0(\Phi)^k, k \geq 1, 0 \leq \Phi \leq 1, \int_{\Omega_x} \Phi d\Omega_x \leq V_0 \quad (1)$$

여기서 \mathbf{C} 는 재료텐서, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 은 변형률을 가리키며, E_0 , Φ , V_0 는 각각 공칭 영계수, 재료 밀도, 공칭 부피를 나타낸다. 목적함수는 최소 변형률 에너지 또는 최대 강성 에너지로 가정하며, 구속조건으로 힘의 평형조건

식과 부피 제약조건이 사용된다. 본 연구는 위상 최적화에서 설계영역 개념을 이용하는 밀도분배법을 수행한다(Bendsøe 등, 1988; Bendsøe, 1989; Mlejnek, 1992; Yang 등, 1994). k 는 밀도분배법에서 밀도와 강성간의 관계를 나타내는 밀척계수이다.

해석적인 민감도 해석에서 변분법은 연속적인 문제를 먼저 미분한 후에 이산화가 이루어진다. 연속적인 변위 장은 최적 설계변수에 의존하기 때문에 연속적인 문제에서 목적함수의 미분은 현시적인 편미분 항과 암시적인 편미분 항으로 구성되며 다음 식과 같이 나타낸다.

$$\nabla_s f = \nabla_s^{ex} f + \overline{\nabla_u f}^T \nabla_s \mathbf{u} \quad (2)$$

여기서 s 는 최적 설계변수, $\nabla_s^{ex} f$ 는 현시적인 민감도를, $\overline{\nabla_u f}^T \nabla_s \mathbf{u}$ 는 암시적인 민감도 항을 나타낸다.

미분 연산 행렬 \mathbf{L} 과 연속적인 변위 장 \mathbf{u} 는 설계변수에 의존하지 않기 때문에, 최적 설계변수에 대한 변형률의 현시적인 미분은 0이며 다음 식과 같다.

$$\nabla_s^{ex} \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s^{ex} (\mathbf{L}\mathbf{u}) = \nabla_s^{ex} \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{L}\nabla_s^{ex} \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

재료텐서는 변위에 의존하지 않고 배열이 대칭성을 가지기 때문에 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla_u \mathbf{C} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla_u \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \nabla_u \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

식(3)~(5)을 사용하면 현시적인 것과 암시적인 편미분 항은 각각 다음과 같다.

$$\nabla_s^{ex} f = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_x \quad (6)$$

$$\overline{\nabla_u f} = \int_{\Omega_x} \nabla_u \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \nabla_u \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_x \quad (7)$$

식(6)과 (7)에 의해 식(2)의 총 편미분식은 다음과 같다.

$$\nabla_s f = \frac{1}{2} \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \nabla_u \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \nabla_s \mathbf{u} d\Omega_x \quad (8)$$

식(1)에서 장조건과 경계조건을 만족하는 힘의 평형방정식을 이용하면 설계변수에 대한 연속적인 변위 장의 민감도 $\nabla_s \mathbf{u}$ 를 구할 수 있다. 가상변위는 임의적인 값이기 때문에 힘의 평형방정식의 미분에서

$\nabla_s(\delta \mathbf{u}) = 0$ 이 된다.

$\nabla_s(\delta \mathbf{u}) = 0$ 로부터 힘의 평형조건식의 미분은 다음 식과 같다.

$$\int_{\Omega_x} (\nabla_s(\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T) \boldsymbol{\sigma} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \boldsymbol{\sigma}) d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \bar{\mathbf{b}} d\Omega_x + \int_{\Gamma_x} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_x \quad (9)$$

설계영역의 선형 기하학적 조건은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (10)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\delta \mathbf{u} \quad (11)$$

응력과 변형률은 재료텐서와 관련되어 아래 식과 같은 구성조건식을 형성한다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

식(10)~(12)의 미분은 각각 다음과 같다.

$$\nabla_s \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{L}\nabla_s \mathbf{u} \quad (13)$$

$$\nabla_s(\delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \nabla_s \mathbf{L}\delta \mathbf{u} + \mathbf{L}\nabla_s(\delta \mathbf{u}) = \nabla_s \mathbf{L}\delta \mathbf{u} \quad (14)$$

$$\nabla_s \boldsymbol{\sigma} = \nabla_s \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}\nabla_s \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

식(10)~(15)를 식(9)에 대입하면 연속적인 변위 장의 민감도를 포함하는 새로운 민감도 식이 생성된다.

$$\int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \nabla_s \mathbf{u} d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \bar{\mathbf{b}} d\Omega_x + \int_{\Gamma_x} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_x - \int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} d\Omega_x - \int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} d\Omega_x - \int_{\Omega_x} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{L} \mathbf{u} d\Omega_x \quad (16)$$

식(16)에서 직접적으로 연속적인 변위 장의 민감도를 계산할 수 있으며 그 결과를 식(8)에 대입하면 총 편미분 값을 얻을 수 있다. 이러한 방법을 직접법이라고 한다. 하지만 변위 장의 민감도 계산은 알고리즘이 복잡하고 계산 비용을 증가시킨다.

수반법은 라그랑지 계수를 이용하기 때문에 계산 비용이 큰 변위 장의 민감도를 계산할 필요가 없다. 이에 의하면 힘의 평형방정식, 즉, 0항을 포함하는 새로운 목적함수 식이 다음과 같이 가정된다.

$$\tilde{f} = f - \gamma \left\{ \int_{\Omega_x} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega_x - \int_{\Sigma_x} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega_x - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma_t \right\} \quad (17)$$

라그랑지 계수 γ 의 미분 항은 힘의 평형방정식=0이기 때문에 제거된다. 따라서 새로운 목적함수의 미분은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & \nabla_s^{\text{ex}} f + \frac{\overline{\nabla f^T \nabla_s \mathbf{u}} - \gamma \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \nabla_s \mathbf{u} \, d\Omega_e}{(a)=0} \\ & - \gamma \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \mathbf{L}^T \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} \, d\Omega_e - \gamma \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{u} \, d\Omega_e \\ & - \gamma \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{L} \mathbf{u} \, d\Omega_e + \gamma \int_{\Omega_e} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega_e \\ & + \gamma \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \nabla_s \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma_i \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 라그랑지 계수는 임의로 선택할 수 있는 변수이다. 그러므로 수치 알고리즘에서 계산 비용이 큰 연속적인 변위 장의 민감도를 제거할 수 있는 특정한 라그랑지 계수 값을 사용할 수 있다. 따라서 식(18)에서 특성 방정식 (a)=0을 만족하는 라그랑지 계수를 구한다.

이산화 과정에서 물체력 $\bar{\mathbf{b}}$, 외력 $\bar{\mathbf{t}}$, 미분 텐서 \mathbf{L} , 자코비 행렬은 설계변수 s 의 변분에 영향이 없다는 가정 하에서, 설계변수에 대한 목적함수의 최종적인 민감도 공식은 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\nabla_s \tilde{f} = -\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \nabla_s \mathbf{C}_e(\Phi) \mathbf{B}_e \, d\Omega_e \widehat{\mathbf{u}}_e \quad (19)$$

여기서 $\widehat{\mathbf{u}}_e$ 는 절점 변위벡터, \mathbf{B}_e 는 요소 연산 행렬, \mathbf{C}_e 는 요소의 재료텐서를 가리킨다.

2.2 이산 민감도법의 공식화

연속체 구조물을 정의하는 식(1)의 목적함수는 다음 식과 같이 이산화 된 설계영역 Ω_e 의 형태로 표시될 수 있다.

$$\begin{aligned} f = & \frac{A}{\text{element}} \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \widehat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_e \widehat{\mathbf{u}}_e \, d\Omega_e \\ = & \frac{A}{\text{element}} \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{K}_e \, d\Omega_e \widehat{\mathbf{u}}_e \end{aligned} \quad (20)$$

여기서 $\frac{A}{\text{element}}$ 는 전체 시스템 행렬의 어셈블리,

$\widehat{\mathbf{u}}_e$ 는 요소의 절점변위 벡터로서 Ω_e 에서 상수항을

나타내며, \mathbf{K}_e 는 요소 강성 행렬을 나타낸다.

이산 민감도법에서는 최적 설계변수에 대한 목적함수의 편미분을 수행하기 위해서 이산화 된 목적함수 식(20)을 사용한다.

식(20)의 미분과정에서 설계변수에 대한 절점변위의 현시적인 미분은 설계변수에 의존하지 않기 때문에 0이고, 절점변위에 대한 재료텐서의 미분도 절점변위에 대해서 비의존성을 가지므로 0이다. 강성 행렬은 선형 탄성 시스템에서 대칭성을 가진다. 이러한 특성들은 다음 식들과 같이 각각 나타낼 수 있다.

$$\nabla_s^{\text{ex}} \widehat{\mathbf{u}}_e = 0 \quad (21)$$

$$\nabla_u \mathbf{C} = 0 \quad (22)$$

$$\nabla_u \widehat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_e \widehat{\mathbf{u}}_e = \widehat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{K}_e \nabla_u \widehat{\mathbf{u}}_e \quad (23)$$

식(21)~(23)을 이용하면 식(20)의 현시적인 것과 암시적인 편미분 식은 각각 다음과 같다.

$$\nabla_s^{\text{ex}} f = \frac{A}{\text{element}} \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \nabla_s \mathbf{K}_e \, d\Omega_e \widehat{\mathbf{u}}_e \quad (24)$$

$$\overline{\nabla_u} f = \frac{A}{\text{element}} \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{K}_e \, d\Omega_e \nabla_u \widehat{\mathbf{u}}_e \quad (25)$$

따라서 총 편미분 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \nabla f = & \frac{A}{\text{element}} \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \nabla_s \mathbf{K}_e \, d\Omega_e \widehat{\mathbf{u}}_e \\ & + \frac{A}{\text{element}} \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{K}_e \, d\Omega_e \nabla_u \widehat{\mathbf{u}}_e \end{aligned} \quad (26)$$

민감도 해석을 위한 직접법은 식(26)에서 $\nabla_s \widehat{\mathbf{u}}$ 의 직접적인 계산을 요구하며 이산 민감도법에서 적용할 수 있다.

설계변수에 대한 절점변위의 미분 $\nabla_s \widehat{\mathbf{u}}$ 을 계산하기 위해서, 가상변위의 원리에 의한 다음의 힘의 평형조건식을 이용한다.

$$\delta \widehat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{K} \widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{P}}) = 0 \rightarrow \mathbf{K} \widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{P}} \quad (27)$$

힘의 평형조건식의 미분은 다음과 같다.

$$\nabla_s \mathbf{K} \widehat{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \nabla_s \widehat{\mathbf{u}} = \nabla_s \widehat{\mathbf{P}} \quad (28)$$

여기서 $\mathbf{K} \nabla_s \widehat{\mathbf{u}}$ 는 가상(Pseudo) 하중벡터 \mathbf{P}_{pseudo}

로 정의하며 다음 관계식들을 이용하여 $\nabla_s \widehat{\mathbf{u}}$ 을 직접적으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{K} \nabla_s \widehat{\mathbf{u}} = \mathbf{P}_{pseudo} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{pseudo} &= \nabla_s \widehat{\mathbf{P}} - \nabla_s \mathbf{K} \widehat{\mathbf{u}} \\ &= \nabla_s \overline{\mathbf{P}}_k + \underset{element}{A} \left[\nabla_s \overline{\mathbf{P}}_e - \nabla_s \mathbf{K}_e \widehat{\mathbf{u}}_e \right] \end{aligned} \quad (30)$$

여기서

$$\nabla_s \overline{\mathbf{P}}_e = \nabla_s \widehat{\mathbf{s}}_e^T \nabla_e \overline{\mathbf{P}}_e \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \nabla_e \overline{\mathbf{P}}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_e^T \nabla_e \overline{\mathbf{b}}_e d\Omega_e \\ &+ \int_{\Gamma_{te}} \mathbf{N}_e^T \nabla_e \overline{\mathbf{t}}_e d\Gamma_{te} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\nabla_s \mathbf{K}_e = \nabla_s \widehat{\mathbf{s}}_e^T \nabla_e \mathbf{K}_e \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \nabla_e \mathbf{K}_e &= \int_{\Omega_e} \nabla_e \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e d\Omega_e \\ &+ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \nabla_e \mathbf{C} \mathbf{B}_e d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \nabla_e \mathbf{B}_e d\Omega_e \end{aligned} \quad (34)$$

식(30)을 식(29)에 대입하면 $\nabla_s \widehat{\mathbf{u}}$ 는 다음 식과 같다.

$$\nabla_s \widehat{\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{-1} (\nabla_s \widehat{\mathbf{P}} - \nabla_s \mathbf{K} \widehat{\mathbf{u}}) \quad (35)$$

$\nabla_s \overline{\mathbf{P}}_k = \nabla_s \overline{\mathbf{b}}_e = \nabla_s \mathbf{t}_e = \nabla_s \mathbf{L}_e = 0$ 를 가정하고 식(35)를 총 편미분 식(26)에 대입하면 최종적인 목적함수의 민감도는 다음 식과 같다.

$$\nabla_s f = \underset{element}{A} - \frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \nabla_s \mathbf{K}_e d\Omega_e \widehat{\mathbf{u}}_e \quad (36)$$

$\nabla_s \widehat{\mathbf{u}}$ 를 직접 계산하지 않는 수반법에 의하면 라그랑지 계수 γ 와 힘의 평형조건식을 가지는 새로운 목적함수의 식은 다음과 같다.

$$\tilde{f} = f - \gamma^T (\mathbf{K} \widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{P}}) \quad (37)$$

새로운 목적함수의 미분은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 라그랑지 계수의 미분은 힘의 평형조건식이 0를 만족하기 때문에 사라진다.

$$\nabla_s \tilde{f} = \nabla_s^e f + (\overline{\nabla_u} f^T - \gamma^T \mathbf{K}) \nabla_s \widehat{\mathbf{u}} - \gamma^T (\nabla_s \mathbf{K} \widehat{\mathbf{u}} - \nabla_s \widehat{\mathbf{P}}) \quad (38)$$

식(37)에 의하면 라그랑지 계수는 힘의 평형조건식의 항이 0이기 때문에 임의적인 값을 가질 수 있다.

따라서 식(38)의 $\nabla_s \widehat{\mathbf{u}}$ 를 제거하기 위해서는 밑줄 그은 괄호 항이 0이 되어야 하기 때문에 다음 식과 같은 특정한 라그랑지 계수 값을 얻을 수 있다.

$$\gamma^T = \overline{\nabla_u} f^T \mathbf{K}^{-1} \quad (39)$$

식(39)가 식(38)에 대입되면 목적함수의 새로운 편미분 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla_s \tilde{f} &= \nabla_s^e f - \overline{\nabla_u} f^T \mathbf{K}^{-1} (\nabla_s \mathbf{K} \widehat{\mathbf{u}} - \nabla_s \widehat{\mathbf{P}}) \\ &= \nabla_s^e f - \overline{\nabla_u} f^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}_{pseudo} \end{aligned} \quad (40)$$

식(24), (25), (30)을 식(40)에 대입하면 목적함수의 최종적인 편미분 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \nabla_s f &= \underset{element}{A} \left[\frac{1}{2} \widehat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} (\nabla_s \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e^T \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{B}_e \right. \\ &+ \left. \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{B}_e) d\Omega_e \widehat{\mathbf{u}}_e - \widehat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e d\Omega_e \nabla_s^i \widehat{\mathbf{u}}_e \right. \\ &\left. \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e d\Omega_e \right)^{-1} \left(\int_{\Omega_e} (\nabla_s \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e^T \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{B}_e \right. \right. \\ &+ \left. \left. \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \nabla_s \mathbf{B}_e) d\Omega_e \widehat{\mathbf{u}}_e + \nabla_s \overline{\mathbf{P}}_k + \int_{\Omega_e} \nabla_s \widehat{\mathbf{s}}_e^T \mathbf{N}_e^T \nabla_e \overline{\mathbf{b}}_e d\Omega_e \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_{\Gamma_{te}} \nabla_s \widehat{\mathbf{s}}_e^T \mathbf{N}_e^T \nabla_e \overline{\mathbf{t}}_e d\Gamma_{te} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

위 식에서 $\nabla_s \overline{\mathbf{P}}_k = \nabla_s \overline{\mathbf{b}}_e = \nabla_s \mathbf{t}_e = \nabla_s \mathbf{L}_e = 0$ 을 가정하면 간단한 민감도 식이 얻어지며 이것은 직접법에 의한 식(36)과 일치한다.

2.3 수치적 민감도법

수치적인 민감도법은 정해와의 큰 오차로 인해 해석적 민감도 결과의 검증에 주로 사용된다. 잘 알려진 수치적인 방법으로는 전치, 후치, 중앙 차분법이 있다. 이러한 방법들에 의하면 최적 설계변수 \hat{s} 의 변분 $\Delta \hat{s}$ 대하여 반응하는 목적함수 f 의 민감도는 테일러 급수에 의해 다음 식과 같이 각각 정의한다.

$$\begin{aligned} f(\hat{s} + \Delta \hat{s}) &= f(\hat{s}) + \nabla f(\hat{s}) \Delta \hat{s} + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\hat{s}) (\Delta \hat{s})^2 + ERR \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} f(\hat{s} - \Delta \hat{s}) &= f(\hat{s}) - \nabla f(\hat{s}) \Delta \hat{s} + \frac{1}{2} \nabla^2 f(\hat{s}) (\Delta \hat{s})^2 - ERR \end{aligned} \quad (43)$$

$$f\left(\hat{s} + \Delta \frac{1}{2} \hat{s}\right)$$

Table 1 설계변수에 대한 목적함수의 민감도 해석에서 해석적 방법과 수치적 방법의 결과

유한요소	수치적 방법	해석적 방법	오차(%)
1	-0.094	-0.094132352	0.14060
2	-0.309	-0.308712751	0.09304
3	-0.793	-0.792683195	0.03997
4	-1.513	-1.512907938	0.00609
5	-2.492	-2.491710408	0.01162
6	-3.611	-3.661269061	1.37300
7	-3.611	-3.661269061	1.37300
8	-2.492	-2.491710408	0.01162
9	-1.513	-1.512907938	0.00609
10	-0.793	-0.792683195	0.03997
11	-0.309	-0.308712751	0.09304
12	-0.094	-0.094132352	0.14060

$$= f(\hat{s}) + \frac{1}{2} \nabla f(\hat{s}) \Delta \hat{s} + \frac{1}{8} \nabla^2 f(\hat{s}) (\Delta \hat{s})^2 + ERR \quad (44)$$

$$f(\hat{s} - \Delta \frac{1}{2} \hat{s})$$

$$= f(\hat{s}) - \frac{1}{2} \nabla f(\hat{s}) \Delta \hat{s} + \frac{1}{8} \nabla^2 f(\hat{s}) (\Delta \hat{s})^2 - ERR \quad (45)$$

여기서 중앙 차분식은 식(44)와 (45)의 형태가 모두 가능하다.

2차 항과 오차 ERR를 고려하지 않는다는 가정 하에서 다음 식과 같은 최적 설계변수 s 에 대한 목적함수 f 의 근사적인 수치적 민감도를 구할 수 있고 이들 중 선택적으로 사용할 수 있다.

① 전차 차분법 :

$$\nabla f(\hat{s}) \approx \frac{f(\hat{s} + \nabla \hat{s}) - f(\hat{s})}{\Delta \hat{s}} \quad (46)$$

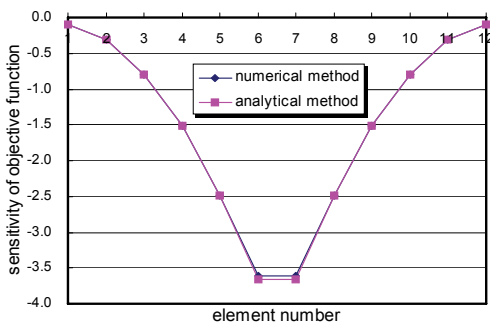


Fig. 3 목적함수의 민감도 해석에서 해석적 방법과 수치적 방법의 결과

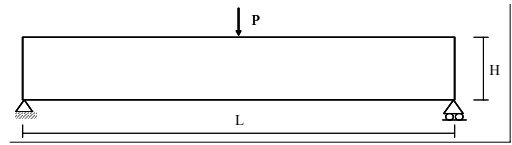


Fig. 2 해석 모델: MBB-Beam

② 후차 차분법 :

$$\nabla f(\hat{s}) \approx \frac{f(\hat{s}) - f(\hat{s} - \nabla \hat{s})}{\Delta \hat{s}} \quad (47)$$

③ 중앙 차분법 :

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{s}) &\approx \frac{f(\hat{s} + \frac{1}{2} \Delta \hat{s}) - f(\hat{s} - \frac{1}{2} \Delta \hat{s})}{\Delta \hat{s}} \\ &\approx \frac{f(\hat{s} + \Delta \hat{s}) - f(\hat{s} - \Delta \hat{s})}{2\Delta \hat{s}} \end{aligned} \quad (48)$$

3. 수치 예제

3.1 해석적 민감도법의 검증과 고찰

단순지지 하에 집중하중을 받는 간단한 MBB-보 구조물의 위상학적 최적 구조 모델링을 밀도분배법을 통하여 2장의 식(19)와 식(36)을 이용한 해석적인 방법과 식(48)의 중앙차분법을 이용한 수치적인 방법의 민감도 결과를 비교 분석하였다. 검증에 사용되는 단순보는 Fig. 2와 같이 정의된다.

구조물의 양쪽 끝 하단에 단순과 힌지 지지를 가지며, 중앙 상판에 집중하중 $P=1.0$ kN이 작용한다. 두께가 1m인 설계영역($L(12m) \times H(2m)$)의 연속체를

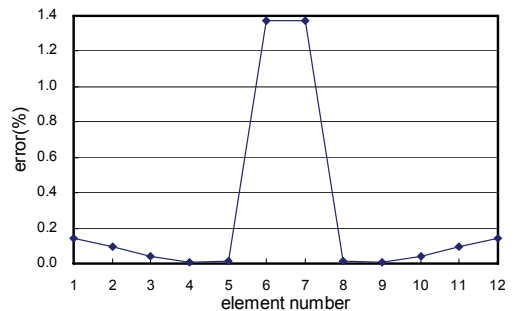


Fig. 4 목적함수의 민감도 해석에서 해석적 방법과 수치적 방법의 계산 오차

12×1의 4절점 정사각형 유한요소들로 이산화 하여 최적설계를 수행하였다. 사용된 재료들의 공칭 영계수 $E_0 = 2.1E+03 \text{ kN/cm}^2$, 프와송 비 $\nu = 0.3$, 공칭 재료밀도 $s = 0.3$ 를 사용한다.

목적함수는 최소 변형률 에너지이며, 부피 제약조건은 전체 설계영역의 $V_0 = 30\%$ 가 적용된다. 밀도분배법의 벌칙 계수는 $k = 2.5$ 이다. 여기서는 최적 설계 변수의 공칭 값에 대해 0.000333%를 변화시켜 수치적인 방법의 민감도를 계산하였다. 해석적인 방법과 수치적인 방법의 결과 비교는 Fig. 3과 Table 1에 도시되어 있다.

해석적 민감도법의 해는 수치적인 방법의 해와 비교하여 0.00609%~1.373% 수준의 미세한 오차를 나타내기 때문에, 해석적인 방법을 사용하는 민감도의 해는 수치적인 해와 거의 일치함을 알 수 있다. 따라서 2장에서 정의된 이산화법과 변분법에 의한 해석적 민감도 식의 신뢰성이 검증되었다.

그러나 구조물의 중앙부로 갈수록 오차는 줄어들다가 유한요소 5~8이 배치된 중앙부에서 오차가 증가한다. 이러한 현상은 요소의 경계조건과 하중조건에 기인한다. 즉, 요소 1과 12가 경계조건을 포함하고 있고, 요소 6과 7은 하중조건을 직접적으로 가지기 때문에, 이 요소들에서 수치적인 방법의 민감도 해는 정해와 오차가 커진다.

3.2 MBB-보 구조물의 위상학적 최적화

3.1장에 의해 해의 신뢰성이 증명된 이산화법에 의한 해석적 민감도 방법을 이용하여 3.2장에서는 실제적인 위상학적 최적 구조 모델링을 수행한다. 본 예제는 3.1장의 최적 설계조건을 만족하고, 설계영역을 240×40과 400×60의 유한요소들로 이산화한 재료 위상 최적화 문제이다.

본 연구에서는 CARAT 프로그램(University of Stuttgart, IBB연구소 개발)을 사용하여 수행하였다. 여기서 근사해석은 요구하는 설계변수의 최적 성능치로의 근사를 목표로 하며, 이를 위해 구조해석, 민감도해석, 최적화 툴의 반복 제어 프로그램과 연계된다. 이에 따른 위상 최적화의 해는 재료 밀도들의 최적 레

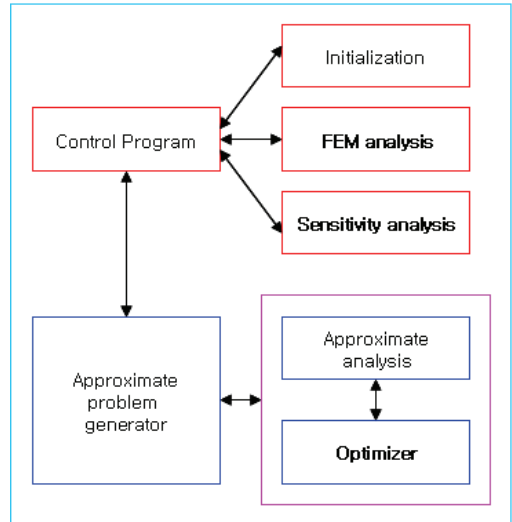


Fig. 5 최적설계 알고리즘(CARAT 프로그램)

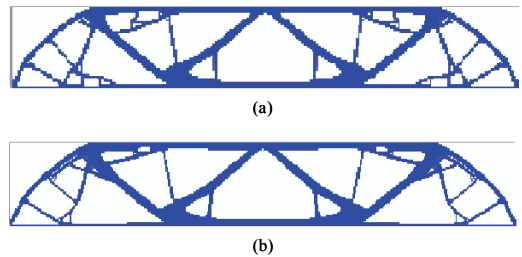


Fig. 6 재료 밀도 분포의 위상 최적해
(a) 240×40 유한요소 b) 400×60 유한요소

이어아웃으로 표현되며 Fig. 6과 같다. Fig. 6의 두 가지 결과는 위상최적설계를 통해 산출된 주어진 재료 하에서 가장 강성이 큰 최적위상을 나타낸다. 이산화 정도가 다르면 최적위상도 이에 의존해서 변화를 보여 주고 있는데, 이산화정도가 클수록 지그재그형의 재료 면이 약해지며 이상적인 해를 도출함을 나타내는데, 이는 Fig. 5의 최적해 알고리즘의 중간단계인 민감도 해석에서 유효한 해가 산출되었음을 증명한다고 할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 선형 탄성 구조물의 위상학적 최적 구조 모델링 시에 요구되는 목적함수의 민감도 식을

해석적인 방법인 이산화법과 변분법을 통하여 공식화하였다. 이 방법에 의한 민감도결과가 차분법과 같은 수치적 방법의 결과와 수치예제를 통하여 비교하여 유도된 해의 신뢰성을 검증하였다.

즉, Table 1의 수치예제 결과는 이산화가 적은 12개의 유한요소를 가지고 수행한 것으로서 실제 수치적 방법과 해석적 방법에 의해 나온 결과와의 오차는 크지 않았다. Table 1의 수치예제 결과는 유도한 해석적 방법에 의한 민감도식의 신뢰도를 알아보기 위한 것으로 이와 같이 수치적 해와 거의 유사함을 증명함으로써 해석적 방법에 의해 유도한 민감도식이 옳다는 것을 보여준다. 또한 본 연구에서는 공식화된 해석적 방법 중에 이산화법에 의한 민감도결과를 이용하여 이산화정도가 매우 큰 9,600과 24,000개의 유한요소들을 가지는 단순보의 위상 최적설계를 수행하여 그 범용성을 검증하였다. 본 연구에서는 다루어지지 않고 있지만, 요소수가 많아진다면, 구조응답 해는 정해로 점점 수렴할 것이고, 그리고 민감도해석 값 또한 정해와의 오차가 줄어들 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Haug, E.J., Choi, K.K., Komkov, V., "Design Sensitivity Analysis of Structural Systems", Academic Press, Orlando, New York, 1986.
2. Adelman, H.M., Haftka, R.T., "Sensitivity

Analysis of Discrete Structural Systems", AIAA Journal Vol. 24, No. 5, pp. 823-832, 1986.

3. Ha, Y.D., Kim W.J., Cho, S.H. "Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization Method applied to stiffener layout in hull structures", Journal of Ship Research, Vol. 50, No. 3, 2006, pp. 222-230.
4. Wang, S., Kang, J., "Topology Optimization of Nonlinear Magnetostatics", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No. 2, 2002, pp. 1029-1032.
5. Bendsøe, M.P., Kikuchi, N., "Generating Optimal Topologies in Optimal Design using a Homogenization Method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, 1988, pp.197-224.
6. Bendsøe, M.P., "Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem", Structural Optimization, Vol. 1, 1989, pp. 193-202.
7. Mlejnek, H.P., "Some Aspects of the Genesis of Structures", Structural Optimization, Vol. 5, 1992, pp. 64-69.
8. Yang, R., Chang, C., "Optimal Topology Design using Linear Programming", Computers and Structures, Vol. 52, 1994, pp. 265-275.

(접수일자 : 2007년 11월 5일)

(심사완료일자 : 2008년 11월 3일)