

반복 축 하중을 받는 트러스 요소의 탄소성 좌굴거동 해석기법에 관한 연구

Analytical Method for Elastoplastic Behavior of Truss element under Cyclic Axial Loading

백 기 열¹⁾

Baek, Ki Youl

요 약 : 트러스 구조는 단면의 효율이 높고, 단순하면서도 합리적인 형태로 사용될 수 있어 입체적인 대공간 구조의 지붕구조에 자주 사용되는 구조이지만, 구조물을 구성하는 부재의 수가 방대하며 세장하게 된다. 또한 구조물 전체의 거동은 개부재의 좌굴에 지배되는 경우가 대부분이므로 트러스 구조를 해석할 경우에는 개부재의 탄소성 좌굴거동 및 좌굴 후 거동을 고려하는 것이 필수적이다. 반복 축 하중을 받는 트러스 부재의 좌굴 후 거동을 해석하기 위해서는 일반적으로 보 요소를 이용한 요소분할 모델 및 소성힌지 모델이 사용되지만, 전체 구조물을 해석할 경우 계산 부하 및 불안정성이 증가하므로 유용한 방법이라고 할 수 없다. 본 연구에서는 트러스 부재의 탄소성 좌굴거동을 표현할 수 있는 해석기법의 개발을 목적으로, 열역학을 사용한 정식화를 통해 1개의 요소로 부재 전체의 거동을 표현 가능한 수치해석 기법을 유도한다. 제안모델은 부재의 요소 분할을 필요로 하지 않으므로 계산상의 효율성이 높은 모델이며 부재 중앙의 회전변위를 부재내력의 손상정도로 판단하여 좌굴 후 거동을 표현하는 데미지 모델 및 세장비가 작은 경우에 유용한 근사해석법 등을 제안한다. 또한 2종류의 제안모델 해석결과와 유한요소법의 분할모델 해석결과를 비교하여, 제안모델의 신뢰성을 검토하였다.

ABSTRACT : The post-buckling behavior of slender members, such as the chord of truss structures generally implies extreme strength degradation. The buckling strength is usually determined as the performance of the compressed steel members, so it is important to understand the exact buckling behavior of a member in order to design the entire structure. A target analytical model is usually divided by beam or shell element when we simulate the buckling behavior of a compressed steel member such as a truss member. In this case, it is possible to accurately obtain the behavior, but such would be expensive and would require experience in analysis even in monotonic loading. In this paper, we propose a consistent and convenient method to analyze the post-buckling behavior of elastoplastic compression members. The present methods are formulated to satisfy the second law of thermodynamics. Three numerical examples were tested to determine the validity of the proposed model in cyclic loading with comparable F.E.M results.

핵심용어 : 트러스 요소, 탄소성 좌굴, 좌굴 후 거동, 열역학, 수치해석

KEYWORDS : Truss element, Elasto-Plastic buckling, Post buckling behavior, Thermodynamics, Numerical analysis

1. 서론

대공간 구조를 형성하기 위한 구조시스템 중 하나로서 트러스 구조는 휨 부재에 비해서 단면의 효율이 높고, 단순하면서도 합리적인 형태로 사용될 수 있어 입체적인 대공간 구조를 형성하는 장점이 있다. 그러나 이러한 트러스 구조는 구조물을 구성하는 부재의 수가 방대하며 세장하게 설계되므로 구조

물 전체의 거동은 개부재의 좌굴에 지배되는 경우가 대부분이다. 따라서 트러스 구조의 거동을 파악하기 위해서는 개부재의 탄소성 좌굴거동을 고려하는 것이 필수적이라고 할 수 있다. 트러스 부재의 탄소성 좌굴거동은 양단 핀 접합 부재의 좌굴에 대한 연구가 주축을 이루고 있으며 다양한 기법이 제안되어왔다. 부재를 재축방향 및 단면 내에서 요소분할 하는 기법 및 소성힌지모델(Inoue 외, 1978; Tada 외, 1992)은

1) 교신저자, 정회원, CS구조엔지니어링, 연구원, 공학박사
(Tel. 02-3497-7810, Fax. 02-3497-7899 E-mail : cutty9@hotmail.com)

본 논문에 대한 토의를 2008년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

구조물 전체를 좌굴 해석하는 경우, 자유도 및 계산부하의 증가 및 부재의 소성영역 확장에 따른 내력산정이 명확치 않으므로 대규모 구조물의 해석에 적합한 방법이라고 할 수 없다.

이에 반해 Kato 등(1989, 1992)은 그림 1에 나타난 것과 같은 압축하중을 받는 특정 부재의 좌굴 후 거동(post buckling behavior) 및 복원력 특성을 함수로 설정하여 계산효율성을 높인 해석법을 제안하였으나 좌굴응력곡선을 이용한 근사해석법으로서 좌굴 후의 거동 및 소성일률 등에 관한 역학적 근거가 불분명하다. 또한 국내에서도 대공간 구조물의 탄소성 거동 및 좌굴 후 거동에 대한 연구가 활발히 진행 중이지만 대다수의 연구(이재홍 외, 2008)는 단순재하에 관한 연구로서 실제 지진하중과 같은 반복하중이 구조물에 작용할 경우에 대한 해석법도 필요할 것으로 사료된다.

이 논문은 반복 축 하중을 받는 트러스 부재의 탄소성 좌굴, 좌굴 후 거동 및 복원력 특성을 간단히 표현할 수 있는 해석 기법의 개발을 목적으로, 열역학 및 소성론을 사용한 정식화를 통해 1개의 부재를 1개의 요소로 표현 가능한 수치해석 기법을 유도하도록 한다. 데미지 모델(damage model) 및 근사해법 등, 2종류의 제안모델 해석결과와 유한요소법의 결과를 비교하여, 제안모델의 신뢰성을 검토하였다.

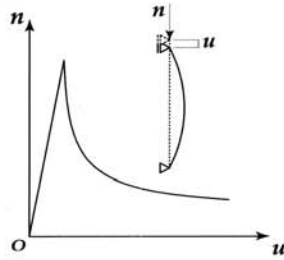


그림 1. 탄소성 좌굴 거동의 축력-축변위 관계

2. 탄소성 좌굴의 평가 및 정식화

그림 2에 나타난 것과 같이 중심 압축력을 받는 트러스 부재의 탄소성 좌굴 및 좌굴 후 거동을 표현하기 위한 해석기법에 대해서 기술하도록 한다. 본 논문에서는 트러스 부재의 강체변위는 고려하지 않는 것을 전제로 하며, 이에 따라 평면 트러스, 입체트러스와 같은 2차원, 3차원 문제와 상관없이 그림과 같은 단순 축 하중을 받는 1축 트러스 문제로 대상을 국한시킬 수 있다.

본 장에서는 먼저 트러스 부재의 탄소성 좌굴의 거동이 축력-축변위 및 모멘트-회전변위 관계에 미치는 영향을 소성론 및 열역학을 이용하여 직접적으로 구한 후에, 이를 바탕으로

트러스 부재의 변위 성분 중 회전변위를 손상함수로 하는 데미지 모델에 관한 정식화를 전개하도록 한다. 다음으로 비교적 세장비가 적은 경우를 대상으로 한 근사해석법에 대해서 설명하기로 한다.

2.1 기초식의 유도

그림 3과 같이 대상모델은 탄성봉 및 중앙절점의 탄소성 회전강성스프링으로 구성되며, 트러스 부재 자체는 축강성만을 가지는 것으로 한다. 탄성봉의 회전강성을 고려한 항복조건식은 다음과 같이 표현된다. 여기서 항복조건식은 축력과 모멘트로 표현되며, 부재가 탄성영역에서 외력에 저항할 수 있는 최대범위라고 할 수 있다.

$$\Phi(n, m) = \left(\frac{n}{n_y} \right)^2 + \frac{m}{|m|} \frac{m}{m_p} \leq 0 \quad (1)$$

여기서 n, m 은 스프링에 작용하는 축력 및 모멘트이며, n_y, m_p 는 각각의 성분에 대한 전소성 내력이다. 또한 항복조건식의 표현으로부터 알 수 있듯이 회전강성스프링은 항복 내력만을 고려하는 완전탄소성체로 가정한다.

대상모델의 자유에너지는 트러스 부재의 변위성분 및 각 성분에 대한 강성을 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\psi = \frac{1}{2} K_N \left(u - u^p + \frac{l}{2} \theta^2 \right)^2 + \frac{1}{2} K_M (\theta - \theta^p)^2 \quad (2)$$

위식에서 u, u^p 는 작용점에서의 축변위와 스프링의 소성화에 따른 축변위의 소성성분이며, θ 및 θ^p 는 회전변위 및 회전변위의 소성성분이다. 또한 K_N 및 K_M 은 봉의 축강성 및 스프링의 회전강성이며, l 은 부재의 길이이다.

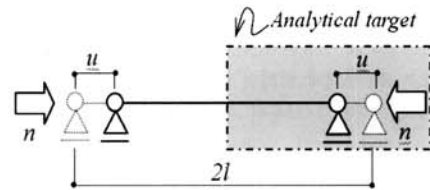
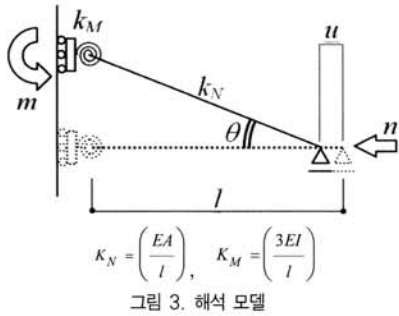


그림 2. 트러스 요소



다음으로 열역학을 이용한 축력 및 모멘트에 대한 탄성구성식을 유도하도록 한다. 구조역학적 문제에 열역학을 적용하는 것은 탄소성 문제를 취급함에 있어, 소성성분에 대한 역학적 의미를 명확하게 표현할 수 있기 때문이다 (백기열, 2007). 식 (2)의 자유에너지를 열역학 제2법칙으로 표현되는 클라우지우스 부등식(Clausius-Duhem inequality)에 대입하도록 한다.

$$-\dot{\psi} + n \cdot \dot{u} \geq 0 \quad (3)$$

위 식의 표현 중, (\dot{u}) 은 변화율 표기로서 미소구간에 있어서의 증분을 의미하며, 식 (2)를 식 (3)에 대입하면 다음과 같은 식이 된다.

$$-\dot{\psi} + n \cdot \dot{u} = \left\{ n - K_N \left(u - u^p + \frac{l}{2} \theta^2 \right)^2 \right\} \dot{u} \quad (4)$$

$$- \left\{ K_N \left(u - u^p + \frac{l}{2} \theta^2 \right)^2 l \theta + K_M (\theta - \theta^p) \right\} \dot{\theta} + \Gamma \geq 0$$

$$\Gamma = K_N \left(u - u^p + \frac{l}{2} \theta^2 \right) \dot{u}^p + K_M (\theta - \theta^p) \dot{\theta}^p \quad (5)$$

식 (4)가 임의의 변위성분 및 회전변위 성분에 대해서 성립하기 위한 조건 및 변위 성분의 값이 0이 아니라는 조건으로부터 다음의 관계가 얻어진다.

$$n = K_N \left(u - u^p + \frac{l}{2} \theta^2 \right) \quad (6-1)$$

$$nl\theta = -K_M (\theta - \theta^p) = -m \quad (6-2)$$

$$\Gamma = n\dot{u}^p + m\dot{\theta}^p \geq 0 \quad (6-3)$$

식 (6-1)은 축력과 축변위의 탄성구성식(elastic constitutive equation)이며, 식 (6-2)는 그림 3의 부재 중앙절점에서의 모멘트 평형방정식이다. 식 (6-3)은 회전강성스프링의 항복에 따라 발생하는 소성일률(plastic work rate)이다. 소성일률에 관한 식의 표현으로부터 에너지의 소산(dissipation, 消散)은 정(正)이거나 0이라는 것을 알 수 있으며, 이는 열역학 제2법칙을 만족한다. 또한 식으로부터 임의의 소성상태에 대한 독립적인 상태변수는 u^p 와 θ^p 가 되는 것을 알 수 있다.

다음으로 최대소성일의 원리(Drucker, 1950)를 도입하여, 회전강성스프링에 대한 항복 후의 소성흐름법칙(Plastic flow rule)을 구하도록 한다. 이것은 식 (1)의 부등호 제약조건을 만족하면서 동시에 식 (6-3)의 소성일률이 최대로 될 때의 조건을 구하는 것으로 다음의 라그랑지(lagrangian)를 고려하도록 한다.

$$L = -\Gamma + \Phi \dot{\gamma}^p = -n\dot{u}^p - m\dot{\theta}^p + \left\{ \left(\frac{n}{n_y} \right)^2 + \frac{m}{|m|} \frac{m}{m_p} - 1 \right\} \dot{\gamma}^p \quad (7)$$

위식에서 $\dot{\gamma}^p$ 은 미정계수이며, 축 변위 및 회전각의 소성성분의 크기에 해당하는 스칼라로서, 이 논문에서는 소성진전 파라메타(plastic consistency parameter)라고 부르도록 한다.

식 (7)에 대해 축력 및 모멘트를 독립변수로 하여 극값을 구함으로써 소성일률이 최대로 될 때의 관련소성흐름법칙(Associated flow rule)을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{u}^p = \frac{2n}{n_y} \dot{\gamma}^p \quad (8-1)$$

$$\dot{\theta}^p = \frac{m}{|m|} \frac{1}{m_p} \dot{\gamma}^p \quad (8-2)$$

상기의 축변위 및 회전변위의 소성성분을 적용한 식 (6)의 탄성구성식 및 모멘트 평형방정식의 증분형식은 다음과 같다.

$$\dot{n} = K_N \left(\dot{u} - \frac{2n}{n_y} \dot{\gamma}^p + l\theta\dot{\theta} \right) \quad (9-1)$$

$$\dot{m} = K_M \left(\dot{\theta} - \frac{m}{|m|} \frac{1}{m_p} \dot{\gamma}^p \right) \quad (9-2)$$

또한 식 (6-2), 모멘트 평형방정식을 축력과 모멘트 관계로 전미분 한 후에 식 (9)를 대입하면 다음과 같은 변위, 회전변위 및 소성진전 파라메타의 관계식을 얻을 수 있다.

$$n l \dot{\theta} + n l \dot{\theta} + \dot{m} = 0 \quad (10-1)$$

$$k_N l \dot{\theta} \dot{u} = \left(\frac{m}{|m|} \frac{1}{m_p} k_M + \frac{2n}{n_y^2} k_N l \theta \right) \dot{\gamma}^p - \left(k_M + n l + k_N l^2 \theta^2 \right) \dot{\theta} \quad (10-2)$$

다음으로 트러스 부재의 내력이 전소성 내력과 같아진 경우, 즉 식 (1)의 항복조건식이 0이 되는 경우에는 그 변화율 또한 0이 되므로 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\Phi = 0, \quad \dot{\Phi} = 0 \quad (11)$$

상기의 조건에 식 (9)를 대입하면, 식 (10)과 같이 변위, 회전변위 및 소성진전 파라메타의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{2n}{n_y^2} k_N \dot{u} = \left(\frac{1}{m_p^2} k_M + \frac{4n}{n_y^4} k_N \right) \dot{\gamma}^p - \left(\frac{m}{|m|} \frac{1}{m_p} k_M + \frac{2n}{n_y^2} k_N l \theta \right) \dot{\theta} \quad (12)$$

$$k_N l \dot{\theta} \dot{u} = \left(\frac{m}{|m|} \frac{1}{m_p} k_M + \frac{2n}{n_y^4} k_N l \theta \right) \dot{\gamma}^p - \left(k_M - n l + k_N l^2 \theta^2 \right) \dot{\theta} \quad (13)$$

식 (13)은 식 (6-2)의 모멘트 평형방정식의 변화율을 같은 방법으로 전개한 것이다.

이상과 같이 트러스 부재의 탄소성 좌굴에 관한 내력과 변위, 회전변위 및 소성진전 파라메타와의 상관관계를 열역학적 전개를 통해 직접적으로 유도하였다. 다음으로 지금까지의 기초식을 이용하여 트러스 부재의 변위성분 중, 회전변위성분을 손상의 정도로 판단하는 데미지 모델의 정식화 관해서 설명하도록 한다.

2.2 데미지 모델의 정식화

트러스 부재의 탄소성 좌굴에 의해 중앙절점에서 발생하는 회전변위에 대한 손상함수(damage function)를 다음과 같이 축변위를 독립적인 상태변수로 사용하여 정의하도록 한다.

$$\theta \equiv \theta(u) \quad (14)$$

위 식은 표현은, 손상정도로서의 회전변위는 축변위에 의존하는 것을 의미한다.

먼저, 회전변위로 표현되는 데미지 모델의 소성일률을 구하기 위해서 식 (6-3)에 식 (6-2)의 모멘트 식을 대입한다.

$$\Gamma = n \dot{u}^p + n l \dot{\theta}^p \geq 0 \quad (15)$$

다음으로, 식 (9-1)을 식 (9-2)에 대입하여 소성진전 파라메타를 소거하면, 회전변위의 소성성분은 축변위의 소성성분으로 나타나게 된다.

$$\dot{\theta}^p = \frac{n_y^2}{2|n|m_p} \dot{u}^p \quad (16)$$

위 식을 식 (15)의 소성일률 식에 대입하면,

$$\Gamma = n \left(1 + l \theta(u) \frac{n_y^2}{2|n|m_p} \right) \dot{u}^p \geq 0 \quad (17)$$

위 식의 형태로부터 다음과 같이 정의되는 변수를 도입한다.

$$\bar{n} = n \left(1 + l \theta(u) \frac{n_y^2}{2|n|m_p} \right) \quad (18)$$

\bar{n} 는 유효응력이라고 하며, 이 응력을 식 (14)에 대입하면 데미지 모델에 대한 소성일률이 다음과 같이 구해진다.

$$\Gamma = \bar{n} \dot{u}^p \geq 0 \quad (19)$$

위 식은 유효응력이 축변위의 소성성분에 대한 열역학적 힘에 상당(相當)한다는 것을 나타내며, 부재전체의 소성일률이 축변위 소성성분과 유효응력만으로 표현 가능하다는 것을 의미한다. 다음으로 상기의 유효응력에 대한 항복조건식을 구하기 위해 식 (1)의 항복조건식을 다음과 같이 변환한다. 식 (1)의 표현 중, 모멘트에 관한 항을 소거하기 위해, 식 (6-2)를 식 (1)에 대입한다.

$$\Phi(n, \theta) = \left(\frac{n}{n_y} \right)^2 + \frac{n}{|n|} \frac{n l \theta}{m_p} - 1 \leq 0 \quad (20)$$

위 식은 축력에 관한 2차방정식이므로, 위식을 풀어 식 (18)을 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\Phi^{pd}(\bar{n}, \bar{\sigma}) = \frac{|\bar{n}|}{n_y} - \bar{\sigma} \leq 0 \quad (21-1)$$

$$\bar{\sigma}(\theta) = \sqrt{1 + \frac{n_y^2 l^2 \theta(u)^2}{4 m_p^2}} \quad (21-2)$$

위 식의 표현이 유효응력에 대한 항복조건식이며, 데미지 모델에 대한 항복조건식 및 소성일률이 구해졌으므로, 소성흐름을 구하기 위해 최소소성일의 원리를 도입한다. 단, 식 (14)에서 기술한 바와 같이 회전변위는 축변위에 의해 결정되는 변수이므로 식 (21-2)는 정수로서 취급할 수 있으며, 따라서 (21-1)의 항복조건식은 유효응력만에 대한 함수로 나타낼 수 있다. 소성일률과 항복조건식에 대한 라그랑지안을 고려하면,

$$L = -\Gamma + \Phi^{pb}(\bar{n}) \lambda^p \quad (22)$$

위 식에서 λ^p 는 미정계수로서, 데미지 모델에 대한 소성진전 파라메타를 의미하며 이로부터 축변위의 소성성분에 대한 소성흐름법칙은 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{n}} = -\dot{u}^p + \frac{1}{n_y} \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \dot{\lambda}^p = 0 \quad (23-1)$$

$$\dot{u}^p = \frac{1}{n_y} \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \dot{\lambda}^p \quad (23-2)$$

다음으로 데미지 모델의 축력과 축변위 관계에 대한 접선강성을 유도하도록 한다. 먼저, 식 (11)에서 설명한 바와 같이 트러스 부재의 내력이 전소성 내력에 도달하게 되면, 식 (21-1)의 항복조건은 active가 되며, 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\Phi^{pb} = 0, \dot{\Phi}^{pb} = 0, \dot{\lambda}^p \geq 0 \quad (24)$$

위 식의 두 번째 조건식에 식 (20-1)을 대입하면 다음과 같다.

$$\dot{\Phi}^{pb} = \frac{1}{n_y} \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \dot{\bar{n}} - \dot{\bar{\sigma}} = 0 \quad (25)$$

유효응력에 대한 증분 즉, 변화율은 식 (6-1), 식 (18) 및 식(23-2)를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{\bar{n}} = \left\{ K_N - K_N l \theta \frac{d\theta(u)}{du} \right\} \dot{u} - \frac{1}{n_y} \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} K_N \dot{\lambda}^p \quad (26-1)$$

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left\{ K_N + \left(\frac{n}{|n|} \frac{n_y^2 l}{2 m_p} - k_N \theta(u) \right) \frac{d\theta(u)}{du} \right\} \dot{u} - \frac{1}{n_y} \frac{n}{|n|} K_N \dot{\lambda}^p \quad (26-2)$$

또한 식 (21-2)의 변화율은 (25)를 회전변위에 대해 미분함으로써 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{n_y^2 l^2 \theta(u)^2}{4 m_p^2 \bar{\sigma}} \frac{d\theta}{du} \dot{u} \quad (27)$$

위 식과 식 (26-2)를 유효응력에 대한 조건식, 식 (24)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}^{pb} &= \left(\frac{n_y^2 l}{2 m_p} - \frac{1}{n_y} \frac{n}{|n|} K_N l \theta(u) - \frac{n_y^2 l^2 \theta(u)}{4 m_p^2 \bar{\sigma}} \right) \dot{u} \\ &+ \left(\frac{1}{n_y} \frac{n}{|n|} K_N \right) \dot{u} - \frac{1}{n_y^2} K_N \dot{\lambda}^p = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

위 식을 소성진전 파라메타 $\dot{\lambda}^p$ 에 대해 정리하여, 식 (26-1)에 대입한다. 이때 항복조건식은 활성화(active) 상태이므로 식 (21-1)의 $\bar{\sigma}$ 는 $|n|/n_y$ 의 값이 된다.

$$\dot{\bar{n}} = -n \frac{n_y l}{2 m_p \bar{\sigma}} \frac{d\theta(u)}{du} \dot{u} = K^{pd} \dot{u} \quad (29)$$

위 식이 데미지 모델의 항복 후 거동, 즉 좌굴 후 거동에 대한 축력-축변위 관계의 접선강성이 된다. 다음으로 손상합수

$\theta(u)$ 의 변화율을 구하도록 한다.

함수 $\theta(u)$ 는 트러스 부재 중앙부의 스프링의 회전강성이 탄성 상태인 경우와 소성상태인 경우로 구분되며, 2장 1절에 구한 기초식들을 사용하여 탄소성상태에 대한 함수의 변화율을 구하도록 한다.

먼저, 탄성 상태에서 부재의 중앙절점에서 발생하는 회전변위는 식 (6-2)의 모멘트 평형방정식과만 관련되며, 식 (13)의 평형방정식의 변화율에서 소성진전 파라메타는 탄성상태에서 0이 된다. 식 (13)을 회전변위의 변화율로 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta_1}{du} = \frac{k_N l \theta}{k_M - nl + k_N l^2 \theta^2} \dot{u} \quad (30)$$

같은 방법으로, 소성상태에 대해서도 식 (12) 및 식(13)을 연립하여 풀면 손상함수의 소성상태에서의 변화율을 구할 수 있다.

$$\frac{d\theta_2}{du} = \frac{1}{l} \left(\frac{1 + \frac{n_y^2 l \theta}{2|n|m_p}}{2 + \frac{n_y^2 l \theta}{2|n|m_p}} \theta - \frac{n}{|n|} \left(\frac{n_y^2}{2m_p k_N} \frac{2m_p n + 2m_p n^2}{n_y^2 l} \right) \right) \quad (31)$$

다음으로 지금까지의 유도한 데미지 모델의 기초식을 이용한 수치해석 플로우에 대해 설명하도록 한다. 각 변수에 대한 해석순서는 기본적으로 return mapping algorithm. (Simo, 1987; Motoyui 외, 2007)과 동일하다. 상태(t)에서의 전체 회전변위, 축변위의 소성성분 및 소성회전변위와 상태(t+Δt)의 전체 변위는 기지량(known value)이다.

먼저 탄성예측자(elastic predictor)라고 하는 시행(trial) 계산을 하도록 한다. 이 계산단계에서는 소성변위의 증분이 발생하지 않는 것으로 가정하여 시행값을 계산한다.

$$\Delta u^p = 0, \quad \text{trial } u^p = {}^t u^p \quad (32)$$

현 단계는 증분구간이 탄성상태이므로, 상태(t+Δt)에서의 회전변위는 식 (30)을 이용하여 구할 수 있다.

$$\text{trial } \theta = {}^t \theta + \frac{d\theta_1}{du} \Delta u \quad (33)$$

위 식을 식 (6-1), 식 (18) 및 식 (21-2)에 대입함으로써 시행축력, 시행유효응력 및 시행유효항복조건을 구할 수 있다.

$$\text{trial } n = K_N \left({}^{t+\Delta t} u - \text{trial } u^p + \frac{l}{2} \text{trial } \theta^2 \right) \quad (34-1)$$

$$\text{trial } \bar{n} = \text{trial } n \left(1 + \frac{n_y^2}{2|\text{trial } n|m_p} \text{trial } \theta \right) \quad (34-2)$$

$$\text{trial } \bar{\sigma} = \sqrt{1 + \frac{n_y^2 l^2 \text{trial } \theta^2}{4m_p^2}} \quad (34-3)$$

위 식의 결과들을 이용하여 시행항복함수의 값을 계산한다.

$$\text{trial } \Phi^{pd} = \frac{|\text{trial } \bar{n}|}{n_y} - \text{trial } \bar{\sigma} \quad (35)$$

위 식이 값이 음의 값일 경우에는 식 (20)으로부터 알 수 있듯이 응력의 상태는 탄성상태이며, 위 식의 값이 양인 경우에는 소성부하가 진전되고 있음을 의미하므로 다음의 소성수정자(plastic corrector)단계의 계산을 실행하게 된다.

소성상태(t+Δt)에서의 회전변위는 식 (31)을 이용하여 구할 수 있다.

$${}^{t+\Delta t} \theta = {}^t \theta + \frac{d\theta_2}{du} \Delta u \quad (36)$$

$${}^{t+\Delta t} \bar{\sigma} = \sqrt{1 + \frac{n_y^2 l^2 ({}^{t+\Delta t} \theta)^2}{4m_p^2}} \quad (37)$$

탄성상태에서와 동일한 방법으로 각 변수의 (t+Δt)에서의 시행값을 항복함수에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \Phi^{pd} &= \left(\frac{|\text{trial } n|}{n_y} + \frac{n_y l^{t+\Delta t} \theta}{2m_p} - \frac{1}{n_y^2} K_N \Delta \lambda^p \right) - {}^{t+\Delta t} \bar{\sigma} \\ &= \text{trial } \Phi^{pd} - \frac{1}{n_y^2} K_N \Delta \lambda^p = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

위 식은 소성진전 파라메타 $\Delta \lambda^p$ 의 1차방정식이며, 위식에

서 구한 소성진전 파라메타를 사용하여 식 (16) 및 식 (23-2)의 소성회전변위 및 소성축변위의 증분을 구한 후에 각 제량(諸量)을 갱신한다. 이상과 같이 데미지 모델의 경우, 뉴턴 랩슨법과 같은 별도의 수렴계산을 필요로 하지 않으므로 트러스의 탄소성 좌굴 수치해석기법으로 매우 유용하다고 할 수 있다.

2.3 세장비가 작은 트러스의 근사해석법

세장비가 비교적 작은 트러스의 경우, 중앙절점의 회전변위는 부재 전단면이 항복한 상태, 즉 소성상태에서만 발생한다는 가정을 사용함으로써 전체적인 정식화의 간략화를 도모할 수 있는 장점이 있다.

먼저, 식 (15)의 소성일률에 대한 항복조건식을 식 (21)의 형태로 다음과 같이 정의한다.

$$\Phi^{pd}(n, \bar{\sigma}) = \frac{|n|}{n_y} - \bar{\tau}(\theta) \leq 0 \quad (39-1)$$

$$\bar{\tau}(\theta) = \bar{\sigma}(\theta) - \frac{n_y^2 l \theta}{2m_p} = \sqrt{1 + \frac{n_y^2 l^2 \theta^2}{4m_p^2}} - \frac{n_y^2 l \theta}{2m_p} \quad (39-2)$$

각 변위성분에 대한 소성흐름법칙을 유도하기 위해 앞에서와 동일한 방법으로 식 (39-1)을 제약조건으로 하는 다음의 라그랑지안을 도입한다.

$$L = -\Gamma + \Phi^{pb} \dot{\zeta}^p \\ = -n \dot{u}^p - n l \theta \dot{\theta}^p + \left(\frac{|n|}{n_y} - \sqrt{1 + \frac{n_y^2 l^2 \theta(u)^2}{4m_p^2}} + \frac{n_y^2 l \theta(u)}{2m_p} \right) \dot{\zeta}^p \quad (40)$$

또한 데미지 모델과는 달리 이 정식화에서는 회전변위 또한 독립적인 상태변수이므로 회전변위에 관해서도 위식을 미분할 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial n} = -\dot{u}^p - l \theta \dot{\theta}^p + \left(\frac{1}{n_y} \frac{|n|}{n} \right) \dot{\zeta}^p = 0 \quad (41-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -n l \dot{\theta}^p + \frac{n_y l}{2m_p} \left(1 - \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{n_y l \theta}{2m_p} \right) \dot{\zeta}^p = 0 \quad (41-2)$$

식 (41)의 연립방정식을 축변위 및 회전변위에 대해 풀면

다음과 같은 소성흐름법칙이 구해진다.

$$\dot{u}^p = \frac{2n}{n_y} \frac{1}{2\bar{\sigma}} \dot{\zeta}^p \quad (42-1)$$

$$\dot{\theta}^p = \frac{1}{m_p} \frac{|n|}{n} \frac{1}{2\bar{\sigma}} \dot{\zeta}^p \quad (42-2)$$

이 결과와 2장 1절의 식 (9)를 비교해 보면, 부재 내에 존재할 수 있는 최대내력을 직접적으로 나타낸 식 (1)의 항복조건에 대한 축변위 및 회전변위의 소성흐름법칙이 식 (39)를 항복조건으로 한 경우와 소성진전 파라메타의 표현이 서로 다른 것을 명확히 알 수 있다.

전술한바와 같이 이 정식화는 세장비가 작은 경우를 대상으로 하며, 이에 따라 회전변위는 소성성분만이 존재한다고 가정한다.

$$\theta \approx \theta^p \quad (43)$$

위 식의 조건 및 식 (16)의 관계를 이용함으로써 식 (17)의 소성일률을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma \cong n \left(1 + n_y \frac{n_y^2 l \theta^p}{2|n|m_p} \right) \dot{u}^p \geq 0 \quad (44)$$

위 식과 식 (41-1)의 형식을 고려하여 다음과 같은 유효소성변위를 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{u}^{pb} = \dot{u}^p + l \theta^p \dot{\theta}^p = \left(1 + n_y \frac{n_y^2 l \theta^p}{2|n|m_p} \right) \dot{u}^p \quad (45)$$

이 식을 식 (44)에 대입하면 이 정식화에 대한 소성일률을 구할 수 있다.

$$\Gamma = n \dot{u}^{pb} \geq 0 \quad (46)$$

위 식은 유효소성변위에 대한 열역학적 힘의 축력 n 인 것을 의미하며, 위의 소성일률에 대한 항복조건은 식 (39)의 회전변위를 소성성분으로 표기한 다음과 같다.

$$\Phi^{pb}(n, \bar{\tau}) = \frac{|n|}{n_y} - \bar{\tau} \leq 0 \quad (47-1)$$

$$\bar{\tau}(\theta) = \sqrt{1 + \frac{n_y^2 l^2 \theta^2}{4m_p^2}} - \frac{n_y^2 l \theta^p}{2m_p} \quad (47-2)$$

위의 항복조건식을 고찰해 보면 식 (47-2)가 항복응력의 범위를 결정하는 함수인 것을 알 수 있으며, 소성론에서의 등방경화법칙(isotropic hardening rule)과 유사한 형태임을 알 수 있다. 또한 식 (47-2)의 제 2항을 루트 안으로 정리하면, 그 값이 1이 되므로, 정식화에 있어 식 (43)의 조건을 만족하는 세장비가 작은 경우의 좌굴내력은 항상 항복내력과 같다는 것을 알 수 있다.

식 (47-2)의 등방경화법칙에 대한 변화율은 다음과 같다.

$$\dot{\bar{\tau}} = \frac{n_y l}{2m_p} \left(\frac{n_y l \theta^p}{2m_p \bar{\sigma}} - 1 \right) \frac{d\theta^p}{d\zeta^p} \dot{\zeta}^p \quad (48)$$

위 식에 식 (42-2)를 대입하면 등방경화계수가 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\zeta^p} = -\frac{|n|}{n} \frac{n_y l}{4m_p^2 \bar{\sigma}} \left(\frac{n_y l \theta^p}{2m_p \bar{\sigma}} - 1 \right) \quad (49)$$

위 식으로부터 본 정식화의 경화특성은 $n > 0$ (압축)의 경우에는 음의 값을, $n < 0$ (인장)의 경우에는 양의 값을 가지는 특성이 있음을 알 수 있다.

다음으로 근사해석법의 축력과 축변위 관계에 대한 접선강성을 유도하도록 한다. 전 절에서 설명한 바와 같이 트러스 부재의 내력이 전소성 내력에 도달하게 되면, 식 (44-1)의 항복조건은 active가 되며, 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$\Phi^{pb} = 0, \dot{\Phi}^{pb} = 0, \dot{\zeta}^p \geq 0 \quad (50)$$

위 식들 중, 제 2식에 식 (47)을 대입한다.

$$\Phi^{pb} = \frac{1}{n_y} \frac{|n|}{n} \dot{n} - \bar{\tau} = 0 \quad (51)$$

또한 축력 및 축변위 관계의 접선강성을 구하기 위한 축력

의 변화율은 유효소성변위를 사용하여 일반적인 탄성구성식의 형태로 표현할 수 있다.

$$\dot{n} = k_N (\dot{u} - \dot{u}^{pb}) = k_N \left(\dot{u} - \frac{1}{n_y} \frac{|n|}{n} \dot{\zeta}^p \right) \quad (52)$$

위 식과 식 (48)을 식 (51)에 대입하면 다음의 식이 된다.

$$\dot{\Phi}^{pb} = \frac{1}{N_y} \frac{|n|}{n} k_N \left(\dot{u} - \frac{1}{N_y} \frac{|n|}{n} \dot{\zeta}^p \right) + \frac{|n|}{n} \frac{n_y l}{4m_p^2 \bar{\sigma}} \left(1 - \frac{n_y l \theta^p}{2m_p \bar{\sigma}} \right) \dot{\zeta}^p = 0 \quad (53)$$

위 식을 소성진전 파라메타의 식으로 풀면 아래의 식과 같다.

$$\dot{\zeta}^p = \frac{1}{n_y} \frac{|n|}{n} \left(\frac{1}{n_y^2} k_N + \frac{nl}{(2m_p \bar{\sigma})^2} \right)^{-1} k_N \dot{u} \quad (54)$$

위 식을 식 (52)에 대입함으로써 정식화에 대한 접선강성에 관한 식이 다음과 같이 구해진다.

$$\dot{n} = -\frac{nl}{4 \left(\frac{m_p}{n_y} \right)^2 - \frac{nl}{k_N} + l^2 \theta^2} \dot{u} = k^{EPB} \dot{u} \quad (55)$$

위 정식화에 대한 수치해석상의 전개는 데미지 모델에서 사용한 통상의 return mapping algorithm과 동일하므로 설명을 생략하도록 한다.

3. 제안모델의 수치해석

3.1 해석모델

2장에서 유도한 데미지 모델과 근사해석법의 유효성을 검토하기 위해, 제안모델의 해석결과와 유한요소해석법의 결과를 비교하였다. 2장의 그림 2와 같은 트러스 부재에 반복 축 하중이 작용하는 경우를 대상으로, 탄소성 좌굴의 거동을 표현하기 위한 세장비 40, 60 및 80에 대해 해석을 하였다.

3종류에 대한 해석모델의 제원은 파이프 단면의 완전탄소성 체로서 단면적 1cm², 탄성계수 206GPa, 항복강도 235MPa를 모두 동일하게 적용하였으며, 세장비에 대한 부재의 유효

좌굴길이를 표 1에 나타냈다.

하중제하(loading)는 먼저 압축축 방향으로 재하가 시작되어 좌굴 및 좌굴 후 거동을 거친 후에 제하(unloading) 과정을 거쳐 인장축에서 다시 항복하는 정진폭의 형태로서 2½사이클까지 반복가력 하였다. 진폭의 크기는 좌굴하중에 대한 변위를 항복변위로 하여, 항복변위의 4배까지 변위 제어 하였다.

해석결과와 비교에 사용된 유한요소해석 프로그램의 유효성 및 정도(精度)를 파악하기 위해, 고유치해석결과로 얻은 탄성 좌굴하중과 이론좌굴하중의 비교결과를 표 1에 나타냈다. 좌굴 거동을 표현하기 위해 유한요소해석에서는 재축방향의 가우스 적분점이 2, 단면내의 뉴튼-코츠(Newton-Cotes) 적분점이 8인 보 요소(beam element)를 사용해 부재 길이 방향에 대해 10분할하였다. 하중제하방법으로는 세장비 40과 60의 경우에는 변위제어를, 비선형성이 강하게 나타나는 세장비 80의 경우에는 호장법(arc length method)을 사용하였다.

3.2 해석결과 및 고찰

그림 4~그림 6은 각 세장비에 대한 해석결과로부터 얻은 축응력-축변위 관계이다. 그림에서 열은 실선으로 표기한 것이 유한요소해석법(FEM)의 결과이며, 진한 실선은 데미지 모델(method1), 심볼로 표기한 것이 근사해법(method2)에 대한 해석결과이다. 그림에서 x축은 축변위를 항복변위로 무차원화 한 값이며, y축은 좌굴응력을 항복응력으로 무차원화 한 값이다.

표 1. 해석모델의 탄성좌굴하중

λ	l_k (cm)	P_{cr} (kN)	$P_{cal.}$ (kN)	$P_{cal.}/P_{cr}$
40	11.54	1.321	1.343	1.02
60	17.32	0.587	0.591	1.01
80	20.03	0.330	0.332	1.01

P_{cr} : 이론탄성좌굴하중, $P_{cal.}$: 고유치해석에 의한 탄성좌굴하중

그림으로부터 알 수 있듯이, 제안모델의 해석결과는 반복하중에 대한 탄소성 좌굴, 좌굴 후 거동 및 복원력 특성을 잘 나타내고 있다. 세장비가 작은 40의 경우에는 각 해석방법의 결과가 거의 일치하고 있으며, 세장비 60 및 80의 결과와 비교해 상대적으로 좌굴 후의 축력-축변위 관계의 기울기가 선형적인 것을 알 수 있다. 또한 본문에서 기술한 바와 같이 근사해석법의 좌굴응력은 항복응력과 같으며, 이러한 현상은 인장축에서 항복을 경험한 후, 다시 압축축에서 좌굴을 하는 경우에도 동일하게 나타나고 있다. 세장비 60의 경우, 유한요소

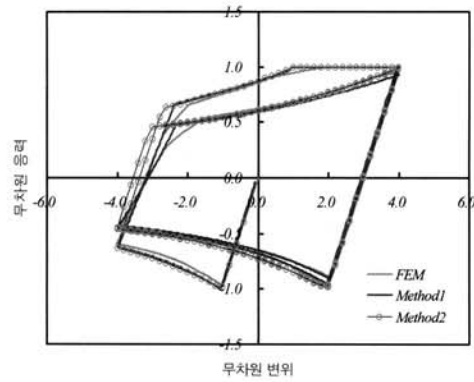


그림 4. 축응력-축변위 관계 (세장비 40)

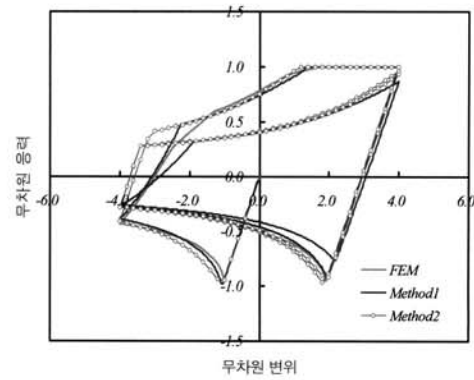


그림 5. 축응력-축변위 관계 (세장비 60)

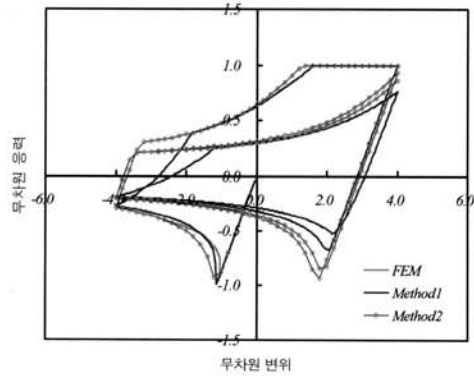


그림 6. 축응력-축변위 관계 (세장비 80)

해석결과와 데미지 모델의 해석결과는 서로 일치하고 있으며, 근사해석법의 결과는 첫 번째 사이클의 압축축 좌굴 후 거동까지는 두 방법의 결과와 잘 대응하고 있으나 제하과정을 거쳐 인장항복까지의 거동은 큰 차이가 있음을 알 수 있다.

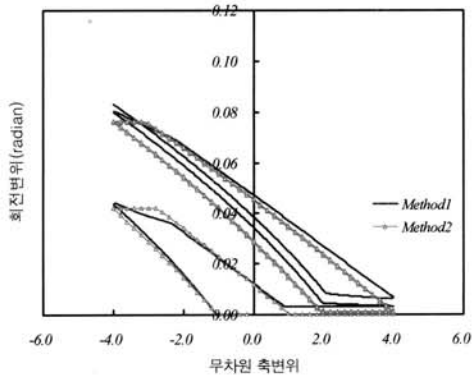


그림 7. 축변위-회전변위 관계 (세장비 40)

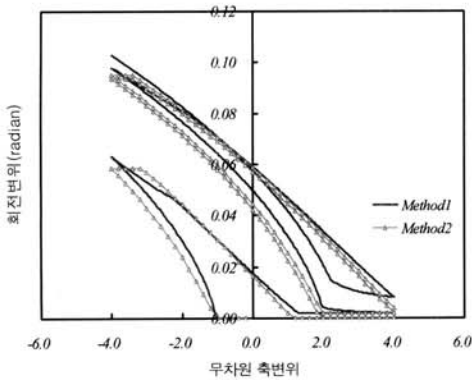


그림 8. 축변위-회전변위 관계 (세장비 60)

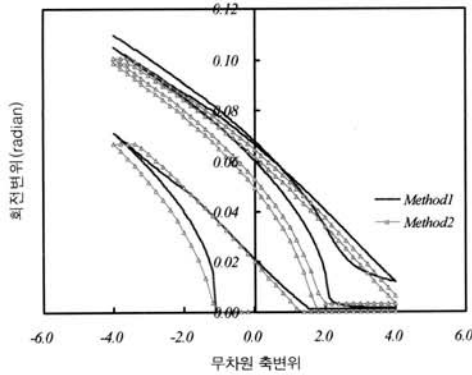


그림 9. 축변위-회전변위 관계 (세장비 80)

세장비 80의 경우, 유한요소해석은 일방향 재하(Monotonic Loading)만이 가능한 호장법을 사용한 관계로 1/2사이클까지만 해석이 가능했다. 데미지 모델의 결과는 유한요소법의 좌굴 후 거동과 거의 일치하며, 반복재하에 따른 내력의 저하

(Softening)현상을 명확하게 표현하고 있음을 알 수 있다. 근사해석법의 경우에는 좌굴 직후부터 두 결과와의 오차가 발생하기 시작하여 제하단계에서는 그 차이가 심해지는 것을 알 수 있다. 이것은 세장비가 증가함에 따라 전체 회전변위의 탄성성분 또한 증가하게 되므로, 근사해석법에서 사용한 가정이 유효하지 않는 것을 의미한다. 각 세장비에 따른 복원력 특성을 고찰해 보면, 근사해석법의 경우에는 압축축에서의 축응력-축변위 관계의 기울기와 좌굴 후 인장항복으로의 전이 단계에서의 기울기가 항상 같음을 알 수 있으며, 데미지 모델은 세장비의 증가에 따라 좌굴 후의 강성이 감소함을 알 수 있다. 이것은 회전성분을 손상지표로 하는 데미지 모델의 경우에는 이전단계의 회전변위 소성성분이 현 단계의 회전변위에 영향을 미치지 때문이다.

그림 7~그림 9는 각 세장비에 대한 축변위와 회전변위의 관계를 나타낸 것이며, 실선이 데미지 모델의 해석결과, 심볼이 근사해석법의 결과이다. 해석결과로부터 세장비가 증가함에 따라 최대변위에서의 회전변위 값이 커지는 것과 축변위에 대한 회전변위의 구배가 비선형성을 띄며, 데미지 모델과 근사해석법의 오차가 커지는 것을 알 수 있다. 특히 데미지 모델의 경우에는 재하가 반복됨에 따라 2사이클과 3사이클에서의 회전변위 값의 차이가 커지는 것을 확인할 수 있으며 이로부터 데미지 모델은 반복재하에 따른 내력의 저하현상이 표현 가능한 모델임을 알 수 있다. 또한 근사해석법의 경우에는 탄성범위에서 회전변위가 발생하지 않으므로 횡축과 평행한 구간이 존재하는 것을 알 수 있다.

4. 결론

이 논문은 반복 축 하중을 받는 트러스 부재의 탄소성 좌굴, 좌굴 후 거동 및 복원력 특성을 간단히 표현할 수 있는 해석기법의 개발을 목적으로, 열역학 및 소성론을 사용한 정식화를 통해 1개의 부재를 1개의 요소로 표현 가능한 수치해석 기법을 유도하였다. 데미지 모델 및 근사해법 등, 2종류의 제안모델 해석결과와 유한요소법의 결과를 비교하여, 제안모델의 신뢰성을 검토하였다. 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 중심 압축력을 받는 트러스 부재를 단순모델화 하여 열역학 제2법칙 및 최소소성일의 원리(principle of maximum plastic work)에 기초한 탄성구성식, 모멘트 평형방정식 및 소성일률의 표현으로부터, 이 연구의 제안모델은 일반적 소성론에 이론적으로 부합하는 탄소성 좌굴 역학모델임을 확인하였다.

- (2) 부재 중앙부의 회전변위를 손상함수(damage function)로 하여 부재내력의 탄소성 상태를 판단하는 데미지 모델의 경우, 소성성분의 증분이 회전변위 성분만으로 표현이 가능하며, 별도의 수렴계산을 필요치 않는 수치 해석적으로 우수한 모델인 점을 정식화를 통해 확인했다.
- (3) 부재의 전단면이 소성상태인 경우에 회전변위가 발생한다는 가정을 사용한 근사해석법은 탄소성 좌굴문제를 부재의 탄소성 문제로만 취급할 수 있으므로 정식화가 단순화될 수 있으며, 이 점을 항복조건식의 표현(등방성경화, isotropic hardening)을 통해 확인하였다.
- (4) 세장비 40, 60 및 80의 경우에 대해 제안모델과 유한요소법의 해석결과를 비교하여 제안모델의 유효성을 확인하였다. 결과로부터 데미지 모델은 트러스 부재의 탄소성 좌굴, 좌굴 후 거동 및 복원력 특성을 표현함에 있어 매우 유용한 기법이라 할 수 있으며, 근사해석법 또한 세장비가 작은 경우에 한하여 유용한 해석기법인 것을 확인하였다.

또한, 이 연구에서 제안한 해석기법을 기초로 하여 개재(個材)의 좌굴거동을 고려한 트러스 보 및 구조물 전체의 탄소성 거동 해석에 관한 연구를 추가적으로 발표할 예정이다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부 연구개발사업의 연구비지원 (과제번호# 06 건설핵심B03)에 의해 수행되었습니다.

참 고 문 헌

井上一浪, 小川厚治(1978) 鋼構造筋違い付多層骨組の塑性設計に関する研究, その2 塑性架構の單塑性応答性狀に関する考察, 日本建築學會構造系論文集, No. 268, pp. 87-98

多田元英(1992) 応力制限機構を挿入した2層立体トラスの載荷能力に関する研究, 日本建築學會構造系論文集, No. 433, pp. 103-112

加藤史郎, 石川浩宝一郎(1989) ピン接合單層ラチスドームの弾塑性座屈荷重について, 日本建築學會構造系論文集, No. 404, pp. 105-114

Drucker, D.C.(1950) Some implications of work-hardening and ideal plasticity, *J. Appl. Mech.* Vol.7, pp. 411-418

Simo, J.C., Ju, J.W.(1987) Strain and stress baesed continuum damage models I : formulation, *Int. J. Solid Struct.* Vol 23, No. 7, pp. 821-840

元結正次浪, 白奇烈(2007) 完全彈塑性体から成るサブレイヤーモデルの1軸心力場に対する巨視的評價 手法, 日本建築學會構造系論文集, No. 611, pp. 87-94

石川 博將 (2000) 個体の非線形力學, 養賢堂

백기열(2007), 변형률 경화를 고려한 오버레이 모델의 재료비선형 수치해석기법, 한국강구조학회 논문집, 제19권 3호, pp. 291-301

김광중, 백기열, 이재홍(2008) 호강법을 이용한 평면트러스 구조의 비탄성 비선형 해석, 한국공간구조학회논문집, 제 8권 1호, pp. 41-48

(접수일자 : 2008. 3. 15 / 심사일 2008. 4. 4 / 게재확정일 2008. 5. 25)