

불확실한 공정과 불량품 처리체계를 포함하는 공정-저장조 망 최적설계

이경범[†] · 이의수*

부경대학교 화학공학과
608-739 부산광역시 남구 용당동 산 100
*동국대학교 화공생물공학과
100-715 서울시 중구 필동3가 26
(2007년 12월 5일 접수, 2008년 2월 5일 채택)

Optimal Design of Batch-Storage Network Including Uncertainty and Waste Treatment Processes

Gyeongbeom Yi[†] and Euy-Soo Lee*

Department of Chemical Engineering, Pukyong National University, San 100 Yongdang-Dong Nam-Gu, Busan 608-739, Korea
**Department of Chemical and Biochemical Engineering, Dongguk University, 3 Ga 26 Pil-Dong Jung-Gu, Seoul 100-715, Korea*
(Received 5 December 2007; accepted 5 February 2008)

요 약

본 연구의 목적은 가동 시간과 생산량에 있어서 무작위 변동을 일으키는 공정 시스템에서 최종 제품의 수요를 만족하는 공정-저장조 망구조의 최적용량을 결정하는 문제의 해석적인 해를 유도하는 것이다. 여기서 논의되는 공장의 구조는 회분식 공정과 저장조가 병렬 또는 직렬로 연결된 망구조를 구성하고 있다. 생산공정은 다수의 원료물질을 다수의 제품으로 일정 비율로 전환한다. 최종제품의 수요는 주문주기와 물량이 무작위 변동을 일으킨다. 일부 생산공정은 생산량에 있어서 무작위 변동을 일으키며, 오염된 물질은 재생공정이나 폐기과정을 거쳐서 처리된다. 다른 공정들은 모두 가동시간이 무작위로 변한다. 최적화의 목적함수는 총비용을 최소화하는 것인데, 여기서 총비용은 준비비와 재고 유지비 그리고 공정과 저장조의 자본비용으로 구성되어 있다. 새로운 생산 재고 분석도구인 사각파 모형은 무작위 흐름의 상한값과 하한값을 계산하는 도형적 방법을 제공한다. 이 모형의 장점은 공정과 저장조 사이의 무작위 흐름을 사실적으로 묘사하면서도 간단한 해석적인 해를 제공하는데 있다. 결과적으로 계산량이 획기적으로 줄어든다.

Abstract – The aim of this study was to find an analytic solution to the problem of determining the optimal capacity (lot-size) of a batch-storage network to meet demand for a finished product in a system undergoing random failures of operating time and/or batch material. The superstructure of the plant considered here consists of a network of serially and/or parallel interlinked batch processes and storage units. The production processes transform a set of feedstock materials into another set of products with constant conversion factors. The final product demand flow is susceptible to short-term random variations in the cycle time and batch size as well as long-term variations in the average trend. Some of the production processes have random variations in product quantity. The spoiled materials are treated through regeneration or waste disposal processes. All other processes have random variations only in the cycle time. The objective function of the optimization is minimizing the total cost, which is composed of setup and inventory holding costs as well as the capital costs of constructing processes and storage units. A novel production and inventory analysis, the PSW (Periodic Square Wave) model, provides a judicious graphical method to find the upper and lower bounds of random flows. The advantage of this model is that it provides a set of simple analytic solutions while also maintaining a realistic description of the random material flows between processes and storage units; as a consequence of these analytic solutions, the computation burden is significantly reduced.

Key words: Optimal Design, Batch-Storage Network, Periodic, Random Failures, Waste Treatment

1. 서 론

공급 사슬망 최적화에 있어서 중요한 문제 중의 하나가 불확실성을 취급하는 일이다. 사업의 불확실성의 근원을 살펴보면 주로

미래의 수요예측, 생산시설의 고장, 품질규격 미달, 원료나 완제품의 가격변동과 원료공급부족 등에 걸쳐 나타난다[1]. 수요예측에 있어서 불확실성의 유형을 살펴보면 장기적인 추세성, 중기적인 계절성과 단기적인 무작위성을 들 수 있다. 중장기적인 추세나 계절성은 변화에 대응할 시간적 여유가 어느정도 있으므로 무엇보다도 정확한 예측이 선행되어야 할 것이다. 그러나 단기적인 무작위성

[†]To whom correspondence should be addressed.
E-mail: gbyi@pknu.ac.kr

은 직접적인 예측과 대응은 불가능하고 확률적 특성을 고려하여 효과적인 재고관리 정책을 전개해야 한다. 따라서 수요예측의 불확실성의 증가는 보통 안전재고량의 증가로 이어진다[2]. 생산공정의 불확실성은 일반적으로 단기적이며 무작위적이다. 장치의 오작동을 극소화하기 위해서는 성능을 유지보수하는 효과적인 관리체계가 병행되어야 하며, 품질규격 미달인 불량품의 처리 방안도 마련되어야 한다. 일반적으로 불량품의 처리 방안에는 폐기, 재생, 고품질 제품과 희석과 저가품으로 판매 등의 방법이 동원된다. 정유 공장에서는 각 장치에서 새어나오는 누유유분을 slop oil 이라 부르며 따로 회수하여 원유저장조로 보내 희석시킨다. 고분자 공정에서는 생산제품 변동시 많은 규격미달 제품이 나오는데 완제품에 섞어서 희석시키거나 저가품으로 판매한다. 원료공급의 불확실성을 해소하기 위해서는 수입선 다변화와 선물거래 등의 기법이 동원될 수 있다[3].

Sahinidis[4]는 공정 시스템분야에서 발표된 불확실성을 고려한 최적화 기술에 관하여 회고논문을 발표하였다. 불확실성 하에서의 공급 사슬망 최적화에 관한 연구는 공정 시스템 분야에서 많은 관심을 받았다. Petkov 와 Maranas[5]는 이들을 크게 세가지로 분류하였는데, 시나리오 기반 접근법, 유연성 지수를 이용한 불확실성의 계량화와 Monte Carlo sampling 을 이용한 근사법이 이에 해당한다. 이러한 방법들의 공통적인 결점은 계산량의 과도한 증가로 인해 실질적인 문제를 풀기가 어렵다는 점이다. 이러한 점을 개선하기 위하여 Petkov 와 Maranas[6]는 수요예측의 불확실성이 정규분포라는 가정하에 모형의 변형을 통하여 계산량을 적정수준으로 줄이는 convex MINLP 모형을 제시하였다. Balasubramanian 와 Grossmann[7]은 불확실성의 분포도를 정확히 알 수 없을 경우에 대하여 Fuzzy 이론을 이용한 최적화 방법을 제시하였다. 이외에도 Lin et al.[8]는 불확실한 매개변수의 한계값을 알고 있는 선형 문제에 대해 적용할 수 있는 convex MINLP 모형을 제시하였고, Yin et al.[9]는 Markov 연쇄를 이용한 동적 최적화 문제의 해인 Hamilton-Jacobi-Bellman 식을 단계적으로 푸는 준최적 방법을 제시하였다. 이러한 모든 노력들은 궁극적으로 결정적 모형에 비해 불확실성을 고려한 모형의 해를 구하기 위해서 지불해야 하는 계산량 증가를 현실적인 수준으로 줄이기 위한 노력의 일환이다. 불확실성을 다루는 문제는 미래를 위한 학계의 연구과제일 뿐만 아니라 지금 현장에서 진행되고 있는 현실의 문제이다. Moyle 와 Mitchell[10]는 FMEA(Failure Modes and Effects Analysis) 라는 기법을 이용하여 공정의 신뢰도를 평가하는 현장기술을 소개하고 있다. 여기서 사용된 방법은 불확실성에 대한 독특한 정의와 간단한 수식들로 이루어져 있다. 고도의 수학적 기법을 사용하지 않고 계산량의 부담이 전혀 없으면서도 불확실성을 효과적으로 다루고 있음을 볼 때 우리는 새로운 연구방향이 필요함을 느낄 수 있다. 본 연구에서도 불확실성에 대한 독창적인 모형을 이용하여 FMEA 기법에 비교해도 뒤지지않을 만큼 계산량의 증가에 대한 부담이 없는 최적화 모형의 간단한 해석적인 해를 유도하고자 한다.

본 연구에서는 공정과 저장조의 임의의 망구조를 대상으로 수학적 모형을 전개할 것이다. 여기서 공정은 원료구매, 생산, 수송 및 완제품 수요를 포함하는데, 본 연구에서는 폐기물 처리 공정이 추가되었다. 공정에서 발생한 불량품은 폐기되거나 재생되어 다시 원료로 활용될 수 있으며, 각각의 처리경로의 경제성에 따라 선택되어진다. 본 연구에서 공정은 세가지 유형으로 분류된다. 첫째 유

형은 불확실성이 공정의 운전시간에만 존재하는 것으로서, 원료구매, 수송 그리고 생산공정의 일부가 이 범주에 속한다. 둘째 유형은 생산공정에만 존재하는 것으로서, 공정의 오작동에 의해 불량품이 발생하여 생산 물량의 변동이 발생하는 경우이다. 따라서 폐기물 처리공정과 밀접히 연관되어 있다. 셋째 유형은 완제품 수요 공정이다. 고객이 의한 완제품 주문이 배달 시간과 물량으로 이루어져 있다고 볼 때 불확실성은 시간과 물량의 예측값과 실제값 차이에 의해 발생한다. 다른 공정들도 시간과 물량에 있어서 동시에 불확실성이 존재하지만 본 연구에서는 연구의 난이도와 공정 특성을 감안하여 시간과 물량의 동시 변화는 제외되었다.

본 연구에서는 완제품의 수요의 변이를 장기적인 추세와 단기적인 무작위 변화로 구분하여 처리할 것이다. 중기적인 계절성은 경우에 따라 장기적인 추세로 고려될 수도 있고 본 연구에서 사용하는 사각과 모형의 주기적인 특성을 이용할 수도 있다. 장기적인 추세는 월에서 년 단위로 수요량을 평균한 값으로서 비교적 정확히 예측 가능하고, 예측의 부정확성을 수정할 시간적 여유가 있는 변화를 나타낸다. 단기적 무작위 변화는 시, 일 또는 주 단위로 발생하는 평균이 장기적인 수요예측값에 해당하는 변화로서 직접적인 대응은 시간적으로 불가능하고 효율적인 재고관리나 시스템 설계를 통해 대처해야 한다. 본 연구에서는 유용도라는 개념을 모든 공정에 일괄적으로 도입하여 여러가지 공정에서 발생하는 다양한 불확실성을 통일된 모형으로 처리하였다. 일반적으로 무작위 변화를 처리하는 과정을 최적화 모형에 도입할 경우 수치해석적인 난이도의 증가로 인해 계산량이 기하급수적으로 늘어나는 단점이 있다. 그러나 본 연구에서는 Yi 와 Reklaitis[11]에서 소개된 사각과 모형을 사용함으로써 무작위 변화를 반영하는 최적화 모형의 해가 주어질 유용도에 대한 간단한 해석적인 수식으로 유도되므로 계산량의 부담이 없다.

2. 최적화 모형의 정의

본연구의 매개변수와 변수들은 결정적 모형 Yi 와 Reklaitis[11]에서 정의된 것들을 대부분 차용한다. 원료물질을 여러단계의 물리화학적 공정을 거쳐서 최종제품으로 전환하는 화학공장은 저장조 집합 (J)와 회분식 공정 집합 (I)로 구성되어 있다. 저장조 목록부호 $j \in J$ 는 상점자로, 공정 $i \in I$ 는 하점자로 되어 있다. 한 저장조는 한개의 물질만 저장하므로 저장조 목록부호 j 는 물질 목록부호와 일치한다. 수송공정은 회분식 공정의 하나로 고려된다. 각 저장조는 다섯 형태의 물질 이동과 연결되어 있다. 즉 원료공급자 ($k \in K(j)$)로부터 구매, 고객($m \in M(j)$)에 대한 출하, 폐기물 처리 공정($n \in N(j)$)으로 배출, 생산공정에 투입과 생산공정으로부터 배출이다.

여기서 무작위 고장과 관련된 세가지 유형의 공정에 대해 고려해 보자. Fig. 1은 물질의 손실이나 공정용량의 변동은 없지만 무작위 가동시간 손실 또는 가동중단시간의 무작위 증가를 내포하는 제 1 유형 공정의 흐름을 나타낸다. Fig. 2는 제 2 유형의 공정의 전형적인 구조를 나타내고, Fig. 3는 그 흐름을 나타낸다. 제 2 유형의 공정은 물질손실을 포함하는데 오염된 물질은 재생공정이나 폐기물 처리공정을 거치게 된다. 제 3 유형의 공정은 무작위 가동시간 손실과 물질손실을 모두 포함한다. 제 2 유형의 공정에서 실패한 작업은 원료물질의 손실 뿐만 아니라 공정 가동주기에 해당

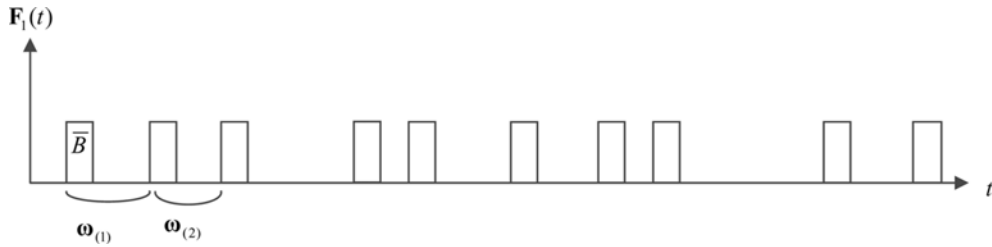


Fig. 1. Flow of Type 1 Process.

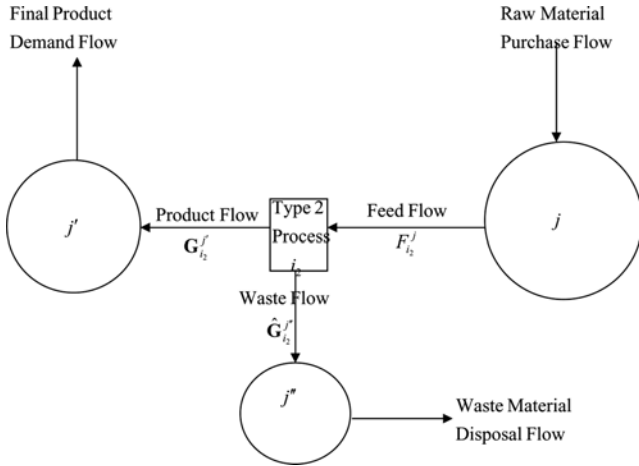


Fig. 2. Schematic Diagram of Type 2 Process.

하는 작업시간의 손실도 수반한다. 본 연구에서는 복잡한 논의를 피하기 위해 제 1 유형 공정의 공정 용량과 제 2 유형의 공정의 가동주기가 미지수이지만 무작위 변수가 아니라고 가정한다. 현대 사회에 있어서 원료구매나 수송공정과 관련하여 물질의 손실은 매우 일어나기 어렵다. 따라서 이러한 공정들은 본 연구에서 제 1 유형의 공정들로 분류될 것이다. 생산공정은 제 1 유형이거나 제 2 유형중 하나이다. 배합공정은 물질 손실을 수반하지 않기 때문에 제 1 유형으로 고려된다. 그러나 많은 화학반응 공정에서는 물질의 손실을 수반하므로 제 2 유형의 공정으로 간주될 것이다. 본연구에서는 제 1 유형의 공정의 원소와 집합을 $i_1 \in I_1$ 로 나타내고 제 1 유형의 생산공정 관련한 변수나 매개변수들은 하첨자 i_1 를 가질 것이다. 제 2 유형의 생산공정의 원소와 집합을 $i_2 \in I_2$ 로 나타내고 관련변수나 매개변수들은 하첨자 i_2 로 표기할 것이다. 각 생산공정은 다수의 일정한 원료조성 $f_{i_1}^j$ 이나 $f_{i_2}^j$ 를 가지며, 일정한 수율 $g_{i_1}^j$ 또는 $g_{i_2}^j$ 를 가지고 다수의 제품을 생산한다. 제 2 유형의 공정에서, 실패한 작업에서 수율 $\hat{g}_{i_2}^j$ 에 따라 나오는 오염된 물질은 제품과 다른 저장조에 저장된다. 제품수율과 폐기물 수율 사이에는 $g_{i_2}^j \hat{g}_{i_2}^j = 0$ 이다.

고장이 없을 때 공정에서 저장조로 또는 저장조에서 공정으로의 물질 흐름은 사각파 모형에 의해 표현된다[11]. 각 생산공정은 매 생산주기 ω_i 마다 한 작업을 수행한다. 생산공정의 주기는 원료 투입시간 ($x_i \omega_i$) 공정 가동시간 ($[1-x_i-x_i'] \omega_i$)과 제품 배출시간 ($x_i' \omega_i$) 으로 구성되어 있다. 여기서 변수의 좌측 따옴표는 변수가 생산공정의 원료 투입과 관련되어 있고 우측 따옴표는 생산공정의 제품배출과 관련되어 있다는 것을 나타낸다. 공정시작시간은 t_i (또는 t_i') 로 나타낸다. 따라서 생산공정에 대한 결정적 사각파 모형은 4 개의 변수 즉 공정용량 B_p , 생산 주기 ω_p , 저장조 운전 시간 분율 x_i

(또는 x_i') 과 공정 시작시간 t_i (또는 t_i') 으로 구성되어 있다. 원료구매, 폐기물 처리 및 최종제품 수요에 대한 결정적인 물질흐름도 4 개의 변수 $B_k^j, \omega_k^j, x_k^j, t_k^j$, $B_m^j, \omega_m^j, x_m^j, t_m^j$ 와 $B_n^j, \omega_n^j, x_n^j, t_n^j$ 에 의해 각각 나타내어진다. 이중 $\omega_i, \omega_k^j, \omega_m^j, \omega_n^j$ 와 B_i 는 무작위 변수로 고려되어 질 것이다. 발표의 편리를 위해 상첨자, 하첨자가 없 B, ω 는 변수 x 는 구매 생산 수요에 있어서 임의의 공정의 용량이나 주기, 저장조 운전시간 분율을 나타낸다. 유형 1의 공정의 생산주기는 무작위 변수로서 굵은 $\omega_{(l)}$ 로 나타내어지는데, 여기서 (l) 은 Fig. 1에서 나타나 있듯이 생산순서이다. $\omega_{(l)}$ 는 (l) 에 대하여 균일 독립 분포함수를 가지고 있다고 가정한다. $\bar{\omega}$ 는 $\omega_{(l)}$ 의 평균이고, \bar{B} 는 평균공정 용량으로서 둘다 미지수이다. 주어진 수렴한계 $0 < \epsilon_1 < 1$ 와 신뢰수준 $0 < \delta_1 < 1$ 에 대하여, 대수의 약한 법칙은

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \omega_{(l)} - \bar{\omega}\right| < \epsilon_1\right) \geq 1 - \delta_1$$

를 만족하는 정수 n 가 있음을 나타낸다. Tchebycheff 부등식으로 부터 $n \geq \text{Var}(\omega) / \delta_1 \epsilon_1^2$ 인데, 여기서 최소의 정수가 선택되면 $n = \text{int}[\text{Var}(\omega) / \delta_1 \epsilon_1^2] + 1$ [12]. $\underline{\omega}$ 가 $\underline{\omega} \leq \omega_{(l)}$ 를 만족하는 실제 가동 시간으로 정의하면, $\underline{\omega} = \alpha \bar{\omega}$ 인데, 여기서 유용성 α :

$$\alpha_i \equiv \frac{\text{가동시간}}{\text{가동시간} + \text{가동중지시간}} \quad \text{제 1 유형의 공정에 대하여,}$$

$$\alpha_{i_2} \equiv \frac{\text{규격품 생산량}}{\text{총 원료 투입량}} \quad \text{제 2 유형의 공정에 대하여} \quad (1)$$

생산공정의 유용성은 보통 FMEA 분석에서 다음 식에 의해 측정된다[10].

$$\alpha \equiv 1 - \frac{\sum_{\text{all failure modes}} (\text{Likelihood})(\text{Time to Repair})}{\text{Mean Time Between Failures}} \quad (2)$$

제 2 유형의 공정주기는 결정적이라는 가정으로부터 $\omega_{i_2} \equiv \bar{\omega}_{i_2}$. 제 2 유형의 생산공정의 투입흐름은 불확실성이 없다고 가정하여 결정적인 생산주기 $\bar{\omega}_{i_2}$ 와 공정용량 \bar{B}_{i_2} 를 갖는다. 그러나 제 2 유형의 생산공정의 배출흐름의 공정용량은 무작위이다. 공정처리로 인하여 물질의 밀도가 변하지 않는다고 가정하자. 성공적으로 생산된 규격품 $B'_{i_2(t)}$ 는 제품저장조로 간다. 실패한 불량품 $\bar{B}_{i_2} - B'_{i_2(t)}$ 는 Fig. 3에 나타난 것처럼 폐기물 저장조로 간다. 제 2 유형의 생산공정의 유용성은 충분히 많은 작업횟수 $n_{i_2} = \text{int}[\text{Var}(B_{i_2}) / \delta_1 \epsilon_1^2]$ 에 대해 원료투입량에 대한 규격품 생산량의 비로 나타낸다. 수학적 표현으로 규격품 생산량 $B'_{i_2(t)} \leq \bar{B}_{i_2}$ 는 제 2 유형의 공정에 대해

$$P\left(\left|\frac{1}{n_{i_2}} \sum_{l=1}^{n_{i_2}} B_{i_2(t)} - \alpha_{i_2} \bar{B}_{i_2}\right| < \epsilon_1\right) \geq 1 - \delta_1$$

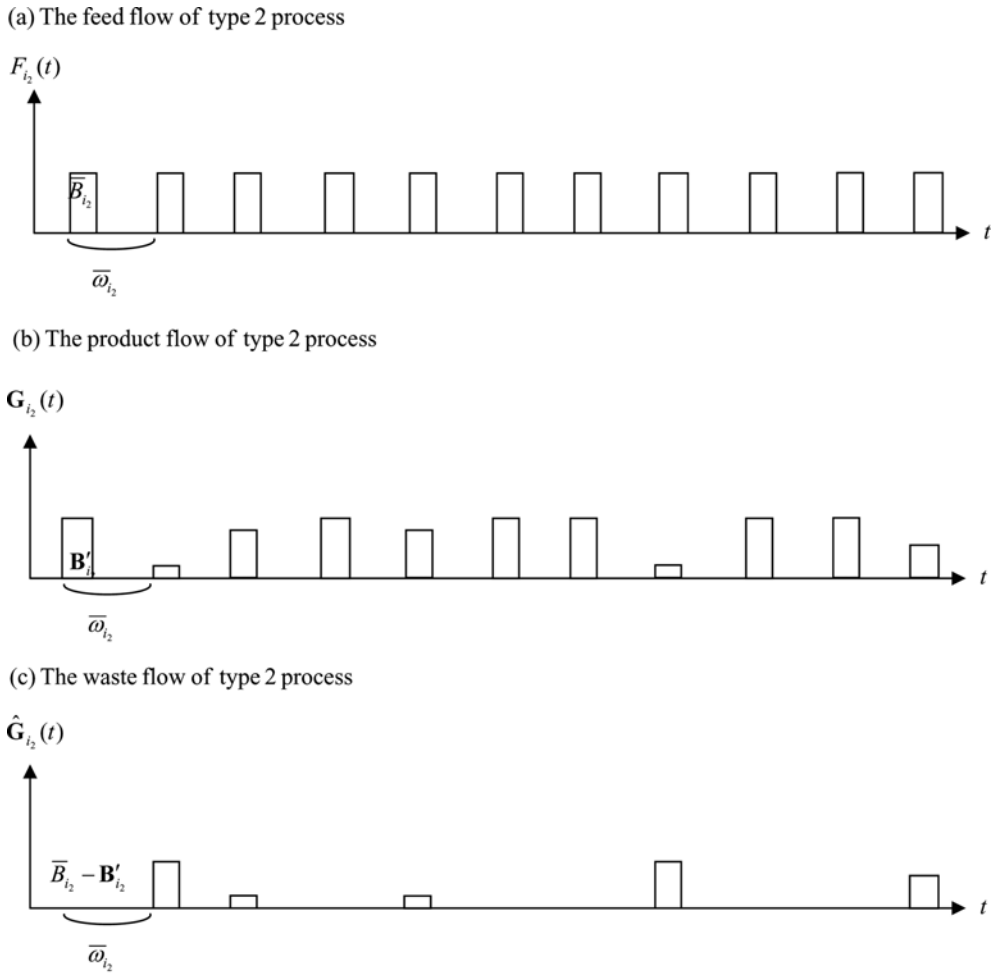


Fig. 3. Flow of Type 2 Process.

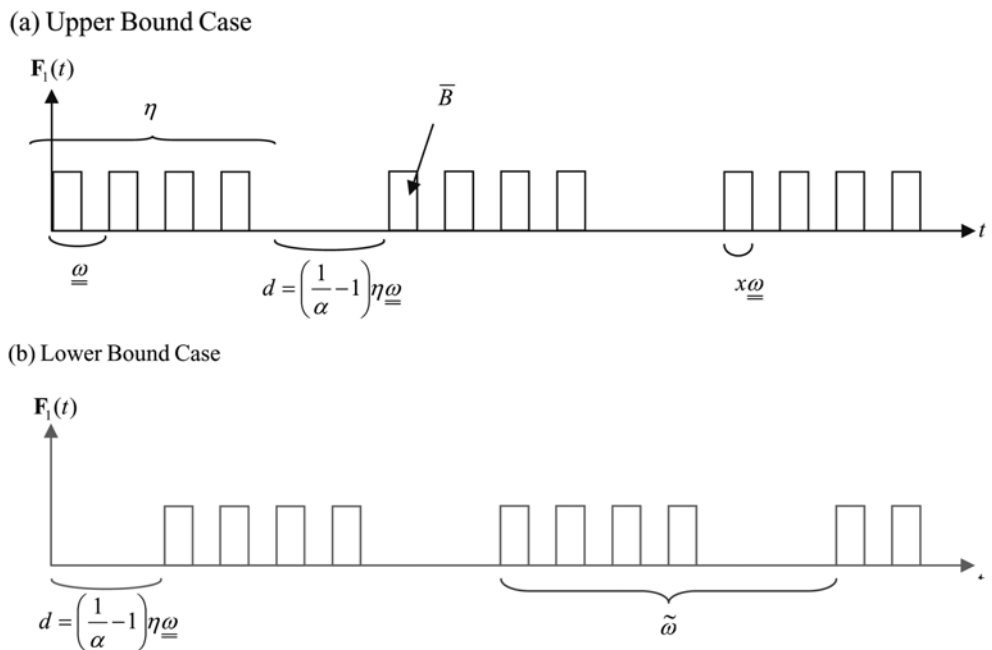


Fig. 4. Two Extreme Cases of Random Failure.

를 만족한다. 매개변수 α_{i_2} 는 범위 $0 < \alpha_{i_2} \leq 1$ 내에서 어떤 실수값도 가질 수 있다. 그러나 본연구에서는 α_{i_2} 는 $\alpha_{i_2} \eta_{i_2}$ 가 정수가 되도록

회학공학 제46권 제3호 2008년 6월

선택되어야 한다. 이것은 Fig. 4과 Fig. 5에서 나타난 것처럼 흐름의 상한값과 하한값을 발견하는데 사용되어지는 도형적 분

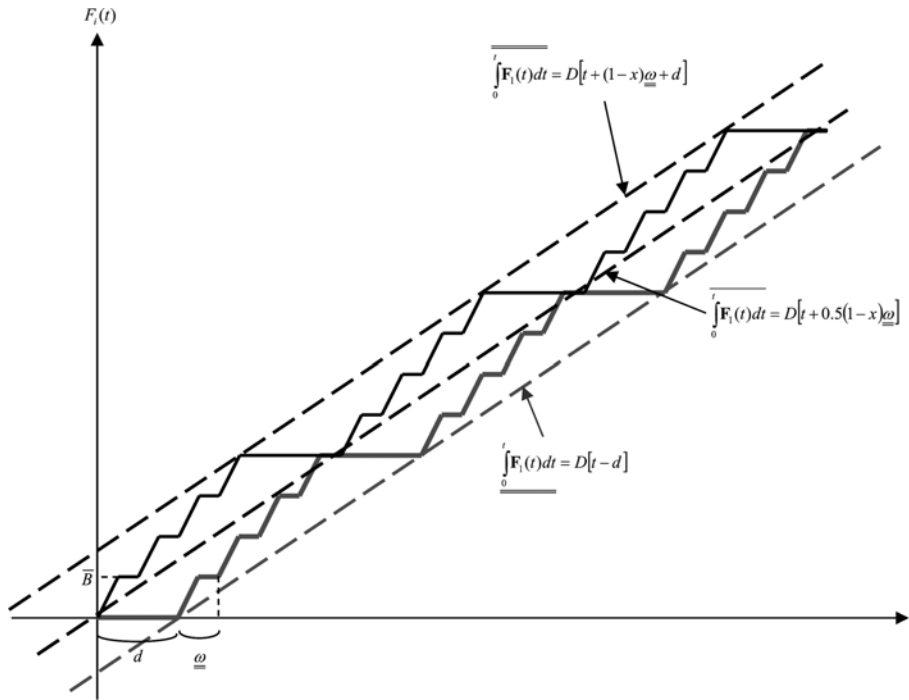


Fig. 5. Flow Accumulation Functions for Two Extreme Cases.

석을 가능하게 하기 위해서이다. 장주기를 $\tilde{\omega} \equiv \eta \underline{\omega}$ 로 정의하고, 장주기 내에서 총 고장시간을 $d \equiv (1-\alpha)\tilde{\omega}$ 로 정의하자. 여기서 $\tilde{\omega}$ 모든 무작위 효과가 주어진 신뢰도 내에서 사라지는 최소주기이고, η 는 장주기 내에서 작업 횟수이다. α 와 η 는 매개변수로서 과거의 전자료나 다른 공장의 유사공정의 운전특성으로부터 추정된다.

최종제품의 수요는 제 3 유형의 공정으로서 달리 정의된다. 수요의 주문량과 주문주기는 무작위 변수이다. 주어진 수렴한계 $0 < \epsilon_1 \ll 1$ 와 신뢰도 $0 < \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \ll 1$ 에 대하여, $P\{|\frac{B_m^j}{\omega_m^j} - D_m^j| \geq 1 - \delta_1$ 식을 만족하는 최소의 정수 η_m^j 를 구하면 Tchebycheff 부등식으로부터 $\eta_m^j = [\text{Var}(B_m^j/\omega_m^j)/\delta_1 \epsilon_1^2] + 1$ 인데, 여기서

$$\frac{B_m^j}{\omega_m^j} \Big|_{\eta_m^j} \equiv \frac{\sum_{l=1}^{\eta_m^j} B_m^j(l)}{\eta_m^j \omega_m^j} \text{이다. 다음 } P\left\{\sum_{n=1}^{\eta_m^j} \omega_m^j(n) \geq \tilde{\omega}_m^j\right\} \leq \delta_2 \text{ 식을}$$

만족하는 최소의 양의 실수 $\tilde{\omega}_m^j$ 와 $P\{B_m^j \leq \tilde{B}_m^j\} \geq 1 - \delta_3$ 를 만족하는 최대 주문량 \tilde{B}_m^j 를 구한다. 그러면 장주기 내에서 최소의 주문횟수는 $\gamma_m^j \equiv \text{int}[D_m^j \tilde{\omega}_m^j / \tilde{B}_m^j] + 1$ 이고 고객주문의 장주기는 $\tilde{\omega}_m^j = \gamma_m^j \tilde{B}_m^j / D_m^j$ 로 수정된다. 최소주문시간 $\underline{\omega}_m^j$ 는 $P\{\omega_m^j(n) \geq \underline{\omega}_m^j\} \geq 1 - \delta_4$ 를 만족한다. 그러면, 주문의 유용성은 $\alpha_m^j \equiv \gamma_m^j \underline{\omega}_m^j / \tilde{\omega}_m^j$ 이고, 주문사이의 최대 시간간격은 $d_m^j \equiv (1 - \alpha_m^j) \tilde{\omega}_m^j$ 이다. 매개변수 $\eta_m^j, \tilde{\omega}_m^j, \tilde{B}_m^j, \gamma_m^j, \underline{\omega}_m^j, \alpha_m^j$ 와 d_m^j 는 주문량과 주기에 대한 확률분포함수가 주어지면 윗식들에 의해 모두 계산되어진다.

생산공정에서 원료주입 흐름의 시작시간과 제품배출 흐름의 시작시간 사이에는 다음관계식이 존재한다.

$$t_i^j = t_i + \Delta t_i(\cdot) \tag{3}$$

여기서 $\Delta t_i(\cdot)$ 임의의 변수의 함수이다. 공정 i_1 과 i_2 를 통한 각각 $D_{i_1} = \alpha_{i_1} B_{i_1} / \underline{\omega}_{i_1}$ 과 $D_{i_2} = \bar{B}_{i_2} / \underline{\omega}_{i_2}$ 라고 하자. 원료구매와 제품수요의 평균유속을 $D_k^j = \alpha_k^j (\bar{B}_k^j / \underline{\omega}_k^j)$ 와 $D_m^j = \alpha_m^j \bar{B}_m^j / \underline{\omega}_m^j = \gamma_m^j \tilde{B}_m^j / \tilde{\omega}_m^j$ 라

고하자. 어떤 저장조에 관한 물질 수지식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1=1}^{|I_1|} g_{i_1}^j D_{i_1} + \sum_{j_2=1}^{|I_2|} (\alpha_{i_2} g_{i_2}^j + \hat{g}_{i_2}^j (1 - \alpha_{i_2})) D_{i_2} + \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \\ & = \sum_{i_1=1}^{|I_1|} f_{i_1}^j D_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} f_{i_2}^j D_{i_2} + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j + \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j \end{aligned} \tag{4}$$

시간 t 에서 저장조 j의 무작위 재고수준을 $V^j(t)$, 그 저장조의 초기재고수준을 $V^j(0)$ 로 나타낸다. 우리가 필요로 하는것은 정확한 현 재고수준이 아니라 최대, 최소와 평균 재고수준이다. 최대 재고수준은 저장조 크기를 계산하는데 사용되고, 최소 재고수준은 최적화 모형에서 재고량이 항상 음수가 아니라는 제약을 가하는데 사용되며, 평균 재고수준은 재고유지비용을 계산하는데 사용된다. 최대, 최소 평균 재고량을 계산하는 대신에 누적 흐름의 상한값, 하한값과 평균값을 사용할 것이다. 제 1 유형 공정의 무작위 흐름을 $F_1(t)$ 으로 나타내자. 이 흐름은 장주기 동안 평균유속이 D 이다. 이것은 무작위 흐름에도 불구하고 장주동안 처리된 물량이 일정함을 의미한다. $F_1(t)$ 은 Fig. 4에서 나타난 것처럼 두가지 극단적인 경우가 존재한다. 누적흐름의 상한값 $\int_0^t F_1(t) dt$ 이 발생하는 경우는 모든 가동시간 고장이 되풀이되는 장주기의 끝에서 일어나는 경우이다. 누적흐름의 하한값이 일어나는 경우는 모든 가동시간 고장이 되풀이되는 장주기의 시작점에서 발생하는 경우이다. Fig. 5은 각각의 경우 누적흐름을 나타내고 있다. Fig. 5로부터 $\int_0^t F_1(t) dt$ 에 대한 선형의 상한값과 하한값을 쉽게 발견할 수 있다.⁰

$$D[t + (1-x)\underline{\omega} + d] \geq \int_0^t F_1(t) dt \geq D[t - d] \tag{5}$$

제 1 유형의 공정에 대해서 $d = (1/\alpha - 1)\eta \underline{\omega}$ 이다. 누적흐름 $\int_0^t F_1(t) dt$ 의 평균값은 상한값과 하한값으로부터 같은 거리에 떨어져

있는 선이다.

$$\int_0^t \mathbf{F}_1(t) dt = D[t + 0.5(1-x)\underline{\omega}] \quad (6)$$

윗식 (5)와 (6)에서 제 1 유형의 원료주입 흐름에 대해서는 $x \rightarrow x'_i$, $D \rightarrow f'_i D_i$ 와 $t \rightarrow t - t_i$ 를 치환하고, 제품배출 흐름에 대해서는 $x \rightarrow x'_i$, $D \rightarrow g'_i D_i$ 와 $t \rightarrow t - t_i - \Delta t_i$ 를 치환한다.

$F'_i(t)$, $G'_i(t)$, 와 $\hat{G}'_i(t)$ 를 Fig. 2와 Fig. 3에 보인 것처럼 제 2 유형 공정의 원료주입, 제품배출과 폐기물 배출 흐름이라고 정의한다 $G'_i(t)$ 과 $\hat{G}'_i(t)$ 의 상한값과 하한값을 발견하는 일은 $F_1(t)$ 에 대한 위의 설명과 동일하다. 즉 식 (5) 와 (6) 은 다른 표기와 함께 그대로 사용될 수가 있는데, 여기서 제품배출 흐름에 $t \rightarrow t - t_i - \Delta t_i$, $x \rightarrow x'_i$, $\underline{\omega} \rightarrow \bar{\omega}_i$, $d \rightarrow d_i$, $D \rightarrow \hat{g}'_i \alpha_i D_i$ 와 같이 치환하고, 폐기물 배출 흐름에 대해서는 $t \rightarrow t - t_i - \Delta t_i$, $x \rightarrow \alpha_i x'_i$, $\underline{\omega} \rightarrow \bar{\omega}_i$, $d \rightarrow \hat{d}_i$, $D \rightarrow \hat{g}'_i (1 - \alpha_i) D_i$ 와 같이 치환한다.

$$g'_i \alpha_i D_i [t - t_i - \Delta t_i + (1 - x'_i) \bar{\omega}_i + d_i] \geq \int_0^t G'_i(t) dt \geq g'_i \alpha_i D_i [t - t_i - \Delta t_i - d_i] \quad (7)$$

$$\hat{g}'_i (1 - \alpha_i) D_i [t - t_i - \Delta t_i + (1 - \alpha_i x'_i) \bar{\omega}_i + \hat{d}_i] \geq \int_0^t \hat{G}'_i(t) dt \geq \hat{g}'_i (1 - \alpha_i) D_i [t - t_i - \Delta t_i - \hat{d}_i] \quad (8)$$

위식에서 제품배출 흐름에 대해서는 $d_i = (1 - \alpha_i) \eta_i \bar{\omega}_i$ 이고, 폐기물 배출 흐름에 대해서는 $\hat{d}_i = \alpha_i \eta_i \bar{\omega}_i$ 이다. $\int_0^t G'_i(t) dt$ 와 $\int_0^t \hat{G}'_i(t) dt$ 의 평균값은 식 (7)과 (8)에서 상한값과 하한값의 중간에 위치하는 직선을 택한다.

$$\int_0^t G'_i(t) dt = g'_i \alpha_i D_i [t - t_i - \Delta t_i + 0.5(1 - x'_i) \bar{\omega}_i] \quad (9)$$

$$\int_0^t \hat{G}'_i(t) dt = \hat{g}'_i (1 - \alpha_i) D_i [t - t_i - \Delta t_i + 0.5(1 - \alpha_i x'_i) \bar{\omega}_i] \quad (10)$$

제 2 유형의 공정의 원료주입 흐름 $F'_i(t)$ 는 어떤 고장도 발생하지 않는다. $\int_0^t F'_i(t) dt$ 의 상한값과 하한값을 찾는 분석은 참고문헌 [11]에 나타나 있다.

$$f'_i D_i [t - t_i + (1 - x'_i) \bar{\omega}_i] \geq \int_0^t F'_i(t) dt \geq f'_i D_i [t - t_i] \quad (11)$$

$F'_i(t)$ 의 평균유속은 $f'_i D_i$ 이며, $\int_0^t F'_i(t) dt$ 의 평균은 상한값과 하한값의 중간위치에 있는 선이 된다.

$$\int_0^t F'_i(t) dt = f'_i D_i [t - t_i + 0.5(1 - x'_i) \bar{\omega}_i] \quad (12)$$

최종제품 수요 흐름의 상한값, 하한값과 평균값은 Fig. 4과 Fig. 5에 나타난 $F_1(t)$ 의 형태와 같다.

재고수준의 상한값, \bar{V}^j 는 초기재고에서 모든 유입되는 흐름의 상한값을 더하고 모든 유출되는 흐름의 하한값을 빼면 계산된다. 유입되는 흐름은 원료구매, 생산공정의 제품과 폐기물 배출 흐름이다. 유출되는 흐름은 생산공정의 원료주입, 최종제품 출하와 폐기물 처분 흐름이다.

$$\begin{aligned} \bar{V}^j = V^j(0) &- \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \left[t_k^j - (1 - x_k^j) \underline{\omega}_k^j - \left(\frac{1}{\alpha_k} - 1 \right) \eta_k^j \underline{\omega}_k^j \right] \\ &- \sum_{i_2=1}^{|I_2|} g_{i_2}^j \alpha_{i_2} D_{i_2} [t_{i_2}^j + \Delta t_{i_2} - ((1 - x'_{i_2}) + (1 - \alpha_{i_2}) \eta_{i_2}) \bar{\omega}_{i_2}] \\ &- \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \hat{g}_{i_2}^j (1 - \alpha_{i_2}) D_{i_2} [t_{i_2}^j + \Delta t_{i_2} - ((1 - x'_{i_2}) + \alpha_{i_2} \eta_{i_2}) \bar{\omega}_{i_2}] \\ &- \sum_{i_1=1}^{|I_1|} g_{i_1}^j D_{i_1} [t_{i_1}^j + \Delta t_{i_1} - (1 - x'_{i_1}) \underline{\omega}_{i_1} - \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \underline{\omega}_{i_1}] \\ &- \sum_{i_1=1}^{|I_1|} f_{i_1}^j D_{i_1} \left[t_{i_1}^j + \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \underline{\omega}_{i_1} \right] + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} f_{i_2}^j D_{i_2} [t_{i_2}^j] \\ &+ \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j [t_m^j + d_m^j] + \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j \left[t_n^j + \left(\frac{1}{\alpha_n} - 1 \right) \eta_n^j \underline{\omega}_n^j \right] \quad (13) \end{aligned}$$

재고수준의 하한값은, \underline{V}^j , 초기재고에서 모든 유입되는 흐름의 하한값을 더하고, 모든 유출되는 흐름의 상한값을 빼면 계산이 된다.

$$\begin{aligned} \underline{V}^j = V^j(0) &- \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \left[t_k^j + \left(\frac{1}{\alpha_k} - 1 \right) \eta_k^j \underline{\omega}_k^j \right] \\ &- \sum_{i_1=1}^{|I_1|} g_{i_1}^j D_{i_1} [t_{i_1}^j + \Delta t_{i_1} + \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \underline{\omega}_{i_1}] \\ &+ \sum_{i_1=1}^{|I_1|} f_{i_1}^j D_{i_1} [t_{i_1}^j - (1 - x'_{i_1}) \underline{\omega}_{i_1} - \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \underline{\omega}_{i_1}] \\ &- \sum_{i_2=1}^{|I_2|} g_{i_2}^j \alpha_{i_2} D_{i_2} [t_{i_2}^j + \Delta t_{i_2} + (1 - \alpha_{i_2}) \eta_{i_2} \bar{\omega}_{i_2}] \\ &- \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \hat{g}_{i_2}^j (1 - \alpha_{i_2}) D_{i_2} [t_{i_2}^j + \Delta t_{i_2} + \alpha_{i_2} \eta_{i_2} \bar{\omega}_{i_2}] \\ &+ \sum_{i_2=1}^{|I_2|} f_{i_2}^j D_{i_2} [t_{i_2}^j - (1 - x'_{i_2}) \bar{\omega}_{i_2}] + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j [t_m^j - (1 - x'_m) \underline{\omega}_m^j - d_m^j] \\ &+ \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j \left[t_n^j - (1 - x'_n) \underline{\omega}_n^j - \left(\frac{1}{\alpha_n} - 1 \right) \eta_n^j \underline{\omega}_n^j \right] \quad (14) \end{aligned}$$

평균 재고수준, \bar{V}^j , 누적흐름의 평균값을 합하면 계산된다.

$$\begin{aligned} \bar{V}^j = V^j(0) &+ \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j [0.5(1 - x_k^j) \underline{\omega}_k^j - t_k^j] \\ &+ \sum_{i_1=1}^{|I_1|} g_{i_1}^j D_{i_1} [0.5(1 - x'_{i_1}) \underline{\omega}_{i_1} - t_{i_1} - \Delta t_{i_1}] \\ &+ \sum_{i_2=1}^{|I_2|} g_{i_2}^j \alpha_{i_2} D_{i_2} [0.5(1 - x'_{i_2}) \bar{\omega}_{i_2} - t_{i_2} - \Delta t_{i_2}] \\ &+ \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \hat{g}_{i_2}^j (1 - \alpha_{i_2}) D_{i_2} [0.5(1 - x'_{i_2}) \bar{\omega}_{i_2} - t_{i_2} - \Delta t_{i_2}] \\ &- \sum_{i_1=1}^{|I_1|} f_{i_1}^j D_{i_1} [0.5(1 - x'_{i_1}) \underline{\omega}_{i_1} - t_{i_1}] - \sum_{i_2=1}^{|I_2|} f_{i_2}^j D_{i_2} [0.5(1 - x'_{i_2}) \bar{\omega}_{i_2} - t_{i_2}] \\ &- \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j [0.5(1 - x'_m) \underline{\omega}_m^j - t_m^j] - \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j [0.5(1 - x'_n) \underline{\omega}_n^j - t_n^j] \quad (15) \end{aligned}$$

원료물질 j 의 구매 준비비를 A_k^j (\$/order)라 두고, 공정 i 의 준비비를 A_i (\$/batch)라 둔다. 이 준비비들은 가동중단과 고장수리에 관한 비용도 포함한다. 저장조 j 의 재고유지비는 H^j (\$/L/year)라 둔다. 우리는 해석적인 해를 구하기 위하여 자본비용은 공정의 최대용량에 비례한다고 가정한다. 원료물질 j 의 구매시설의 연간 자본비용을 a_k^j (\$/year/L)라 두고 공정 i 의 연간 자본비용을 a_i (\$/year/L)라 두며, 저장조 j 의 연간 자본비용을 b^j (\$/year/L)라 둔다. 원료 구매비용은 구매량에 비례한다고 가정한다. 공급자 k 로부터 구매되는 원료물질 j 의 가격은 P_k^j (\$/L)이고, 최종제품 j 의 고객 m 에 대한 판매가격은 P_m^j (\$/L)이다. 폐기물 배출흐름에 대해서도 위와 같은 매개변수를 정의하면 A_n^j (\$/batch), a_n^j (\$/year/L)와 P_n^j (\$/L)가 된다. 공정-저장조 망구조 설계의 목적함수는 연간 총비용을 최소화하는 것인데, 여기서 총비용은 각 공정에 대한 주어진 유용성과 장주기내에서의 작업횟수에 대하여 원료 구매비용, 공정준비비, 폐기물 처리비용, 공정과 저장조의 자본비용 등의 합이다.

$$TC = \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} \left[\frac{\eta_k^j A_k^j}{\tilde{\omega}_k^j} + a_k^j B_k^j + P_k^j D_k^j \right] + \sum_{i=1}^{|I|} \left[\frac{\eta_i A_i}{\tilde{\omega}_i} + a_i \bar{B}_i \right] + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \left[\frac{\eta_{i_2} A_{i_2}}{\tilde{\omega}_{i_2}} + a_{i_2} B_{i_2} \right] + \sum_{j=1}^{|J|} [H^j \bar{V}^j + b^j \bar{V}^j] - \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{M=1}^{|M(j)|} P_m^j D_m^j + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{N=1}^{|N(j)|} \left[\frac{\eta_n^j A_n^j}{\tilde{\omega}_n^j} + a_n^j B_n^j + P_n^j D_n^j \right] \quad (16)$$

최종제품 수요의 평균유속 D_m^j 는 주어진 문제에 따라 변수나 매개변수로 고려될 수 있다. 제 1 유형의 공정에서 장주기 $\tilde{\omega}$ 내에 η 개의 작업이 일어나며, 제 2 유형 공정에는 장주기 $\tilde{\omega}_{i_2}$ 내에서 η_{i_2} 개의 작업이 일어난다. 최적화의 설계변수는 최소 작업주기 $\underline{\omega}$ 즉, $\underline{\omega}_k^j, \underline{\omega}_i, \underline{\omega}_{i_2}$ ($= \tilde{\omega}_{i_2}$)와 $\underline{\omega}_n^j$ 로 단일화한다. 변수와 매개변수의 정의로부터, 제 1 유형의 공정에 대해 $\eta A / \tilde{\omega} = \alpha A / \underline{\omega}$ 와 $\bar{B} = D \underline{\omega} / \alpha$ 가 성립하고, 제 2 유형의 공정에 대해 $\eta_{i_2} A_{i_2} / \tilde{\omega}_{i_2} = A_{i_2} / \tilde{\omega}_{i_2}$ 와 $\bar{B}_{i_2} = D_{i_2} \tilde{\omega}_{i_2} / \alpha_{i_2}$ 가 성립한다. 식 (16)에 있는 \bar{V}^j 와 \underline{V}^j 는 식 (13)과 (15)로부터 더욱 전개된다. 최적화의 제약식은 모든 저장조의 재고수준의 음이 아니라는 조건으로서, $0 \leq \underline{V}^j$ 이고, 여기서 \underline{V}^j 는 식 (14)에 의해 주어진다.

$$\underline{V}^j(0) - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \left[t_k^j + \left(\frac{1}{\alpha_k^j} - 1 \right) \eta_k^j \underline{\omega}_k^j \right] - \sum_{i=1}^{|I_1|} g_{i_1}^j D_{i_1} \left[t_{i_1} + \Delta t_{i_1} + \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \underline{\omega}_{i_1} \right] + \sum_{i=1}^{|I_1|} f_{i_1}^j D_{i_1} \left[t_{i_1} - (1 - x_{i_1}) \underline{\omega}_{i_1} - \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \underline{\omega}_{i_1} \right] - \sum_{i_2=1}^{|I_2|} g_{i_2}^j \alpha_{i_2} D_{i_2} \left[t_{i_2} + \Delta t_{i_2} + (1 - \alpha_{i_2}) \eta_{i_2} \tilde{\omega}_{i_2} \right] - \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \hat{g}_{i_2}^j (1 - \alpha_{i_2}) D_{i_2} \left[t_{i_2} + \Delta t_{i_2} + \alpha_{i_2} \eta_{i_2} \tilde{\omega}_{i_2} \right] + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} f_{i_2}^j D_{i_2} \left[t_{i_2} - (1 - x_{i_2}) \tilde{\omega}_{i_2} \right] + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j [t_m^j - (1 - x_m^j) \underline{\omega}_m^j - d_m^j] + \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j \left[t_n^j - (1 - x_n^j) \underline{\omega}_n^j - \left(\frac{1}{\alpha_n^j} - 1 \right) \eta_n^j \underline{\omega}_n^j \right] \geq 0 \quad (17)$$

3. Kuhn-Tucker 조건의 해

최적화 문제는 목적함수 식 (16)과 제약식 (17)과 함께 설계변수 $\omega_k^j, \omega_i, \omega_{i_2}, \omega_k^j, t_k^j, t_i$ and t_n^j 를 가진다. Kuhn-Tucker 조건의 해는 부록 A에 나타나 있다. 최적주기와 용량은 다음과 같다.

$$\underline{\omega}_k^j = \sqrt{\frac{A_k^j}{D_k^j \Psi_k^j}}, \quad \bar{B}_k = \frac{1}{\alpha_k^j} \sqrt{\frac{A_k^j D_k^j}{\Psi_k^j}} \quad (18)$$

여기서

$$\Psi_k^j = \frac{1}{\alpha_k^j} \left[(0.5H^j + b^j)(1 + x_k^j) + \frac{a_k^j}{\alpha_k^j} + (2b^j + H^j) \left(\frac{1}{\alpha_k^j} - 1 \right) \eta_k^j \right] \quad (19)$$

$$\underline{\omega}_n^j = \sqrt{\frac{A_n^j}{D_n^j \Psi_n^j}}, \quad \bar{B}_n = \frac{1}{\alpha_n^j} \sqrt{\frac{A_n^j D_n^j}{\Psi_n^j}} \quad (20)$$

여기서

$$\Psi_n^j = \frac{1}{\alpha_n^j} \left[(0.5H^j + b^j)(1 - x_n^j) + \frac{a_n^j}{\alpha_n^j} + (2b^j + H^j) \left(\frac{1}{\alpha_n^j} - 1 \right) \eta_n^j \right] \quad (21)$$

$$\underline{\omega}_{i_1} = \sqrt{\frac{A_{i_1}}{\Psi_{i_1} D_{i_1}}}, \quad \bar{B}_{i_1} = \frac{1}{\alpha_{i_1}} \sqrt{\frac{A_{i_1} D_{i_1}}{\Psi_{i_1}}} \quad (22)$$

여기서

$$\Psi_{i_1} = \frac{1}{\alpha_{i_1}} \left[\frac{a_{i_1}}{\alpha_{i_1}} + (1 - x_{i_1}) \sum_{j=1}^{|J|} \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) f_{i_1}^j + (1 - x_{i_1}') \sum_{j=1}^{|J|} \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) g_{i_1}^j \right] + \frac{1}{\alpha_{i_1}} \left[\left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \sum_{j=1}^{|J|} (2b^j + H^j) (f_{i_1}^j + g_{i_1}^j) \right] \quad (23)$$

$$\underline{\omega}_{i_2} = \sqrt{\frac{A_{i_2}}{\Psi_{i_2} D_{i_2}}}, \quad \bar{B}_{i_2} = \frac{1}{\alpha_{i_2}} \sqrt{\frac{A_{i_2} D_{i_2}}{\Psi_{i_2}}} \quad (24)$$

여기서

$$\Psi_{i_2} = \frac{a_{i_2}}{\alpha_{i_2}} + (1 - x_{i_2}') \sum_{j=1}^{|J|} (0.5H^j + b^j) f_{i_2}^j + \alpha_{i_2} [(1 - x_{i_2}') + 2(1 - \alpha_{i_2}) \eta_{i_2}] \sum_{j=1}^{|J|} (0.5H^j + b^j) g_{i_2}^j + (1 - \alpha_{i_2}) [(1 - x_{i_2}') + 2\alpha_{i_2} \eta_{i_2}] \sum_{j=1}^{|J|} (0.5H^j + b^j) \hat{g}_{i_2}^j \quad (25)$$

최적 가동 시작시간은:

$$\sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j + \sum_{i=1}^{|I_1|} (g_{i_1}^j - f_{i_1}^j) D_{i_1} t_{i_1} + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} (g_{i_2}^j \alpha_{i_2} + \hat{g}_{i_2}^j (1 - \alpha_{i_2}) - f_{i_2}^j) D_{i_2} t_{i_2} - \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j t_n^j = \underline{V}^j(0) - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \left(\frac{1}{\alpha_k^j} - 1 \right) \eta_k^j \underline{\omega}_k^j - \sum_{i_1=1}^{|I_1|} g_{i_1}^j D_{i_1} \Delta t_{i_1} - \sum_{i_1=1}^{|I_1|} (f_{i_1}^j + g_{i_1}^j) D_{i_1} \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \underline{\omega}_{i_1} + \sum_{i_1=1}^{|I_1|} (1 - x_{i_1}') f_{i_1}^j D_{i_1} \underline{\omega}_{i_1} - \sum_{i_2=1}^{|I_2|} (g_{i_2}^j \alpha_{i_2} + \hat{g}_{i_2}^j (1 - \alpha_{i_2})) D_{i_2} \Delta t_{i_2} + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} (1 - x_{i_2}') f_{i_2}^j D_{i_2} \tilde{\omega}_{i_2}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i_2=1}^{|I_2|} g_{i_2}^j \alpha_{i_2} (1 - \alpha_{i_2}) \eta_{i_2} D_{i_2} \bar{\omega}_{i_2} - \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \hat{g}_{i_2}^j (1 - \alpha_{i_2}) \alpha_{i_2} \eta_{i_2} D_{i_2} \bar{\omega}_{i_2} \\
 & - \sum_{m=1}^{|M(G)|} (1 - x_m^j) D_m^j \underline{\omega}_m^j + \sum_{m=1}^{|M(G)|} D_m^j t_m^j - \sum_{m=1}^{|M(G)|} D_m^j d_m^j \\
 & - \sum_{n=1}^{|N(G)|} (1 - x_n^j) D_n^j \underline{\omega}_n^j - \sum_{n=1}^{|N(G)|} D_n^j \left(\frac{1}{\alpha_n} - 1 \right) \eta_n^j \underline{\omega}_n^j \quad \forall j, \tau \quad (26)
 \end{aligned}$$

최적 저장조 크기는 식 (13)과 (26)으로부터 계산된다.

$$\begin{aligned}
 \bar{V}^j = & \sum_{m=1}^{|M(G)|} (1 - x_m^j) D_m^j \underline{\omega}_m^j + 2 \sum_{m=1}^{|M(G)|} D_m^j d_m^j \\
 & + \sum_{i_1=1}^{|I_1|} \left[(1 - x_{i_1}^j) f_{i_1}^j + (1 - x_{i_1}^j) g_{i_1}^j + 2(f_{i_1}^j + g_{i_1}^j) \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \right] D_{i_1}^j (\underline{\omega}_{i_1}^j) \\
 & + \sum_{k=1}^{|K(G)|} \left[(1 - x_k^j) + 2 \left(\frac{1}{\alpha_k} - 1 \right) \eta_k \right] D_k^j (\underline{\omega}_k^j) \\
 & + \sum_{n=1}^{|N(G)|} \left[(1 - x_n^j) + 2 \left(\frac{1}{\alpha_n} - 1 \right) \eta_n \right] D_n^j (\underline{\omega}_n^j) \\
 & + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} g_{i_2}^j \alpha_{i_2} [(1 - x_{i_2}^j) + 2(1 - \alpha_{i_2}) \eta_{i_2}] D_{i_2}^j \bar{\omega}_{i_2} + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} (1 - x_{i_2}^j) f_{i_2}^j D_{i_2}^j \bar{\omega}_{i_2}
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \hat{g}_{i_2}^j (1 - \alpha_{i_2}) [(1 - x_{i_2}^j) + 2\alpha_{i_2} \eta_{i_2}] D_{i_2}^j \bar{\omega}_{i_2} \quad (27)$$

식 (27)을 조사해 보면, 각 공정의 저장조 크기에 대한 영향이 분리된 항으로 나타나 있음을 알수 있다. 예를들어 제 1 유형 생산 공정의 저장조 크기에 대한 항은 다음과 같다.

$$\left[(1 - x_{i_1}^j) f_{i_1}^j + (1 - x_{i_1}^j) g_{i_1}^j + 2(f_{i_1}^j + g_{i_1}^j) \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \right] D_{i_1}^j (\underline{\omega}_{i_1}^j) \quad (28)$$

최적 목적함수는:

$$\begin{aligned}
 TC(D_k^j, D_j^j, D_n^j) = & \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(G)|} P_k^j D_k^j + 2 \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(G)|} \alpha_{i_1}^j \sqrt{A_{i_1}^j \Psi_{i_1}^j} D_k^j \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{n=1}^{|N(G)|} P_n^j D_n^j + 2 \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{n=1}^{|N(G)|} \alpha_{i_1}^j \sqrt{A_{i_1}^j \Psi_{i_1}^j} D_n^j \\
 & + 2 \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \alpha_{i_2}^j \sqrt{A_{i_2}^j \Psi_{i_2}^j} D_{i_2}^j + 2 \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \sqrt{A_{i_2}^j \Psi_{i_2}^j} D_{i_2}^j \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{m=1}^{|M(G)|} [(0.5H^j + b^j)(1 - x_m^j) \underline{\omega}_m^j + (H^j + 2b^j) d_m^j - P_m^j] D_m^j \quad (29)
 \end{aligned}$$

식 (29)를 살펴보면 각 공정의 총비용에 대한 영향이 분리된 항으로 나타나 있다. 예를들어, 제 2 유형의 생산공정의 비용항은:

$$\text{Cost of Process } i_2 = 2\sqrt{A_{i_2} \Psi_{i_2}} D_{i_2} \quad (30)$$

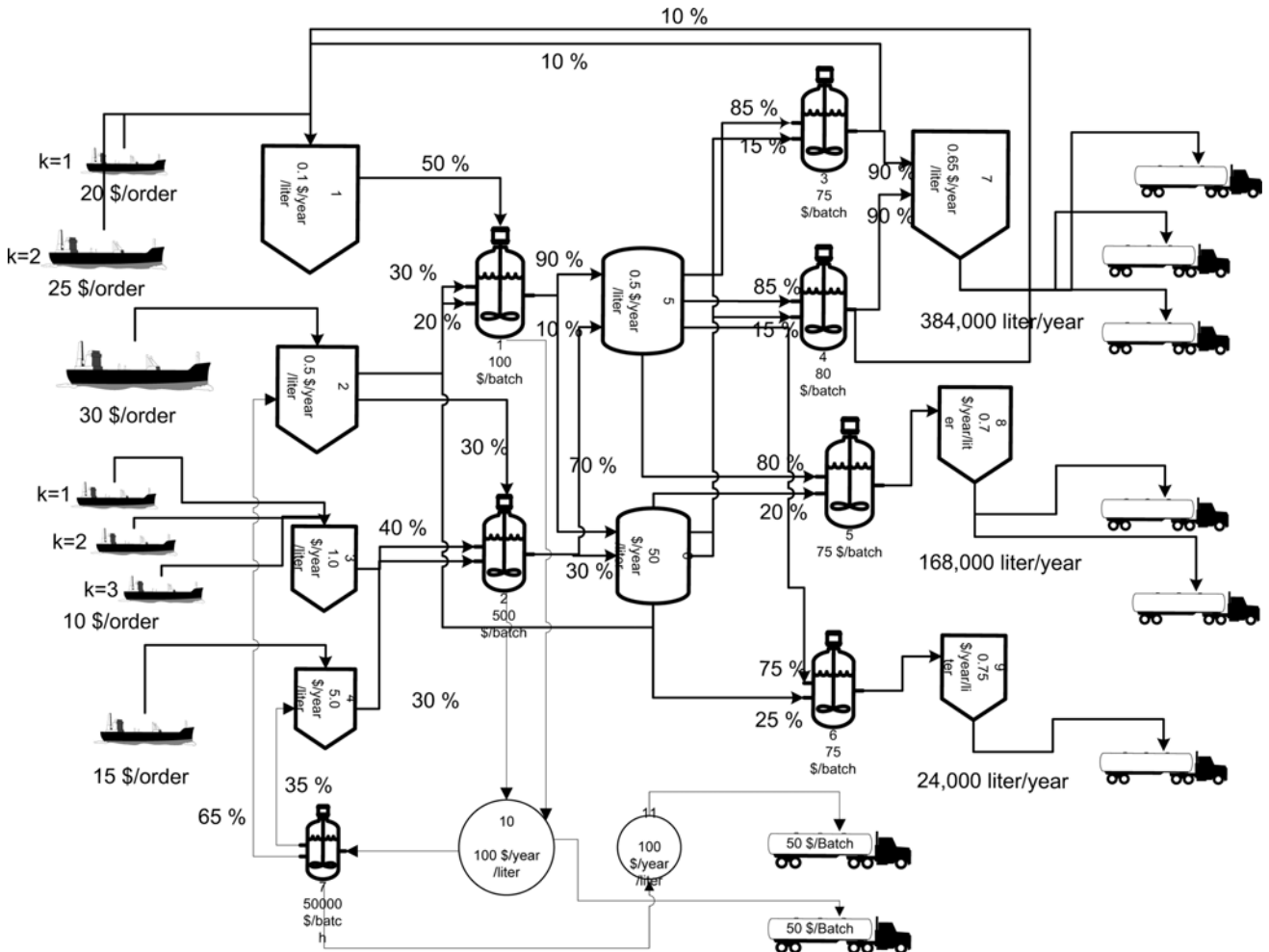


Fig. 6. An Example Plant Design Problem.

위의 최적화 해를 유도하는 과정에서 평균유속 D_k^i, D_i, D_m^i 와 D_m^j 는 매개변수로 고려되었지만 실제로 미지수이다. 최적 평균유속은 목적함수가 식 (29)이고 제약식이 식 (4)인 또다른 최적화 문제를 풀어야 하는데 이 문제를 2 차문제라고 부른다. 원문제에 대한 2 차문제의 전범위 최적성에 대한 연구는 Yi 와 Reklaitis [13]에 나타나 있다. 식 (29)의 비선형 항들은 분리가능한 오목함수이므로 구간별 선형화가 가능하다[13].

전체적 계산절차는 먼저 2 차문제를 풀어서 최적 평균유속을 계산한 다음 식 (18)~(27)의 해석적인 해를 이용하여 최적주기, 용량과 저장조 크기를 계산한다.

3. 공장설계 예제

4 가지 원료로부터 3 가지 완제품을 생산하는 공장을 고려하자. 이 공장의 구조는 Yi 와 Reklaitis [11]에 소개된 예제공장에 폐기물 처리시설을 추가한 것으로서, 계산에 필요한 대부분의 입력자료와 함께 Fig. 6에 나타나 있다. 공정 I1 과 I2는 제 2 유형의 공정이고, 제품생산에 실패한 폐기물은 저장조 J10에 모아진다. 폐기물 J10은 폐기물 배출공정 J10을 통해 폐기되거나 재생공정 I7을 통해 원료물질 J2와 J4로 재생된다. 재생공정 I7은 제 2 유형의 공정으로서 이 공정에서 나온 폐기물은 저장조 J11로 간다. 폐기물 J11은 폐기물 배출공정 J11을 통해 처리된다. 모든 다른 공정은 제 1 유형의 공정이다.

Fig. 7은 최적 공정용량, 주기, 공정비용 과 저장조 크기의 유용성에 대한 의존도를 나타낸다. 공정 I1에 대한 입력자료와 식 (22), (27) 과 (29) 가 사용되었다. 공정유형과 장주기에서의 작업횟수에 따라 6개의 경우를 고려하였다. 모든 최적해는 유용성이 1에 접근할 때 결정론적 모형의 해로 수렴한다. 유용성이 1로 갈수록 주기

는 증가하고 공정비용은 감소한다. 제 2 유형의 공정 용량, 주기와 비용은 제 1 유형의 공정 보다 크다. 반면에 제 2 유형의 공정의 저장조 크기는 제 1 유형의 공정 보다 작다. η_j 가 늘어나면 공정용량과 주기는 줄어들고, 공정비용과 저장조 크기는 늘어난다. 저장조 크기를 제외한 모든 변수는 η_j 를 변화시킬 경우가 유용성을 변화시킬 경우에 비해 효과가 적다. 제 1 유형의 공정용량의 변화는 거의 무시될 수 있다. 제 2 유형의 공정의 저장조의 크기는 유용성에 대해서 최대값을 보인다.

4. 결 론

본 연구에서 소개하는 방법론은 공정들이 운전시간이나 처리물량의 무작위 고장에 노출되어 있을 때 망구조로 연결된 공정과 저장조의 최적용량을 결정해 준다. 무작위 고장의 주요소는 가동시간 손실과 공정물질 손실이다. 폐기물 재생이나 배출공정들이 생산에 실패한 물질을 다루기 위해 설치되었다. 사각과 모형은 공정주기와 물량의 단기 무작위 변동에 노출된 흐름의 상한값과 하한값을 발견하는데 주도면밀하게 사용되었다. 무작위 변동의 특성을 정의하기 위하여 평균이나 분산 같은 보통 사용되는 매개변수 대신에 유용성과 장주기 내에서의 작업횟수가 소개되었다. 유용성은 FMEA 같은 공정 신뢰도 분석에 보통 사용되고, 장주기 내에서의 작업횟수는 분산에 비례한다. 이 매개변수들은 좀더 실질적이고, 사람의 직각으로 추정하기가 쉽다. 최적화의 목적함수는 공정의 준비비와 자본비용, 재고유지비용과 원료구매비 등이고, 제약식은 완제품의 무작위 수요를 만족하면서 물질의 소진이 일어나지 않는 것이다. 사각과 모형과 재치있는 도형적 분석으로 인해 물질흐름의 여러가지 형태의 무작위 변동을 해석적인 해를 구할 수 있는 하나의 최적화 모형에 포함시킬 수 있게 되었다. 해석적인 해로 인해

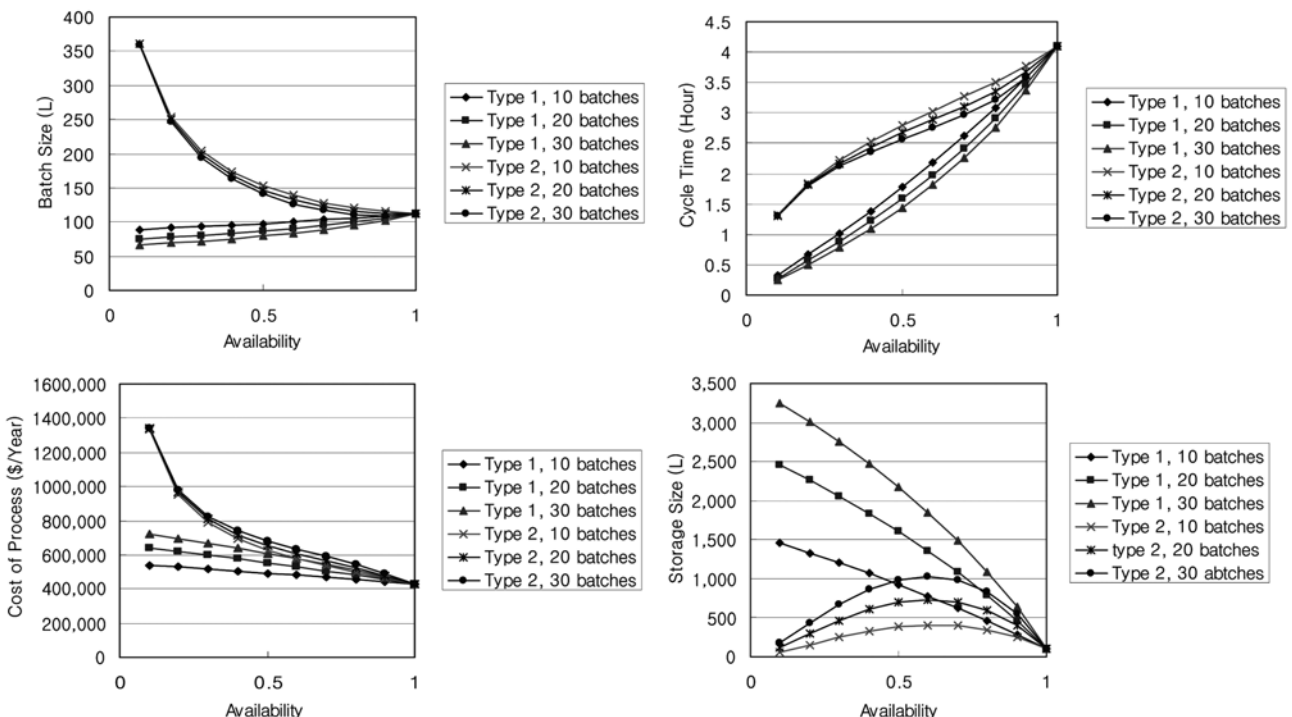


Fig. 7. Sensitivity Analysis With Respect To Availability.

본 연구의 큰 성과물인 계산량의 현저한 감소가 가능하다. 해석적인 해를 분석함으로써 유용성과 장주기에서의 작업횟수에 대한 최적해의 민감도 분석이 가능하게 되었다.

감 사

“이 논문 또는 저서는 2007년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임”(KRF-2007-313-D00132)

사용기호

a_k^j : annualized capital cost of raw material purchasing facility, dollars per unit of item per year
 a_i : annualized capital cost of unit i , dollars per unit of item per year
 a_n^j : annualized capital cost of waste disposal facility,
 b^j : annualized capital cost of storage facility, dollars per unit of item per year
 A_k^j : ordering cost of feedstock materials, dollar per order
 A_i : ordering cost of noncontinuous units, dollar per order
 A_n^j : disposal cost of waste materials, dollar per order
 TC : annualized sum of costs, \$/year
 B : general description of batch size of any process, units per lot
 \bar{B} : general description of average batch size of any process, units per lot
 B_k^j : raw material order size, units per lot
 \bar{B}_k^j : mean of raw material order size, units per lot
 B_i : batch production unit size, units per lot
 \bar{B}_i : mean of batch production unit size, units per lot
 $B_{i2(l)}$: random l -th batch size of product flow of type 2 process, units per lot
 B_m^j : random l -th batch size of demand flow of product j , customer m , units per lot
 B_m^j : final product delivery batch size, units per lot
 \bar{B}_m^j : maximum of : final product demand batch size, units per lot
 B_n^j : batch size of waste disposal, units per lot
 d : general description of failure duration within a long cycle time, year
 d_k^j : total failure duration within a long cycle time for raw material purchasing process, year
 d_i : total failure duration within a long cycle time for process i , year
 d_m^j : total failure duration within a long cycle time for finished product demand, year
 d_n^j : total failure duration within a long cycle time for waste disposal process, year
 \hat{d}_{i_2} : total failure duration within a long cycle time for waste flow of type 2 process i , year
 D : general description of average flow rates of any process,

units per year
 D_i : average material flow rate through batch production units, units per year
 D_k^j : average material flow rate of raw material supply, units per year
 D_m^j : average material flow rate of customer demand, units per year
 D_n^j : average material flow rate of waste disposal, units per year
 f_i^j : feedstock composition of unit i at time period τ
 $F_1(t)$: accumulated flow of type 1 random process, units
 $F_{i_2}^j(t)$: accumulated feed flow of type 2 process, units
 g : general description of product yield
 g_i^j : product yield of process i at time period τ
 \hat{g} : general description of waste material yield
 $\hat{g}_{i_2}^j$: waste material yield of type 2 process i_2 at time period τ
 $G_{i_1}^j(t)$: accumulated random product flow of type 2 process i_2
 $\hat{G}_{i_2}^j(t)$: accumulated random waste flow of type 2 process i_2
 H^j : annual inventory holding costs, dollars per unit of item per year
 I : noncontinuous process set
 I_1 : noncontinuous process subset of type 1
 I_2 : noncontinuous process subset of type 2
 J : storage or material set
 $K(j)$: raw material supplier set for material j
 $M(j)$: consumer set for material j
 $N(j)$: waste disposal sink set for material j
 P_k^j : raw material purchase price, dollars per unit of item
 P_m^j : finished product sales price, dollars per unit of item
 P_n^j : waste disposal price, dollars per unit of item
 t_m^j : startup time of customer demand
 t_n^j : startup time of customer demand
 t_i^j : startup time of feedstock feeding to batch process i
 t_i^j : startup time of product discharging from batch process i
 t_k^j : startup time of raw material purchasing
 Δt_i : time delay between feed flow and product flow of process i , year
 TC : total cost, \$
 \bar{V}^j : upper bound of inventory hold-up, units of item
 \underline{V}^j : lower bound of inventory hold-up, units of item
 $\bar{V}^j(t)$: inventory hold-up, units of item
 $\underline{V}^j(0)$: initial inventory hold-up, units of item
 \bar{V}^j : time averaged inventory hold-up, units of item
 x_k^j : storage operation time fraction of purchasing raw materials
 x_i^j : storage operation time fraction of feeding to noncontinuous unit i
 x' : general description of storage operation time fraction of discharging flow
 x_i' : storage operation time fraction of discharging from noncontinuous unit i
 x_m^i : storage operation time fraction of finished product demand
 x_n^j : storage operation time fraction of waste disposal flow

그리스 문자

- α : general description of availability
- α_k^j : availability of raw material purchase flow
- α_i : availability of process i
- α_n^j : availability of waste disposal flow
- $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$: confidence limits
- ϵ_1 : convergence limit
- γ_m^j : minimum number of batch in long cycle time
- γ^j : Lagrangian multiplier of Kuhn-Tucker conditions
- η : general description of number of batch in long cycle time
- η_k^j : number of batch in long cycle time for purchasing material flow
- η_i : number of batch in long cycle time for processing material flow.
- η_m^j : number of batch in long cycle time for finished product demand flow.
- η_n^j : number of batch in long cycle time for waste disposal flow.
- ω_m^j : cycle time of customer demand, year
- ω_n^j : cycle time of waste disposal flow, year
- ω_k^j : cycle time of raw material purchasing, year
- ω_i : cycle time of process i , year
- $\omega_{(l)}$: l -th random cycle time of any process, year
- ω_{i_2} : random cycle time of type 2 process i_2 , year
- $\omega_m^j, \omega_{m(l)}^j$: (l -th) random cycle time of customer demand, year
- $\bar{\omega}$: general description of average cycle time, year
- $\bar{\omega}_{i_2}$: average cycle time of type 2 process i_2 , year
- $\underline{\omega}$: general description of lower bound of cycle time, year
- $\underline{\omega}_k^j$: lower bound of cycle time of raw material purchase, year
- $\underline{\omega}_m^j$: lower bound of cycle time of finished product demand flow, year
- $\underline{\omega}_n^j$: lower bound of cycle time of waste disposal flow, year
- $\tilde{\omega}$: general description of long cycle time, year
- $\tilde{\omega}_i$: long cycle time of process i , year
- $\tilde{\omega}_k^j$: long cycle time of raw material purchasing, year
- $\tilde{\omega}_m^j$: long cycle time of customer demand, year
- $\tilde{\omega}_n^j$: long cycle time of waste disposal flow, year
- Ψ_k^j : aggregated cost defined by (19)
- Ψ_n^j : aggregated cost defined by (21)
- Ψ_{i_1} : aggregated cost defined by (23)
- Ψ_{i_2} : aggregated cost defined by (25)

아래첨자

- i : batch production process index
- i_1 : type 1 process index
- i_2 : type 2 process index
- k : index of raw material vendors

- (l) : batch sequence index
- m : index of finished product customers
- n : index of waste disposal sinks

위첨자

- j : storage index

Special Functions

- $\text{int}[\cdot]$: truncation function to make integer
- $\text{res}[\cdot]$: positive residual function to be truncated
- $\text{Var}(\cdot)$: variance
- $|\mathcal{X}|$: Number of elements in set X

참고문헌

1. Subrahmanyam, S., Pekny, J. F. and Reklaitis, G. V., "Design of Batch Chemical Plants Under Market Uncertainty," *Ind. Eng. Chem. Res.*, **33**(11), 2688-2701(1994).
2. Hax, A. C. and Candea, D., *Production and Inventory Management*, Englewood Cliff : Prentice-Hall(1984).
3. Barbaro, A. and Bagajewicz, M. J., "Use of Inventory and Option Contracts to Hedge Financial Risk in Planning Under Uncertainty," *AIChE J.*, **50**(5), 990-998(2004).
4. Sahinidis, N. V. "Optimization Under Uncertainty: State-of-the-art and Opportunities," *Computers and Chemical Engineering*, **28**(6), 971-983(2004).
5. Petkov, S. B. and Maranas, C. D., "Multiperiod Planning and Scheduling of Multiproduct Batch Plants Under Demand Uncertainty," *Ind. Eng. Chem. Res.*, **36**(11), 4864-4881(1997).
6. Petkov, S. B. and Maranas, C. D., "Design of Single-product Campaign Batch Plants Under Demand Uncertainty," *AIChE J.*, **44**(4), 896-911(1998).
7. Balasubramanian, J. and Grossmann, I. E., "Scheduling Optimization Under Uncertainty-an Alternative Approach," *Computers and Chemical Engineering*, **27**(4), 469-490(2003).
8. Lin, X. S., Janak, L. and Floudas, C. A., "A New Robust Optimization Approach for Scheduling Under Uncertainty: 1 Bounded Uncertainty," *Computers and Chemical Engineering*, **28**(7), 1069-1085(2004).
9. Yin, K. K., Yin, G. G. and Lin, H., "Stochastic Modeling for Inventory and Production Planning in the Paper Industry," *AIChE J.*, **50**(11), 2877-2890(2004).
10. Moyle, D. T. and Mitchell, C. M., "Use Reliability-based Information to Access Design Alternatives," *CEP*, **100**(10), 39-44(2004).
11. Yi, G. and Reklaitis, G. V., "Optimal Design of Batch-storage Network with Recycle Streams," *AIChE J.*, **49**(12), 3084-3094(2003).
12. Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, Korea: McGraw-Hill(1984).
13. Yi, G. and Reklaitis, G. V., "Optimal Design of Batch-storage Network with Financial Transactions and Cash Flows," *AIChE J.*, **50**(11), 2849-2865(2004).

부록 A: Kuhn-Tucker 조건의 해

최적화 문제의 목적함수는 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned}
 TC = & \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} \frac{\alpha_k^j A_k^j}{\underline{\omega}_k} + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} P_k^j D_k^j \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{M=1}^{|M(j)|} P_M^j D_M^j + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{n=1}^{|N(j)|} \left[\frac{\alpha_n^j A_n^j}{\underline{\omega}} + P_n^j D_n^j \right] \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \frac{\alpha_{i_1} A_{i_1}}{\underline{\omega}_{i_1}} + \sum_{j=1}^{|J|} \left[\frac{A_{i_2}}{\underline{\omega}_{i_2}} + a_{i_2}^j \frac{D_{i_2} \bar{\omega}_{i_2}}{\alpha_{i_2}^j} \right] \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{n=1}^{|N(j)|} \left[0.5H^j(1-x_n^j) - \frac{a_n^j}{\alpha_n^j} \right] D_n^j \underline{\omega}_n + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{n=1}^{|N(j)|} (H^j + b^j) D_n^j t_n^j \\
 & \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} \left(0.5H^j(1-x_k^j) + b^j(1-x_k^j) + \frac{a_k^j}{\alpha_k^j} \right) D_k^j \underline{\omega}_k \\
 & \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} (H^j + b^j) D_k^j t_k^j + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i=1}^{|I|} (H^j + b^j) (f_{i_1}^j - g_{i_1}^j) D_{i_1}^j t_{i_1}^j \\
 & + \left(\sum_{i=1}^{|I|} \frac{a_{i_1}}{\alpha_{i_1}} + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i=1}^{|I|} 0.5H^j [(1-x'_{i_1}) g_{i_1}^j - (1-x_{i_1}) f_{i_1}^j] \right) D_{i_1}^j \underline{\omega}_{i_1} \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{i_1=1}^{|I|} g_{i_1}^j D_{i_1}^j \Delta t_{i_1} + \sum_{j=1}^{|J|} b^j \sum_{i_1=1}^{|I|} g_{i_1}^j D_{i_1}^j (1-x'_{i_1}) \underline{\omega}_{i_1} \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i_2=1}^{|I_2|} (H^j + b^j) (f_{i_2}^j - g_{i_2}^j \alpha_{i_2} - \hat{g}_{i_2}^j (1-\alpha_{i_2})) D_{i_2}^j t_{i_2}^j \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{i_2=1}^{|I_2|} (g_{i_2}^j \alpha_{i_2} + \hat{g}_{i_2}^j (1-\alpha_{i_2})) D_{i_2}^j \Delta t_{i_2} \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i_2=1}^{|I_2|} 0.5H^j g_{i_2}^j \alpha_{i_2} (1-x'_{i_2}) D_{i_2}^j \bar{\omega}_{i_2} \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i_2=1}^{|I_2|} 0.5H^j \hat{g}_{i_2}^j (1-\alpha_{i_2}) (1-x'_{i_2}) D_{i_2}^j \bar{\omega}_{i_2} \\
 & + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} b^j g_{i_2}^j \alpha_{i_2} ((1-x'_{i_2}) + (1-\alpha_{i_2}) \eta_{i_2}) D_{i_2}^j \bar{\omega}_{i_2} \\
 & + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} b^j \hat{g}_{i_2}^j (1-\alpha_{i_2}) ((1-x'_{i_2}) + \alpha_{i_2} \eta_{i_2}) D_{i_2}^j \bar{\omega}_{i_2} \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{i_2=1}^{|I_2|} 0.5H^j (1-x'_{i_2}) f_{i_2}^j D_{i_2}^j \bar{\omega}_{i_2} \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{n=1}^{|N(j)|} b^j D_n^j \left(\frac{1}{\alpha_n^j} - 1 \right) \eta_n^j \underline{\omega}_n \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} b^j D_k^j \left(\frac{1}{\alpha_k^j} - 1 \right) \eta_k^j \underline{\omega}_k \\
 & + \sum_{i_1=1}^{|I_1|} \sum_{j=1}^{|J|} b^j \Gamma_{i_1}^j (f_{i_1}^j + g_{i_1}^j) \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}^j} - 1 \right) \eta_{i_1}^j D_{i_1}^j \underline{\omega}_{i_1}
 \end{aligned} \tag{A1}$$

+constant

여기서

$$\begin{aligned}
 \text{constants} = & \sum_{j=1}^{|J|} (0.5H^j + b^j) V^j(0) \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{m=1}^{|M(j)|} 0.5H^j (1-x_m^j) D_m^j \underline{\omega}_m + \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j t_m^j \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{M=1}^{|M(j)|} P_M^j D_M^j + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{m=1}^{|M(j)|} b^j D_m^j d_m^j
 \end{aligned} \tag{A2}$$

독립변수 $\underline{\omega}_k^j, \underline{\omega}_{i_1}, \bar{\omega}_{i_2}, \underline{\omega}_{i_2}^j$ 와 $t_k^j, t_{i_1}, t_{i_2}, t_n^j$ 에 대해 제약식 (17) 하에서 목적함수 (A1) 을 최소화 하는 Lagrange 함수값은;

$$\begin{aligned}
 L = TC - & \sum_{\tau=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{|J|} \lambda^j \left[V^j(0) - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \left[t_k^j + \left(\frac{1}{\alpha_k^j} - 1 \right) \eta_k^j \underline{\omega}_k^j \right] \right. \\
 & - \sum_{i_1=1}^{|I_1|} g_{i_1}^j D_{i_1}^j \left[t_{i_1}^j + \Delta t_{i_1} + \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}^j} - 1 \right) \eta_{i_1}^j \underline{\omega}_{i_1} \right] \\
 & + \sum_{i_1=1}^{|I_1|} f_{i_1}^j D_{i_1}^j \left[t_{i_1}^j - (1-x'_{i_1}) \underline{\omega}_{i_1} - \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}^j} - 1 \right) \eta_{i_1}^j \underline{\omega}_{i_1} \right] \\
 & - \sum_{i_2=1}^{|I_2|} g_{i_2}^j \alpha_{i_2} D_{i_2}^j [t_{i_2}^j + \Delta t_{i_2} + (1-\alpha_{i_2}) \eta_{i_2} \bar{\omega}_{i_2}] \\
 & - \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \hat{g}_{i_2}^j (1-\alpha_{i_2}) D_{i_2}^j [t_{i_2}^j + \Delta t_{i_2} + \alpha_{i_2} \eta_{i_2} \bar{\omega}_{i_2}] \\
 & + \sum_{i_2=1}^{|I_2|} f_{i_2}^j D_{i_2}^j [t_{i_2}^j - (1-x'_{i_2}) \bar{\omega}_{i_2}] + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j [t_m^j - (1-x_m^j) \underline{\omega}_m - d_m^j] \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{|N(j)|} D_n^j \left[t_n^j - (1-x_n^j) \underline{\omega}_n - \left(\frac{1}{\alpha_n^j} - 1 \right) \eta_n^j \underline{\omega}_n \right] \right]
 \end{aligned} \tag{A3}$$

여기서 λ^j 는 Lagrange 승수이다. Kuhn-Tucker 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial L}{\partial t_k^j} = -(H^j + b^j) D_k^j + \lambda^j D_k^j = 0 \tag{A4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \underline{\omega}_k^j} = & - \frac{\alpha_k^j A_k^j}{(\underline{\omega}_k^j)^2} \\
 & + \left[0.5H^j(1-x_k^j) + b^j(1-x_k^j) + \frac{a_k^j}{\alpha_k^j} + (b^j + \lambda^j) \left(\frac{1}{\alpha_k^j} - 1 \right) \eta_k^j \right] D_k^j = 0
 \end{aligned} \tag{A5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_n^j} = (H^j + b^j) D_n^j - \lambda^j D_n^j = 0 \tag{A6}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \underline{\omega}_n^j} = & - \frac{\alpha_n^j A_n^j}{(\underline{\omega}_n^j)^2} \\
 & + \left[-0.5H^j(1-x_n^j) + \frac{a_n^j}{\alpha_n^j} + \lambda^j(1-x_n^j) + (b^j + \lambda^j) \left(\frac{1}{\alpha_n^j} - 1 \right) \eta_n^j \right] D_n^j = 0
 \end{aligned} \tag{A7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t_{i_1}} = \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) (f_{i_1}^j - g_{i_1}^j) D_{i_1}^j - \sum_{j=1}^{|J|} \lambda^j (f_{i_1}^j - g_{i_1}^j) D_{i_1}^j = 0 \tag{A8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \underline{\omega}_i} &= -\frac{\alpha_i A_{i_1}}{(\underline{\omega}_i)^2} + \left[\frac{a_i}{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{|J|} 0.5H^j[(1-x'_i)g^j - (1-x'_{i_1})f^j_{i_1}] \right] D_{i_1} \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} b^j g^j_{i_1} (1-x'_i) D_{i_1} - \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) g^j_{i_1} D_{i_1} \frac{\partial \Delta t_i}{\partial \underline{\omega}_i} \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} (b^j + \lambda^j) (f^j_{i_1} + g^j_{i_1}) \left(\frac{1}{\alpha_i} - 1 \right) \eta_{i_1} D_{i_1} \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} \lambda^j \left[(1-x'_{i_1}) f^j_{i_1} + g^j_{i_1} \frac{\partial \Delta t_i}{\partial \underline{\omega}_i} \right] D_{i_1} = 0 \end{aligned} \quad (A9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t_i} &= \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) (f^j_{i_2} - g^j_{i_2} \alpha - \hat{g}^j_{i_2} (1-\alpha_{i_2})) D_{i_2} \\ &- \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) (f^j_{i_2} - g^j_{i_2} \alpha - \hat{g}^j_{i_2} (1-\alpha_{i_2})) D_{i_2} \end{aligned} \quad (A10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{\omega}_i} &= -\frac{A_{i_2}}{(\bar{\omega}_i)} + \frac{a_{i_2}}{\alpha_{i_2}} D_{i_2} \\ &- \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{i_2=1}^{|I_2|} (g^j_{i_2} \alpha_{i_2} + \hat{g}^j_{i_2} (1-\alpha_{i_2})) D_{i_2} \frac{\partial \Delta t_i}{\partial \bar{\omega}_i} \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} 0.5H^j g^j_{i_2} \alpha_{i_2} (1-x'_{i_2}) D_{i_2} + \sum_{j=1}^{|J|} 0.5H^j \hat{g}^j_{i_2} (1-\alpha_{i_2}) (1-x'_{i_2}) D_{i_2} \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} b^j g^j_{i_2} \alpha_{i_2} ((1-x'_{i_1}) + (1-\alpha_{i_2}) \eta_{i_2}) D_{i_2} \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} b^j \hat{g}^j_{i_2} (1-\alpha_{i_2}) ((1-x'_{i_2}) + \alpha_{i_2} \eta_{i_2}) D_{i_2} \\ &- \sum_{j=1}^{|J|} 0.5H^j (1-\alpha_{i_2}) f^j_{i_1} D_{i_2} + \sum_{j=1}^{|J|} \lambda^j g^j_{i_2} \alpha_{i_2} (1-\alpha_{i_2}) \eta_{i_2} D_{i_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{j=1}^{|J|} \lambda^j \hat{g}^j_{i_2} (1-\alpha_{i_2}) \alpha_{i_2} \eta_{i_2} D_{i_2} + \sum_{j=1}^{|J|} \lambda^j f^j_{i_2} (1-x'_{i_2}) D_{i_2} \\ &+ \sum_{j=1}^{|J|} \lambda^j (g^j_{i_2} \alpha_{i_2} + \hat{g}^j_{i_2} (1-\alpha_{i_2})) \frac{\partial \Delta t_i}{\partial \bar{\omega}_i} D_{i_2} = 0 \end{aligned} \quad (A11)$$

$$\begin{aligned} &\lambda^j \left[V^j(0) - \sum_{k=1}^{|K(\theta)|} D^j_k \left[t_k^j + \left(\frac{1}{\alpha_k} - 1 \right) \eta_{i_2} \underline{\omega}_k \right] \right] \\ &- \sum_{k=1}^{|I_1|} g^j_{i_1} D_{i_1} \left[t_{i_1} + \Delta t_{i_1} + \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_2} \underline{\omega}_{i_1} \right] \\ &+ \sum_{k=1}^{|I_1|} f^j_{i_1} D_{i_1} \left[t_{i_1} - (1-x'_{i_1}) \underline{\omega}_{i_1} - \left(\frac{1}{\alpha_{i_1}} - 1 \right) \eta_{i_1} \underline{\omega}_{i_1} \right] \\ &- \sum_{i_2=1}^{|I_2|} g^j_{i_2} \alpha_{i_2} D_{i_2} \left[t_{i_2} + \Delta t_{i_2} + (1-\alpha_{i_2}) \eta_{i_2} \bar{\omega}_{i_2} \right] \\ &- \sum_{i_2=1}^{|I_2|} \hat{g}^j_{i_2} (1-\alpha_{i_2}) D_{i_2} \left[t_{i_2} + \Delta t_{i_2} + \alpha_{i_2} \eta_{i_2} \bar{\omega}_{i_2} \right] \\ &+ \sum_{i_2=1}^{|I_2|} f_{i_2} D_{i_2} \left[t_{i_2} - (1-x_{i_2}) \bar{\omega}_{i_2} \right] + \sum_{m=1}^{|M(\theta)|} D^j_m \left[t_m^j - (1-x^j_m) \underline{\omega}_n^j - d^j_m \right] \\ &+ \sum_{n=1}^{|M(\theta)|} D^j_n \left[t_n^j - (1-x^j_n) \underline{\omega}_n^j - \left(\frac{1}{\alpha_n} - 1 \right) \eta^j_n \underline{\omega}_n^j \right] = 0 \end{aligned} \quad (A12)$$

식 (A4), (A6), (A8)와 (A10)를 풀면;

$$\lambda^j = H^j + b^j \quad (A13)$$

식 (A5), (A7), (A9), (A11)와 (A13)를 함께 풀면 본문에 있는 식 (18), (20), (22)와 (24)가 된다. 식 (A12)를 풀면 식 (26)이 된다.