

자연요소법과 유전자 알고리즘을 사용한 원공 평판의 최적설계

이상범[#], 성활경^{*}, 천호정^{**}

Optimization of a Membrane with a Center Hole using Natural Element Method and Genetic Algorithm

Sang Bum Lee[#], Hwal Gyeng Seong^{*} and Ho Jeong Cheon^{**}

ABSTRACT

Natural element method (NEM) is quick in research activities by natural sciences and mechanical engineering fields, and from which good results are watched by various engineering fields and applied too. However no paper or research about the applied case has announced yet. Therefore on this paper, I will rediscover an optimum design and apply NEM into other fields with NEM for existing optimum design of mainly using FEM. NEM and genetic algorithm (GA) are applied to optimize a membrane with a center hole. The optimal design obtained by NEM is compared to the counterpart obtained by the finite element method (FEM). Result by NEM is found to be better than the result by FEM. NEM can be a feasible analysis tool in design optimization.

Key Words : Natural element method (자연요소법), Genetic Algorithm (유전자 알고리즘), Design Optimization (최적설계), Membrane with a center hole (원공평판)

1. 서론

오늘날 공학 분야에서 최적설계는 이미 우리에게 낯선 말이 아니다. 기존의 최적설계에서는 해석을 위하여 대부분 유한요소법(Finite Element Method, FEM)을 사용하였다. 유한요소법은 요소(Element)를 기반으로 한 수치해석법으로 적용과정에서 요소의 변형에 따른 문제가 자주 발생한다. 이번 논문에서는 요소를 기반으로 한 수치해석법의 근본적인 문제를 해결하기 위해 무요소법(Meshless

or Mesh free method)의 일종인 자연요소법(NEM, Natural Element Method)의 최적설계 적용에 대한 연구를 하였다.

자연요소법은 보로노이 다이어그램(Voronoi diagram)과 델라우니 삼각화(Delaunay triangulation)와 같은 기하학적 개념을 도입하여 Sibson 및 Laplace 기저함수(Basis function)를 구성한다.¹ 이러한 Sibson 및 Laplace 기저함수는 정확하게 보간 특성(Interpolating property)을 지니게 되므로 유한요소법과 같은 필수경계조건을 직접적으로 처리할 수

접수일: 2007년 5월 15일; 게재승인일: 2007년 11월 30일

교신저자: 창원대학교 대학원 기계공학과

E-mail: maxcae@gmail.com Tel. (055) 263-4956

* 국립 창원대학교

** 창원대학교 대학원 기계공학과

있는 장점을 가진다. 또한 MLS 근사기법(Moving Least Square Approximation) 등과는 달리 절점의 기하학적 정보를 이용하여 함수를 구성하기 때문에 불규칙한 절점배치에서도 매우 적절한 형상함수를 제공한다.

이번 연구의 목적은 최적설계에 자연요소법을 적용하는 것으로 먼저 기존에 잘 알려진 유한요소법과 이번 논문의 목적인 자연요소법의 결과를 비교해 보았다. 그리고 유한요소법을 이용한 최적설계와 자연요소법을 이용한 최적설계의 결과를 비교해 봄으로써 자연요소법을 최적설계에 적용하였을 때 유한요소법을 적용한 최적설계 못지않은 우수한 결과를 보임을 입증 하고자 한다.

2. 유전자 알고리즘

이번 논문에서 사용된 최적설계의 방법은 유전자 알고리즘(Genetic algorithm)이다. 유전자 알고리즘은 생물계의 기본인 선택·도태·교차(Crossover)·돌연변이(Mutation)의 과정을 반복하는 진화의 원리를 확률적 탐색·모의실험에 구현한 진화연산(Evolutionary Computation)의 대표적인 한 방법이다.

유전자 알고리즘의 기본구조는 “Generate and Test”형의 알고리즘으로, n개의 개체를 갖는 모집단으로부터 교차·돌연변이의 연산을 기본으로 하는 복제 과정을 거쳐 새로운 n개의 개체를 갖는 모집단을 생성하여 원래의 모집단과 대체시킨다. 부모 염색체의 부분조합에 의하여 자녀의 염색체가 만들어지고, 이 과정에서 설계개선이 이루어지며, 결과적으로 최적치에 수렴할 수 있게 된다.

어떤 설계 값의 주어진 환경에 대한 적응성을 평가하는 것이 적합도(Fitness)이다. 적합도가 높은 설계치들로 우량그룹을 구성하며, 이들 중에서 일정한 규칙에 의하여 교배 쌍(Mating Pair)이 선택된 후 복제되어 다음 세대로 유전자가 남겨지고, 적합도가 낮은 설계치들은 교배의 대상으로 선택되지 못하며 결과적으로 도태되게 된다. 이를 수식화하면 식(1)과 같다.

$$Ps(i) = \frac{Ai}{\left(\sum_{i=1}^n \right)} = \frac{Ai}{\lambda} \quad (1)$$

여기서

$Ps(i)$: i 번째 개체가 선택될 확률

Ai : i 번째 개체의 적응도

λ : 모집단 전체의 평균적응도

이와 같이 적합도에 따라 교배의 대상으로 선택되는 횟수가 결정되며, 우수 개체 사이에서 새로운 개체가 생성되므로 세대가 증가할수록 모집단 전체의 적합도는 향상되어진다.

해석과정에 있어서 적합도 값이 큰 개체가 소수일 경우에는 이들만이 복제과정에 참여하게 되므로 국소해(Local optimum)로 수렴될 가능성이 있다. 반면 모집단 내의 개체수가 너무 많게 되면 국소해로의 수렴은 방지되지만 세대당 계산량이 많게 되어 수렴률이 낮아지는 문제도 있다.

교차는 확률적으로 결정되는 교차위치를 기준으로 하여 개체 간에 유전자를 교환하고 결합하여 새로운 염색체를 만드는 과정을 말한다. 부모개체 간의 교차를 거쳐 생성된 자식개체는 부모 개체의 유전자 특성을 나누어 가지게 된다.

돌연변이는 정해진 확률에 의해 개체내의 유전자 정보를 변화시켜 전혀 다른 특성을 갖는 개체를 생성시키는 것을 말한다. 돌연변이 확률을 지나치게 크게 하면 염색체의 스키마타(Schemata)가 전부 파괴되기 때문에 임의 탐색(Random Search)으로 변해버리게 된다. 그러나 돌연변이의 확률이 너무 작으면 초기 유전자의 조합 이외의 공간을 탐색하지 못한다는 문제점이 발생하여 결국 찾고자 하는 해의 한계를 보인다. 돌연변이의 확률은 대부분 문제의 형태에 따라서 경험적인 값을 지정하게 된다.

새롭게 생성된 자녀세대의 개체의 가장 우수한 형질이 부모세대가 가지는 가장 우수한 형질보다 항상 우수한 것은 아니다. 한 세대가 가지는 가장 우수한 개체를 보존하기 위하여 부모세대의 가장 우수한 형질을 가지는 개체를 돌연변이나 교차의 과정을 거치지 않고 그대로 자녀세대로 이동시킨다. 이를 엘리트 보존전략(Elitist Strategy)라 한다. 그러나 가장 좋은 해를 잃지 않고 보존하는 장점을 갖게 되나 대신 엘리트 개체의 유전자가 개체군 전체로 퍼져나갈 가능성도 있다. 유전자 알고리즘의 순서도를 Fig. 1에 정리하였다.

3. 자연요소법

자연요소법을 본 논문에 적용하기 위해 보로노

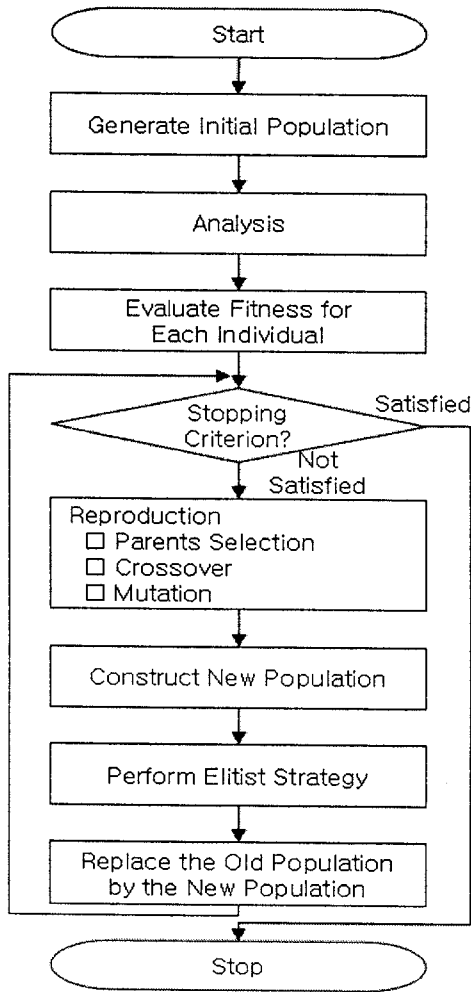


Fig. 1 Flow chart of genetic algorithm

이 다이어그램과 델라우니 삼각화의 2차원 유클리드(Euclidean) 공간에서 정의하도록 한다. 평면상의 서로 다른 점집합 $N = \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$, $N \in \mathbb{R}^2$ 을 고려하자. 점집합 N 의 1차 보로노이 다이어그램은 평면상의 서로 다른 점의 분포로부터 국부영역 T_j 로 평면을 분할하게 한다. 각각의 국부영역 T_j 는 절점 n_j 와 관련되어 있으며, T_j 내부의 임의의 점은 영역 밖의 어떠한 점 $n_j \in N (j \neq I)$ 보다 n_j 와 가장 가깝게 구성되어 있다. 영역 T_j 는 n_j 의 보로노이 셀(Voronoi Polygon)이 된다.²

Fig. 2(a)와 (b)에서 7개의 절점으로 구성되는 점집합 N 의 보로노이 셀과 보로노이 다이어그램을

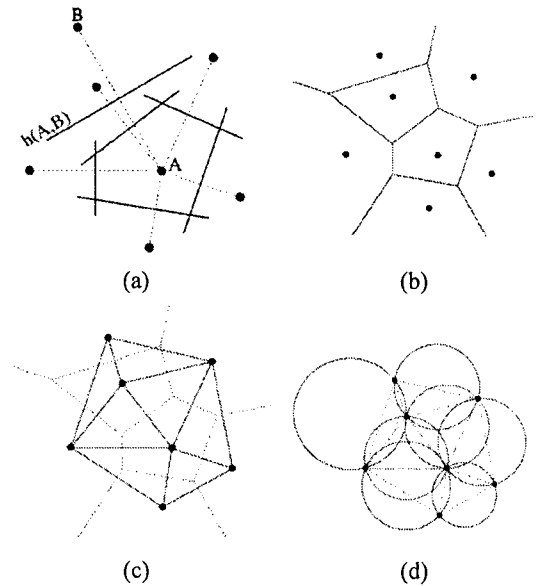


Fig. 2 Geometric structures for a set N of seven nodes: (a) Voronoi Cell for node A; (b) Voronoi diagram $V(N)$; (c) Delaunay triangulation $DT(N)$; and (d) Natural neighbour circumcircles

나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 각각의 보로노이 셀 T_j 는 절점 x_j 와 $x_l (j \neq l)$ 를 끝점으로 하는 선분을 수직 2등분하는 직선에 의해 구분되는 많은 반 공간(half-space)의 교집합에 의해 형성된다. 결과적으로 모든 절점들은 닫힌 볼록(convex) 부 영역 또는 경계가 없는(unbound) 부 공간으로 분할되어진다. 이미 보로노이 다이어그램은 자연과학, 물리학 그리고 공학 등 많은 분야에 널리 사용되어지고 있다. 보로노이 다이어그램의 특성 및 응용에 대한 자세한 내용은 Okabe 등(1992)의 참고문헌에서 찾을 수 있다.³

델라우니 삼각화는 보로노이 다이어그램의 기하학적 듀얼(Geometric dual)로서 보로노이 다각형의 경계를 공유하는 절점을 연결하여 구성할 수 있다. 이러한 델라우니 삼각형은 주어진 절점으로부터 구성할 수 있는 모든 삼각형 중에 최소각을 최대화하는 특성을 가지고 있다.³ 델라우니 삼각화의 다른 중요한 특성은 빈 외접원 기준(Empty circumcircle criterion)으로 임의의 델라우니 삼각형의 외접원 내부에는 다른 절점을 전혀 포함하지 않

아야 하며, 이러한 델라우니 외접원의 중심은 보로노이 다각형의 꼭짓점이 된다는 것이다. Fig. 2(c)에서는 7개의 절점으로 구성된 델라우니 삼각형을 Fig. 2(d)에서는 외접원과 델라우니 삼각형의 조합을 도시하였다.

3.1 Laplace 보간

Laplace 보간은 Belikov 등(2000)과 Hiyoshi와 Sugihara(1999)가 제시한 자연이웃(Natural neighborhood) 기반의 보간법이다.^{4,5} Laplace 좌표를 정의하기 위해 보로노이 다각형 T_x 와 T_j 의 1차원 공통 면(facet) 즉, 보로노이 모서리 ω_{xj} (Fig. 2(b) 참조)를 다음과 같이 정의한다.¹

$$\omega_{xj} = x \in \overline{T_x} \cap \overline{T_j}, \quad \overline{T_x} = T_x \cup \partial T_x \quad (2)$$

여기서 T_x 와 T_j 사이에 공통의 모서리가 존재하지 않으면, ω_{xj} 는 공집합이 된다. Fig. 3에 나타낸 것처럼 점 x 와 절점 x_j 에 의해 형성되는 보로노이 모서리 ω_{xj} 의 길이를 $s_j(x)$, 점 x 에서 ω_{xj} 까지의 수직거리를 $h_j(x)$ 라 두면, Laplace 기저 함수 $\phi_j(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_j(x) = \frac{\alpha_j(x)}{\sum_{j=1}^n \alpha_j(x)} \quad (3)$$

$$\alpha_j(x) = \frac{s_j(x)}{h_j(x)}$$

식 (3)에서 알 수 있듯이 2차원일 때의 Laplace 기저함수는 1차 보로노이 모서리와 관련된 길이비로 정의된다.

Laplace 보간법에 의해 유도된 자연이웃 기반의 기저함수는 항상 양(+)의 값을 가지며, 절점 데이터를 정확히 보간하고 단위분할(Partition of unity)의 성질을 보여준다. 구성된 기저함수의 기본적인 특성을 정리하면 다음과 같다.^{1,6}

$$0 \leq \phi_j(x) \leq 1 \quad \text{:Positivity} \quad (4-a)$$

$$\phi_j(x_j) = \delta_{jJ} \quad \text{:Kronecker delta} \quad (4-b)$$

$$\sum_{j=1}^n \phi_j(x) = 1 \quad \text{:Partition of unity} \quad (4-c)$$

또한, 자연이웃 기반의 기저함수는 선형일관성(Linear consistency) 조건을 만족한다. 즉, 임의의 선

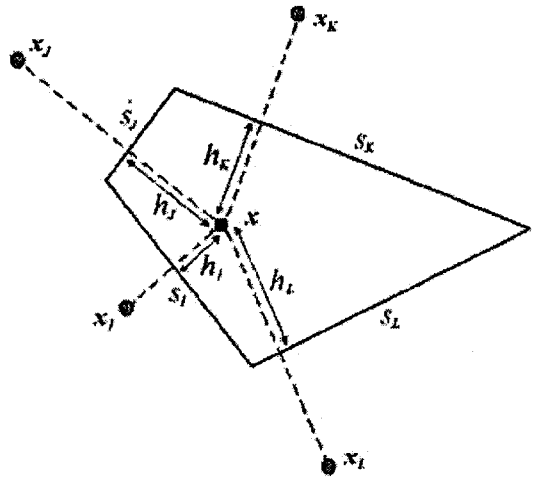


Fig. 3 Geometric definition of the polygon T_x

형 장(Linear field)을 정확하게 재구성할 수 있다.^{1,6}

$$x = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) x_j \quad (5)$$

자연이웃 기저함수 $\phi_j(x)$ 의 영향 영역은 절점을 통과하는 델라우니 외접원들과 모든 절점에 의해 형성되는 볼록 영역(Convex hull)의 교집합으로 정의된다. Sibson 및 Laplace 기저함수는 1차원에서 정확하게 선형보간 특성을 보이며, 이는 1차원 선형 유한요소의 형상함수와 동일함을 의미한다. 또한 2차원에서 자연이웃 절점이 3개일 경우 3절점 일정 변형률 유한요소 형상함수와 같다. 4개일 경우 4절점 사각형 유한요소의 형상함수(Bilinear shape function)와 동일한 특성을 보인다.⁷

3.2 지배방정식

2차원 소 변형 문제에 대해 고려해 볼 때 평행 방정식은 아래와 같이 정의 할 수 있다.

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

여기서 $\Omega = R^2$ 인 전체 영역이고, ∇ 은 기울기 연산자, σ 은 Cauchy 응력 그리고 b 는 단위부피당 힘이다. 구성 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma = C \epsilon \quad (7)$$

여기서 ϵ 는 소성 변형력이고, C 는 탄성력의 행렬

형태이다. 소성 변형력과 변위 벡터 u 의 관계는

$$\epsilon = \nabla_s u \quad (8)$$

이고, 여기서 ∇_s 는 대칭 기울기연산자이다. u 와 자연경계조건은 아래 식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u, \\ n \cdot \sigma &= \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \\ (\Gamma &= \Gamma_u \cup \Gamma_t) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 Γ 은 Ω 의 경계조건, n 은 Ω 에서 단위수직벡터, 그리고 \bar{u} 와 \bar{t} 은 각각 미리 정해진 변형과 마찰력이다.

변형한 함수와 식(6)의 조합으로 다음의 식을 찾을 수 있다.

$$\begin{aligned} u &\in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \nabla_s \delta v \cdot \sigma \, d\Omega &= \int_{\Omega} \delta v \cdot b \, d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_t} \delta v \cdot \bar{t} \, d\Gamma \\ \forall \delta v &\in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 $H^1(\Omega)$ 는 Ω 에서 제곱 적분이 가능한 1차 도함수와 함수의 Sobolev 공간이고, $H_0^1(\Omega)$ 는 Ω 에서 제곱 적분이 가능한 1차 도함수와 함수의 Sobolev 공간과 기본 경계 Γ_u 에서 사라지는 값이다.

지배방정식의 생성은 유한요소법과 동일한 방법을 사용하며 아래와 같다.

$$Kd = f^{ext} \quad (11)$$

여기서 d 는 절점 변위의 벡터 값이고,

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T C B_J \, d\Omega \quad (12-a)$$

$$\begin{aligned} f_I^{ext} &= \int_{\Gamma_t} \phi_I \bar{t} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_I b \, d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} B_I^T C \epsilon^* \, d\Omega \end{aligned} \quad (12-b)$$

$\Omega \subset R^2$: the domain of the body

Γ : the boundary of Ω

\bar{t} : tractions

b : the body force per unit volume

ϵ^* : the imposed eigenstrain tensor

B_I 는 형상함수의 도함수 행렬로 아래와 같이 주어진다.

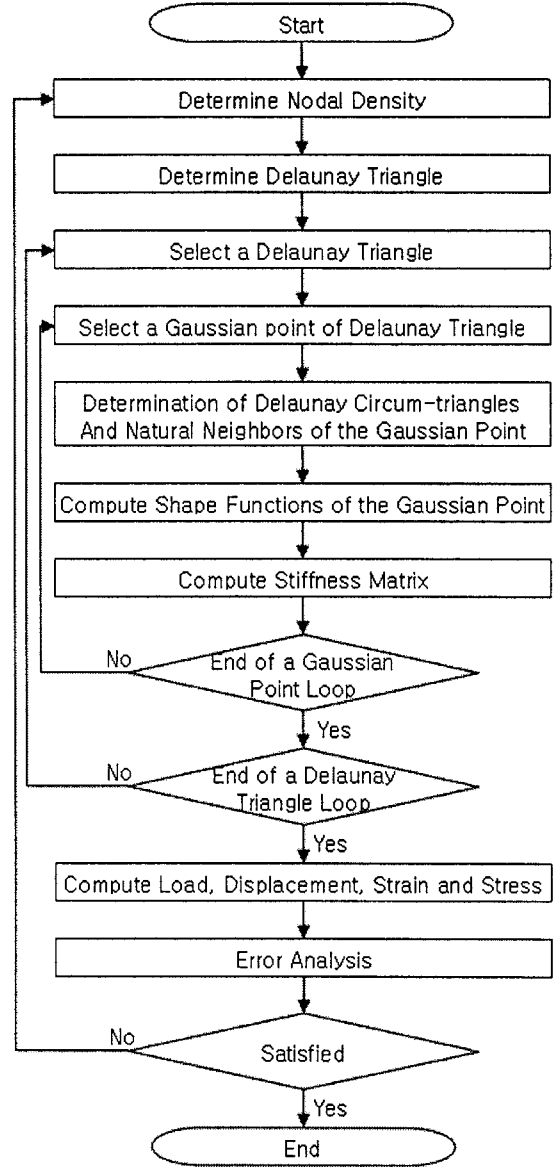


Fig. 4 Flow chart of computational procedure

$$B_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서 $\phi_{I,m}(x) = \frac{A_{I,m}(x) - \phi_I(x)A_m(x)}{A(x)}$,

$\phi_f(x) = \frac{A_f(x)}{A(x)}$ 로 $\phi_{f,m}(x)$ 는 $\phi_f(x)$ 의 도함수이다.¹

또한, C 행렬은 다음과 같다.

$$C = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (14-a)$$

(plane strain)

$$C = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1\nu & 0 \\ \nu 1 & 0 \\ 0 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (14-b)$$

(plane stress)

자연요소법의 강성행렬은 유한요소법과 같이 수치적분에 의해 계산되지만 그 계산은 델라우니 삼각형 단위로 이루어진다. Fig. 4는 이러한 자연요소법의 계산순서를 보여주고 있다. 먼저, 선택된 델라우니 삼각형과 적분점에 대해 자연이웃 절점들을 구하여 형상함수를 계산한다. 모든 적분점에 대한 강성 행렬이 구성되면 미지수인 힘, 변위, 변형률과 응력 등을 계산한다.

4. 원공을 가진 무한 평판의 자연요소법을 이용한 최적설계

Fig. 5에서와 같이 x_1 축 방향으로 단축 인장(Unidirectional tension)을 받으며 내부에 원공(Circular hole)을 가진 무한 평판(Infinite plate)을 고려한다. Fig. 5에서 도시된 평판은 수치해석을 위해 x_1 축과 x_2 축 방향으로 각각 L 만큼 잘라낸 모델이며, 좌표의 원점은 내부 원공의 중심에 설정하였다. 해석 모델은 AB에서는 $u_2 = 0$, DE에서는 $u_1 = 0$ 의 대칭성을 가지므로 해석영역은 1-사분면인 ABCDE로 한다. $a = 1$ in, $L = 5$ in 이고 인장력 = 1 psi 일 때의 정해는 Timoshenko 와 Goodier에 의해 주어지며 응력의 분포는 아래와 같이 주어진다.

$$\sigma_{11}(r, \theta) = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \quad (15-a)$$

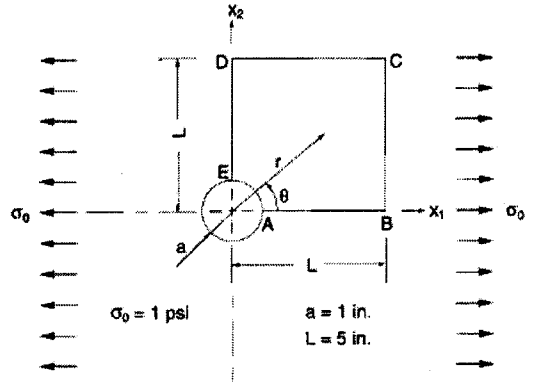


Fig. 5 Plate with a circular hole under tension

$$\sigma_{22}(r, \theta) = -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \quad (15-b)$$

$$\sigma_{12}(r, \theta) = -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin 4\theta \quad (15-c)$$

여기서 a는 원공의 반지름이다. 변위성분은 식(16)과 같이 구할 수 있다.

$$u_1(r, \theta) = \frac{a}{8\mu} \left[\begin{array}{l} \frac{r}{a} (\kappa + 1) \cos \theta \\ + 2 \frac{a}{r} ((1 + \kappa) \cos \theta + \cos 3\theta) \\ - 2 \frac{a^3}{r^3} \cos 3\theta \end{array} \right] \quad (16-a)$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{a}{8\mu} \left[\begin{array}{l} \frac{r}{a} (\kappa - 3) \sin \theta \\ + 2 \frac{a}{r} ((1 - \kappa) \sin \theta + \sin 3\theta) \\ - 2 \frac{a^3}{r^3} \sin 3\theta \end{array} \right] \quad (16-b)$$

여기서 μ 는 Shear modulus 이고 κ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{plane strain}) \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{plane stress}) \end{cases} \quad (17)$$

Table 1 Relative error

| | |
|-----|---|
| | $\text{Error rate} \left(\frac{u - u_{exact}}{u_{exact}} \right) (\%)$ |
| NEM | 0.62 |
| FEM | 1.2 |

이론해로부터 계산된 표면력을 각 경계에 부가하고, 평면 변형률(Planestrain) 조건을 가정한다.

자연요소법의 검증은 동일한 해석 모델을 자연요소법과 유한요소법에 의한 해석결과를 비교하여 그 정확도를 측정한다.

작성되어진 프로그램을 이용하여 해석을 u 와 이론해 u_{exact} 와의 오차를 Table 1에 나타내었다. 이미 많은 논문에서 검증된 바가 있듯이 여기에서도 자연요소법이 유한요소법 보다 적은 절점을 이용하여 더 우수한 결과를 보였다. 절점을 더 추가하면 오차가 줄어들 것으로 예상되나 이번 논문에서의 관심은 자연요소법을 최적설계에 적용시키는 것이므로 오차를 줄이는 것에 대하여는 더 이상 고려하지 않는다.

4.1 최적설계문제 정의

제한조건식은 구조물에 정하중이 작용될 때의 변위량과 응력으로 하였다. 목적함수식과 구속조건식은 다음과 같다.

$$f(\vec{x}) = \sum_i \rho A_i t_i \tag{18-a}$$

$$g_{j1}(\vec{x}) = |u_j| - \bar{u} \leq 0 \tag{18-b}$$

$$g_{j2}(\vec{x}) = |v_j| - \bar{v} \leq 0 \tag{18-c}$$

$$g_i(\vec{x}) = |\sigma_i| - \bar{\sigma} \leq 0 \tag{18-d}$$

이때 u_j, v_j 는 j번째 절점에서의 x_1, x_2 방향 변위이며 \bar{u}, \bar{v} 는 각 방향변위의 상한치이다. σ_j 는 j번째 요소에 발생한 응력이고 $\bar{\sigma}$ 는 허용응력이다. 또한 ρ 는 재질의 단위 부피당 중량이고, A_i 및 t_i 는 I번째 부재의 면적과 두께이다.

최적설계 문제에 유전자 알고리즘 등의 최적화 기법을 적용시키기 위하여 Unconstrained

optimization problem으로 아래의 식과 같이 변환시킨다.

$$F' = f + r \left[\sum_{j=1}^n (g_{j1}^2 + g_{j2}^2) + \sum_{i=1}^m (g_i^2) \right] \tag{19}$$

여기서, r 은 벌칙계수(Penalty Parameter)이고, $\{g\}$ 함수는 함수의 부호에 따라 아래와 같이 정의된다.

$$g = \begin{cases} 0, & g \leq 0 \\ g, & g > 0 \end{cases} \tag{20}$$

F' 은 최적화가 될수록 작은 값을 취하게 되나, 최적설계의 판단기준이 되는 적합도는 최적화 될수록 크게 된다. 따라서 다음과 같이 변환시킨 새로운 적합도 F 가 정의된다.

$$F = \frac{C_1}{C_2 + F'} \tag{21}$$

단, C_1 및 C_2 는 적합도의 크기를 조절하기 위해 사용되는 상수이며 문제마다 적당한 값이 선정되어야 한다.

4.2 원공을 가진 무한 평판의 최적설계

자연요소법과 유한요소법을 각기 적용하여 최적설계한 후, 그 결과를 비교 검토해 본다. 최적설계에서 앞의 두 방법이 하는 역할은 동일하기 때문에 기존의 유한요소법을 사용하던 최적설계에서 유

Table 2 System parameter for the plate with a hole problem

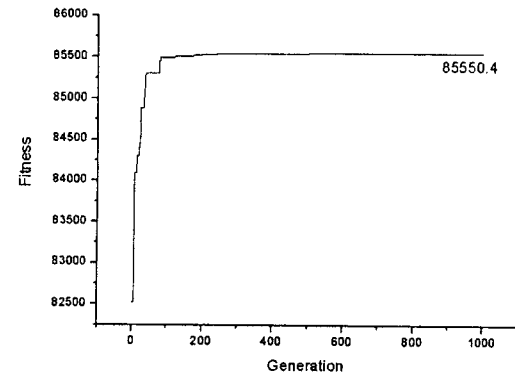
| | |
|------------------------|-----------|
| Generation | 1000 |
| Population | 100 |
| Mutation | 2% |
| Crossover | 85% |
| Design Parameter | 1 |
| upper boundary | 5 in |
| lower boundary | 0.001 in |
| Allowable Displacement | 1.0e-5 in |

한요소법 부분을 자연요소법으로 대체하여 계산을 수행한다. Fig. 1의 최적설계 순서도에서 Analysis 부분이 유한요소법 및 자연요소법이 적용되는 부분이 된다. 최적설계를 위해 이용되는 해석 모델은 앞의 자연요소법의 검증을 위해 사용된 Fig. 5와 동일한 모델을 사용하였다. System parameter는 Table 2에 나타내었다. 설계변수로는 단면적 t 로 설정을 하였고, 세대수는 1000세대, 모집단의 수는 100으로 계산을 수행하였다. 모델의 허용변위는 $1.0E-5$ in로 하여 자연요소법을 적용한 최적설계와 유한요소법을 적용한 최적설계 결과를 Fig. 6, Fig. 7 그리고 Fig. 8에서 비교해 보았다.

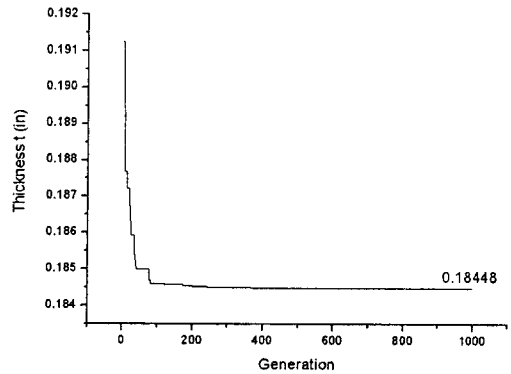
Fig. 6, Fig. 7 그리고 Fig. 8에서 최종 수렴된 값이 조금의 차이를 보이지만 이는 앞의 Table 1에서 보여지는 오차를 감안하면 무시할 수 있다고 생각된다. 또한 그래프가 완전히 일치하지 않는 것은 최적설계의 방법으로 사용된 유전자 알고리즘이 난수를 발생하여 계산하는 알고리즘이므로 매번 실행

마다 조금은 다른 결과를 보일 수 있다. 하지만 경향이나 수렴성 등을 고려할 때 최적설계에 자연요소법을 적용한 결과가 유전자 알고리즘의 전형적인 결과 그래프를 보이고 있어 자연요소법을 최적설계에 적용 가능함을 보였다. 그리고 자연요소법을 적용한 최적설계보다 유한요소법을 이용한 최적설계의 최적값이 조금 더 낮게 나왔는데 이는 유한요소법을 적용한 최적설계가 더 좋은 결과를 보인 것이 아니라 초기 신뢰성 검증에서 보였던 오차 때문이었다. 유한요소법을 이용한 최적설계에서 나온 결과를 식(16)의 이론식에 대입하여 계산을 수행하여 보면 허용변위인 $1.0E-5$ 을 초과하는 것을 볼 수 있다. 따라서 유한요소법을 적용한 최적설계가 자연요소법을 적용한 최적설계보다 더 좋은 결과를 보였다고 할 수 없다.

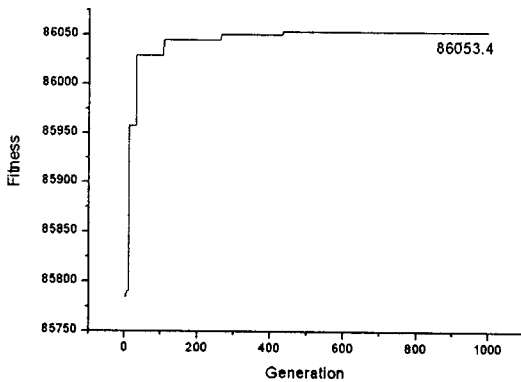
자연요소법을 적용한 최적설계의 신뢰성을 한번 더 검증하기 위해 자연요소법을 적용한 최적설계를 이용하여 얻은 결과와 최적설계 전의 초기 값



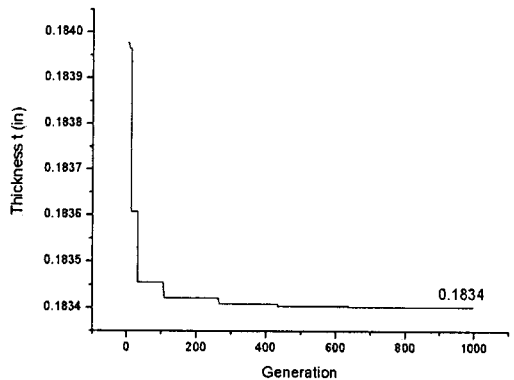
(a)



(a)



(b)



(b)

Fig. 6 Fitness History (a)NEM (b)FEM

Fig. 7 Design Variable History (a)NEM; (b)FEM

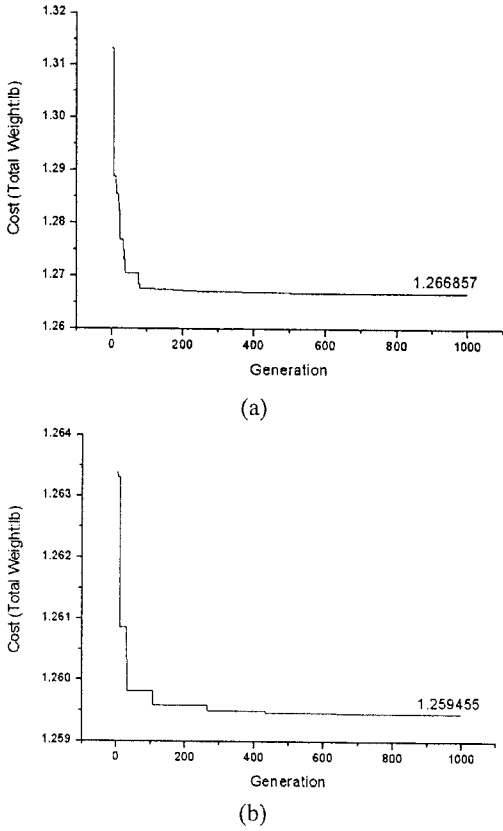


Fig. 8 Total Cost History (a)NEM; (b)FEM

을 Table 3에서 비교하였다. 최적설계를 통하여 얻어진 값이 허용변위인 $1.0E-5$ 을 초과하지 않은 최대값을 가지므로 최적설계가 올바르게 수행 되었다고 할 수 있다. 아래의 Fig. 9에서는 최적설계 전과 후의 응력 선도를 나타내었다. 최적화 전인 Fig. 9(a)에서는 최대응력이 원공의 상부에 집중되었으나 최적화 후인 Fig. 9(b)에서는 평판의 전체에 한계응력이 고루 분포되어 소재를 효율적으로 이용하였음을 알 수 있다.

Table 3 Result of optimal design with NEM

| | 최대 변위(in) | 비고 |
|--------|-----------|------------------------|
| 최적설계 전 | 0.3687E-5 | 경계조건 $u_a = 1.0E-5$ |
| 최적설계 후 | 0.9999E-5 | |

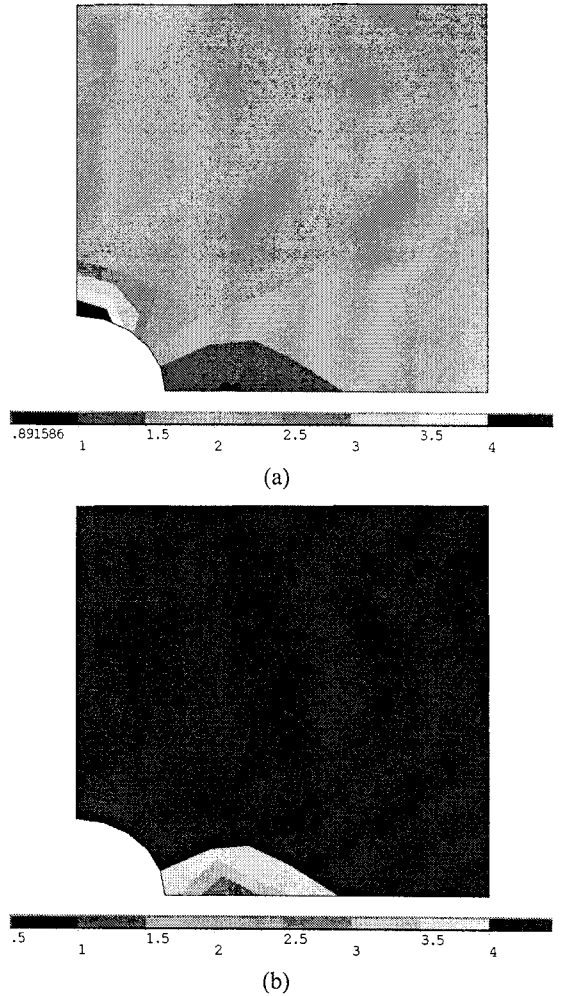


Fig. 9 Contour stress (a) Non-Optimal Design; (b) Optimal Design

5. 결론

이번 논문에서는 유전자 알고리즘을 이용한 최적설계에 유한요소법을 적용했을 때와 자연요소법을 적용하였을 때의 결과를 비교하여 최적설계에 자연요소법이 적용이 가능한지에 대해 연구하였다.

(1) 실제 모델을 적용하여 최적설계를 수행한 결과 자연요소법을 적용한 최적설계가 유한요소법을 적용한 최적설계와 차이를 거의 보이지 않아 자연요소법이 최적설계에 적용이 가능함을 입증하였다.

- (2) 가우스 구적법을 사용하여 배경격자 생성에 어려움을 겪어야 했던 유한요소법에 비해 자연요소법은 배경격자로서 델라우니 삼각형을 사용하였는데 이는 Laplace보간 함수를 구성하는 과정에서 생성되는 정보이기 때문에 이를 구성하기 위한 해석 비용 및 어려움이 증가하지 않는다는 장점이 있다.
- (3) 자연요소법은 같은 절점을 이용하여 유한요소법보다 더 나은 결과를 보인다는 장점이 있다.

위 결론들을 고려해 볼 때 자연요소법을 최적설계에 적용 가능하고 또 적용할 가치가 있다고 판단된다.

후 기

이 논문은 2007년 국립 창원대학교의 교내 연구비에 의해 연구되었음.

참고문헌

1. Sukumar, N., Moran, B. and Belytschko, T. "The Natural Element method in Solid Mechanics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, No. 5, pp. 839-887, 1998.
2. Green, P. J. and Sibson, R. "Computing Dirichlet tessellations in the plane," *The Computer Journal*, Vol. 21, No. 2, pp. 168-173, 1978.
3. Okabe, A. and Boots, B., Sugihara, K. "Spatial Tessellations: concepts and Applications of Voronoi Diagrams," John Wiley & Sons, 1992.
4. Belikov, V. V. and Semenov, A. Y. "Non-Sibsonian interpolation on arbitrary system of points in Euclidean space and adaptive isolines generation," *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 37, Issue 4, pp. 371-387, 2000.
5. Hiyoshi, H. and Sugihara, K. "Two generalizations of an interpolant based on Voronoi diagrams," *International Journal of Shape Modeling*, Vol. 5, No. 2, pp. 219-231, 1999.
6. Dolbow, J. and Belytschko, T. "Numerical integration of the Galerkin weak form in mesh-free methods," *Computational mechanics*, Vol. 23, No. 3, pp. 219-230, 1999.
7. Becker, E. B., Carey, G. F. and Oden, J. T.

"Finite Elements : An Introduction," Prentice-Hall, 1981.

8. Lee, H. W. and Jo, J. R. "The Petrov-Galerkin Natural Element method : I. Concepts," *Computational Structural Engineering Institute of Korea*, Vol. 18, No. 2, pp. 103-112, 2005.
9. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L. "Element-free Galerkin Methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, Issue 2, pp. 229-256, 1994.
10. Liu, W. K., Jun, J. and Zhang, Y. F. "Reproducing kernel particle methods," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, Issue 8-9, pp. 1081-1106, 1995.
11. Duarte, C. A. and Oden, J. T. "An h-p adaptive method using clouds," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, No. 1, pp. 237-262, 1996.
12. Melenk, J. M. and Babuska, I. "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, Issues 1-4, pp. 289-314, 1996.
13. Goldberg, D. E. "Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., pp. 59-72, 1989.
14. Sibson, R. "A vector identify for the Dirichlet tessellation," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 87, No. 1, pp. 151-155, 1980.