

<학술논문>

횡등방 압전재료의 면외하중 모서리 균열에 대한 그린함수

최 성 렬*

(2007년 9월 18일 접수, 2007년 12월 10일 심사완료)

Green's Function of Edge Crack in Transversely Isotropic Piezoelectric Material Under Anti-Plane Loads

Sung Ryul Choi

Key Words: Piezoelectric Material(압전재료), Anti-Plane Shear(면외전단), Electric Displacement(전기변위), Intensity Factor(강도계수)

Abstract

Surface edge crack in transversely isotropic piezoelectric material is analyzed. The concentrated antiplane mechanical and inplane electrical loadings are applied to an arbitrary point of the surface, where the impermeable crack boundary condition is imposed. Using Mellin transform the problem is formulated, from which Wiener-Hopf equations are derived. By solving the equations the solution is obtained in a closed form. Mechanical and electric intensity factors and energy release rate are obtained and discussed. This problem could be used as a Green's function to generate the solutions of other problems with the same geometry but of different loading conditions.

1. 서 론

압전재료는 응력에 의해 전하가 발생되고 전기장에 의해 변형이 발생하는 전기기계적인 고유특성을 지니는 재료로서 센서, 액추에이터, 지능형 구조물 등 많은 용도에 사용되고 있다. 압전성을 부여하기 위해 필요한 고전압하의 분극처리 과정에서 미소균열이 발생될 수 있고, 높은 취성과 또한 사용 중에 인가되는 반복적인 전기장으로 인해 피로균열이 발생된다. 이와 같은 결함은 재료 강도를 저하시키는 원인이 된다.

Parton⁽¹⁾이 압전재료의 간단한 균열문제를 고려한 이후로 국내외 많은 연구자에 의하여 횡등방(transversely isotropic) 압전체에 대한 면외 균열

문제가 해석되었다. 면외균열문제는 횡등방성 압전재료에서 분극방향과 직교하는 평면방향으로 전기장이 작용할 때, 이 전기장에 의해 면외 변형(anti-plane deformation)이 발생하게 되는 균열문제를 말한다.⁽²⁾ 압전재료의 해석은 이방성 재료일 뿐 아니라 기계 및 전기적 하중이 서로 연계되어 영향을 보이므로 단순한 이방성 탄성재료에 비하여 그 해석이 복잡하다.

압전균열 문제의 해석결과는 동일한 문제라고 하더라도 균열의 경계조건을 가정하는 모델에 따라 상반된 해석결과를 얻게 되고, 주로 절연균열(insulated crack) 모델과 도전균열(permeable crack) 모델이 사용되고 있다. 균열은 공기로 채워진 두께가 없는 타원형 공극이나 노치로 정의할 수 있다.^(3,4) 압전재료의 유전율이 공기보다 매우 크다는 사실에 근거하여 균열내의 전기장을 매우 작다고 두면, 균열면에 전기변위(electronic displacement)가 존재하지 않는다고 가정할 수 있다. 이와 같은 모델의 균열을 절연균열(insulated crack)이라고 한다. 한편 균열을 무시할 만한 두께의 전기적 도

* 책임저자, 회원, 영남대학교 기계공학부
E-mail : srchoi@yu.ac.kr
TEL : (053)810-2443 FAX : (053)810-4627

체라고 가정할 수 있는데, 균열상하면의 전위와 전기변위가 연속으로 가정한 균열을 도전균열(permeable crack)라고 한다.

파괴변수로서 사용되는 에너지 방출률(energy release rate)을 계산한 바에 의하면, 절연균열로 가정하면 전기적하중의 함수로 주어지고, 반면에 도전균열로 가정하면 전기적하중과 무관하다는 결과를 보인다. 이 결과는 전기적하중이 균열의 성장과 정지에 영향인자가 된다는 실험결과와 비교할 때 절연균열모델이 보다 적절하다는 결과도 있지만, 전기적 하중에 명확한 검증이 없으므로 두 조건 모두 해석에 사용되고 있다.^(2,4)

Pak^(2,5)은 기계적 전단하중과 전기적 평면하중이 작용하는 무한크기의 압전체에 대한 절연균열 문제를 복소함수이나 전위함수를 도입하여 균열 선단의 응력과 전기변위에 대한 엄밀해를 구하였다. 이로부터 응력, 변형률, 전기장 및 전기변위의 4개 장(field)에 대한 강도계수(intensity factor)와 에너지 방출률(energy release rate)을 구하고, 이들 파괴변수를 기준으로 균열의 안정성에 대하여 검토하였다. Sosa와 Pak⁽⁶⁾은 고유함수전개법을 이용하여 세 가지 모드에 대한 장의 점근거동을 구하였으며, Park과 Sun⁽⁷⁾은 복소함수를 사용하여 절연균열에 대한 세가지 파괴모드에 대한 장의 엄밀해와 파괴변수에 대하여 연구하였다.

Zhang과 Tong,⁽⁸⁾ Zhang과 Hack⁽⁹⁾은 무한 압전체에 대한 도전균열문제를 해석하고, 전기장 강도계수는 외력에 무관하게 영의 값이 되고, 에너지 방출률은 항상 양의 값이 되는 결과를 얻었다. Gao와 Fan⁽¹⁰⁾은 무한 압전체 내의 도전균열에 대한 일반해에 대하여 알아보았다.

압전체 스트립(strip)에 대한 균열문제로서, Kwon 등⁽¹¹⁻¹³⁾은 스트립 내에 평행균열이 존재하고 스트립 상하면에 기계 및 전기적 하중이 작용하는 면외문제를 해석하였으며, 스트립과 직교하는 수직균열에 대한 면외 및 면내문제는 각각 Shindo 등⁽¹⁴⁾과 Wang 및 Mai⁽⁴⁾에 의하여 해석되었다. Fourier 변환을 이용하여 적분방정식을 유도하고 이로부터 장의 강도계수와 에너지 방출률을 구하고, 재료의 물성치와 균열의 크기에 따른 영향을 알아보았다.

Kwon⁽¹⁵⁾은 원판에 내재된 직선균열문제를 Mellin 적분변환을 사용하여 해석하였다. 기타 쉘기균열 등⁽¹⁶⁻¹⁸⁾ 면외문제들이 해석되었으나, 압

전재료의 표면에 외력이 작용하여 표면에서 발생되는 모서리 균열(edge crack)에 대한 해석은 수행되지 않았다.

본 연구에서는 면외 기계하중과 면내 전기하중이 압전재료의 표면에 인가되어 압전재료의 표면에서 발생하는 모서리 균열문제를 해석하고자 한다. 균열의 경계조건은 절연균열조건으로 두었고, 압전재료 표면의 한 점에 기계적 집중하중과 전기적 집중하중이 작용하는 문제를 택하였다. 이 해석 결과는 임의로 분포하는 표면하중에 대해서도 해석이 가능한 Green 함수로 사용이 가능하다. Mellin적분변환을 사용하여 경계치문제를 수식화하고 해석함으로써 균열선단의 기계적 및 전기적 강도계수와 에너지 방출률에 대한 엄밀해를 구하고자 한다. 에너지 방출률에 대한 전기적 하중의 영향 및 기타 표면 하중조건에 대한 해에 대하여 알아본다.

2. 이론 및 전개

2.1 기본방정식

선형 압전이론을 따르는 횡등방 압전재료의 분극방향을 z 축으로 두면, xy 평면은 등방평면이 된다. 경계조건으로 면외 전단응력과 면내 전기변위 혹은 면내 전기장이 주어지는 문제에서는 면내 변위성분이 $u_x = u_y = 0$ 이 되어, 면외 변위 성분 u_z 및 전위 ϕ 가 존재하게 된다.⁽²⁾

해석의 편의를 위하여 극좌표계 (r, θ) 를 도입하고, 변위와 전위를 표현하면 다음과 같이 주어진다.

$$u_z = u_z(r, \theta), \quad \phi = \phi(r, \theta) \quad (1)$$

그러면 변형률 $(\gamma_{zr}, \gamma_{z\theta})$, 응력 $(\sigma_{zr}, \sigma_{z\theta})$ 및 전기장 (E_r, E_θ) 과 전기변위 (D_r, D_θ) 에 대한 구성방정식은 다음과 같이 표현된다.^(6,15,17)

$$\gamma_{zr}(r, \theta) = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \gamma_{z\theta}(r, \theta) = \frac{\partial u_z}{r \partial \theta}, \quad (2)$$

$$E_r(r, \theta) = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad E_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial \phi}{r \partial \theta}, \quad (3)$$

$$\sigma_{z\beta}(r, \theta) = C_{44}\gamma_{z\beta} - e_{15}E_\beta \quad (4)$$

$$D_\beta(r, \theta) = e_{15}\gamma_{z\beta} + \epsilon_{11}E_\beta \quad (5)$$

여기서 하첨자 β 는 $\beta = r, \theta$ 를 말한다. 또한 상수 C_{44} , e_{15} , ϵ_{11} 은 각각 전단계수, 압전상수 및 유전율을 나타낸다.

체적력과 자유전하가 없을 때 응력과 전기변위의 지배방정식을 u_z 및 ϕ 로 나타내면 다음의 Laplace 식을 만족한다.

$$\nabla^2 u_z \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u_z(r, \theta) = 0 \quad (6)$$

$$\nabla^2 \phi(r, \theta) = 0 \quad (7)$$

2.2 문제의 설정

Fig. 1은 해석하고자 하는 문제를 그림으로 보인 것으로서, 횡등방 압전재료의 표면인 정점 0를 기점으로 x축방향으로 길이 b 인 모서리 균열이 내재하고, 표면을 따라 거리 l 인 점에 집중전단하중 S_0 및 면내 집중 전기변위 D_0 가 작용하고 있다. 압전체의 영역을 균열면을 기준으로 윗부분과 아래 부분의 두 영역으로 구분한다.

표면에 대한 경계조건을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_{\theta z}(r, \pi/2) = S_0 \delta(r-l), \quad 0 < r < \infty \quad (8a)$$

$$\sigma_{\theta z}(r, -\pi/2) = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (8b)$$

$$D_\theta(r, \pi/2) = D_0 \delta(r-l), \quad 0 < r < \infty \quad (8c)$$

$$D_\theta(r, -\pi/2) = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (8d)$$

여기서 $\delta(\cdot)$ 는 델타함수를 말한다.

한편 균열면은 기계적하중이 작용하지 않고, 또한 표면전하가 존재하지 않는 절연균열 조건이라고 가정하면 다음의 식으로 표현된다.

$$\sigma_{\theta z}(r, 0^+) = \sigma_{\theta z}(r, 0^-) = 0, \quad 0 < r < b \quad (9a)$$

$$D_\theta(r, 0^+) = D_\theta(r, 0^-) = 0, \quad 0 < r < b \quad (9b)$$

또한 균열면을 제외한 x축 상의 재료는 다음과 같은 연속조건에 있게 된다.

$$\sigma_{\theta z}(r, 0^+) = \sigma_{\theta z}(r, 0^-), \quad b < r < \infty \quad (10a)$$

$$D_\theta(r, 0^+) = D_\theta(r, 0^-), \quad b < r < \infty \quad (10b)$$

$$u_z(r, 0^+) = u_z(r, 0^-), \quad b < r < \infty \quad (10c)$$

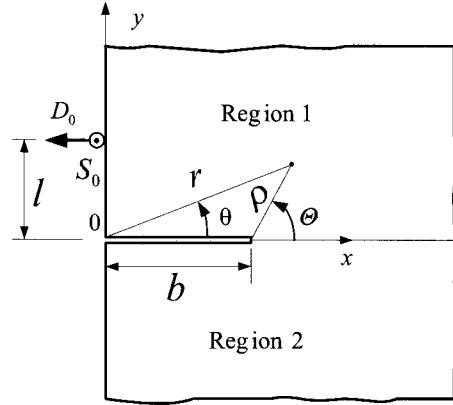


Fig. 1 Surface edge crack embedded into a transversely isotropic piezoelectric material under concentrated shear and electric displacement

$$\phi(r, 0^+) = \phi(r, 0^-), \quad b < r < \infty \quad (10d)$$

이때 응력 및 전기변위의 점근거동은 다음과 같다.

$$\sigma_{\theta z}, D_\theta \sim \begin{cases} r^{-\lambda} & as \quad r \rightarrow 0, \quad 0 < \lambda < 1/2 \\ r^{-1} & as \quad r \rightarrow \infty \\ (r-b)^{-1/2} & as \quad r \rightarrow b^+ \end{cases} \quad (11)$$

3. 적분변환 및 식의 풀이

3.1 Mellin 적분변환

변위 $u_z(r, \theta)$ 와 전위 $\phi(r, \theta)$ 의 r에 대한 Mellin 변환 $M\{u_z(r, \theta)\}$ 및 $M\{\phi(r, \theta)\}$ 를 각각 $\hat{u}_z(p, \theta)$, $\hat{\phi}(p, \theta)$ 라고 두면, 다음과 같이 정의 된다.⁽¹⁹⁾

$$\hat{u}_z(p, \theta) = M[u_z(r, \theta)] = \int_0^\infty u_z(r, \theta) r^{p-1} dr \quad (12)$$

$$\hat{\phi}(p, \theta) = M[\phi(r, \theta)] = \int_0^\infty \phi(r, \theta) r^{p-1} dr \quad (13)$$

$(\lambda - 1 < Re p < 0)$

여기서 적분이 존재하는 p의 실수부 $Re p$ 의 범위

는 점근거동 식 (11)로부터 구해진다.

식 (6), (7)을 각각 Mellin 변환하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + p^2\right) \hat{u}_z(p, \theta) = 0 \quad (14)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + p^2\right) \hat{\phi}_z(p, \theta) = 0 \quad (15)$$

식 (14) 및 식 (15)의 해를 영역별로 나누어 표기하면 다음과 같다.

$$\hat{u}_{z,j}(p, \theta) = A_j(p) \cos \theta p + B_j(p) \sin \theta p \quad (16)$$

$$\hat{\phi}_j(p, \theta) = C_j(p) \cos \theta p + D_j(p) \sin \theta p \quad (17)$$

($j = 1, 2$)

여기서 $A_j(p) \sim D_j(p)$ ($j = 1, 2$)는 경계조건으로부터 결정되어야 할 미지함수들이다.

일단 식 (16), (17)의 미지함수들이 결정된다면 Mellin 역변환에 의하여 변위 $u_z(r, \theta)$ 와 전위 $\phi(r, \theta)$ 가 결정된다. 이에 대한 변위 및 전위의 형식적인 표현식을 나타내면 다음과 같다.

$$u_z(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{u}_z(p, \theta) r^{-p} dp \quad (18)$$

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{\phi}(p, \theta) r^{-p} dp \quad (19)$$

($\lambda - 1 < c < 0, \quad 0 < \lambda < 1/2$)

식 (16), (17)의 미지함수 $A_j(p) \sim D_j(p)$ ($j = 1, 2$)를 결정하기 위하여, 경계조건 식 (8)~(10)를 Mellin 변환하고 새로운 미지함수를 도입하여 정리하면, 미지함수들 $T_+(p), M_+(p)$ 및 $I_-(p), H_-(p)$ 에 대한 두 쌍의 단일 Wiener-Hopf 식을 얻는다.

$$T_+(p) = K(p)I_-(p) + L(p) \quad (20)$$

$$M_+(p) = K(p)H_-(p) + R(p) \quad (21)$$

여기서 커널함수는 각각 다음과 같고,

$$K(p) = \frac{2 \cos(\pi p/2)}{\Lambda p \sin(\pi p/2)} \quad (22a)$$

$$L(p) = \frac{Q_1}{Q_2} R(p) = \frac{-Q_1}{\Lambda p \sin(\pi p/2)} \left(\frac{l}{b}\right)^p \quad (22b)$$

상수는 다음을 말한다.

$$\Lambda = \epsilon_{11} C_{44} + e_{15}^2 \quad (23a)$$

$$Q_1 = \epsilon_{11} S_0 + e_{15} D_0 \quad (23b)$$

$$Q_2 = e_{15} S_0 - C_{44} D_0 \quad (23c)$$

식 (20), (21)내의 함수 $T_+(p), M_+(p)$ 는

$$T_+(p) = \int_0^1 [u_z(b\xi, 0^+) - u_z(b\xi, 0^-)] \xi^{p-1} d\xi \quad (24a)$$

$$M_+(p) = \int_0^1 [\phi(b\xi, 0^+) - \phi(b\xi, 0^-)] \xi^{p-1} d\xi \quad (24b)$$

로 정의된 새로운 미지함수로서 식 (11)로부터 $Re p > \lambda - 1$ ($0 < \lambda < 1/2$)에서 해석적임을 안다.

한편 $Re p < 0$ 에서 해석적인 $I_-(p), H_-(p)$ 는 다음과 같이 정의되는 새로운 미지함수 $G_-(p), J_-(p)$ 와 일차결함으로 표현되는 미지함수로서, 다음과 같이 정의된다.

$$G_-(p) = b \int_1^\infty \sigma_{\theta z}(b\xi, 0) \xi^p d\xi \quad (24c)$$

$$J_-(p) = b \int_1^\infty D_\theta(b\xi, 0) \xi^p d\xi \quad (24d)$$

$$I_-(p) = \epsilon_{11} G_-(p) + e_{15} J_-(p) \quad (24e)$$

$$H_-(p) = e_{15} G_-(p) - C_{44} J_-(p) \quad (24f)$$

또한 미지함수 $A_j(p) \sim D_j(p)$ ($j = 1, 2$)는 식 (24)에서 정의된 미지함수 $I_-(p), H_-(p)$ 와 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$A_1(p) = \frac{b^p I_-(p) \cos(\pi p/2) - Q_1 l^p}{\Lambda p \sin(\pi p/2)} \quad (25a)$$

$$B_1(p) = B_2(p) = b^p I_-(p) / \Lambda p \quad (25b)$$

$$C_1(p) = \frac{b^p H_-(p) \cos(\pi p/2) - Q_2 l^p}{\Lambda p \sin(\pi p/2)} \quad (25c)$$

$$D_1(p) = D_2(p) = b^p H_-(p) / \Lambda p \quad (25d)$$

$$A_2(p) = -b^p I_-(p) \cos(\pi p/2) / \Lambda p \sin(\pi p/2) \quad (25e)$$

$$C_2(p) = -b^p H_-(p) \cos(\pi p/2) / \Lambda p \sin(\pi p/2) \quad (25f)$$

식 (25)의 함수 $A_j(p) \sim D_j(p)$ ($j = 1, 2$)는 미지함수 $I_-(p)$, $H_-(p)$ 로 주어져 있으므로, 일단 Wiener-Hopf식 (20), (21)의 해를 구함으로써 미지함수 $T_+(p), M_+(p)$ 및 $I_-(p)$, $H_-(p)$ 가 결정되면, 식 (25)에 의하여 미지함수 $A_j(p) \sim D_j(p)$ ($j = 1, 2$)가 모두 결정된다. 이 결과를 식 (16), (17)에 대입하면 Mellin 변환된 변위와 전위 $\hat{u}_z(p, \theta)$, $\hat{\phi}(p, \theta)$ 를 얻고, 이를 Mellin역 변환식 (18), (19)에 대입하여 적분식을 평가하면, 변위와 전위에 대한 엄밀해를 얻을 수 있다. 이를 위하여 먼저 Wiener-Hopf식의 풀이가 필요하다.

3.2 Wiener-Hopf 식의 풀이

Noble의 저서⁽¹⁹⁾에 서술된 방법을 사용하면 식 (20), (21)로 주어진 Wiener-Hopf 식의 해가 구성될 수 있고, 이를 이용하여 해석한 이전의 연구^(20,21) 과정을 따르면 용이하게 결정된다. 그 절차를 간단히 설명하면 다음과 같다. 복소평면에서 공동영역이 존재하는 두 영역인 좌반과 우반영역에서 각각 해석적인 미지함수가 있고, 이 미지함수가 알고 있는 함수와 방정식으로 구성되어 있다면, 이 방정식을 적절히 분리하여 좌반과 우반영역에서 각각 해석적인 함수군으로 나눌 수 있다. 이들 두 함수군은 해석적인 공동영역이 존재하므로, 해석적접속이론에 의하여 두 함수군을 전평면에서 해석적인 한 개의 전함수(entire function)로 둘 수 있다. 이 전함수를 결정하여 등식관계로 두면 미지함수를 얻게 된다.

먼저 식 (20)의 $T_+(p), I_-(p)$ 에 대한 해를 구하기 위하여 $K(p)$ 를 p 의 좌우반 평면에서 각각 해석적인 함수의 곱으로 분해하면 다음과 같다.

$$K(p) = K_-(p)/K_+(p); \tag{26a}$$

$$K_+(p) = \frac{2p}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((1+p)/2)}{\Gamma(p/2)} \tag{26b}$$

$$= \frac{4}{\Lambda\pi} \frac{p^2}{K_-(-p)}$$

이때 $\Gamma(\cdot)$ 는 Gamma 함수를 말하고, $K_+(p)$ 는 $Re p > -1/2$ 에서, $K_-(p)$ 는 $Re p < 1/2$ 에서 각각 해석적이다. 이하 동일하게 하첨자를 사용하여 p 의 좌반 및 우반평면에 대한 해석함수를 구분하

여 표기한다.

식 (20)의 양변에 $K_+(p)$ 를 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$K_+(p)T_+(p) = K_-(p)I_-(p) + K_+(p)L(p) \tag{27}$$

식 (27)의 우변 둘째항을 p 의 좌우 반평면에서 각각 해석적인 함수의 합으로 분해하면 다음과 같다.

$$K_+(p)L(p) = L_-(p) + L_+(p); \tag{28a}$$

$$L_-(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{p - p_n} \quad \text{for } l/b < 1 \tag{28b}$$

$$L_+(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p + \xi_n} \quad \text{for } l/b > 1 \tag{28c}$$

여기서 상수 a_n, b_n 은 다음을 말한다.

$$b_n = \lim_{p \rightarrow p_n} (p - p_n)K_+(p)L(p) \tag{28d}$$

$$a_n = \lim_{p \rightarrow -\xi_n} (p + \xi_n)K_+(p)L(p) \tag{28e}$$

$$p_n = 2n, \quad \xi_n = 2n - 1 \tag{28f}$$

식 (28a)를 식 (27)에 대입하면 다음으로 정리된다.

$$K_+(p)T_+(p) - L_+(p) = K_-(p)I_-(p) + L_-(p) = \Omega \tag{29}$$

이 식의 좌변은 $Re p > -1/2$ 에서 해석적이고 우변은 $Re p < 0$ 에서 해석적이므로, 해석적접속이론에 의하여 식 (29)의 양변은 p 의 전평면에서 해석적인 전함수가 되고 이를 상수 Ω 로 두었다.

식 (29)의 좌변에 $p=0$ 을 대입하여 계산하면, 상수 Ω 는 다음과 같이 결정된다.

$$\Omega = -L_+(0) \tag{30}$$

식 (28)을 사용하여 구체적으로 계산하면 $L_+(0)$ 은 다음의 값으로 얻어진다.

$$L_+(0) = \frac{-2Q_1}{\Lambda\pi} \frac{b}{\sqrt{l^2 + b^2}} \quad (\text{for any } b/l) \tag{31}$$

최종적으로 식 (29)와 식 (30)으로부터 미지함

수 $T_+(p), I_-(p)$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$T_+(p) = [\Omega + L_+(p)]/K_+(p) \quad (32a)$$

$$I_-(p) = [\Omega - L_-(p)]/K_-(p) \quad (32b)$$

동일한 방법을 따르면 Wiener-Hopf 식 (21) 해가 결정된다. 특히 식 (22)에서 보듯이 커널함수가 서로 비례 관계에 있으므로 계산이 보다 용이하다. 식 (21)의 해 $M_+(p), H_-(p)$ 는 다음과 같다.

$$M_+(p) = \frac{Q_2}{Q_1} T_+(p) \quad (33a)$$

$$H_-(p) = \frac{Q_2}{Q_1} I_-(p) \quad (33b)$$

식 (33)의 우변에 대한 상수 및 함수는 각각 식 (23) 및 식 (32)를 말한다.

4. 해석결과

4.1 균열선단 해

식 (25)를 식 (16)에 대입하여 정리하면 영역1 및 영역2에 대한 적분변환된 변위 $\hat{u}_z(p, \theta)$ 는 다음과 같다.

$$\hat{u}_{z1}(p, \theta) \quad (34a)$$

$$= \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)p}{2\cos(\pi p/2)} b^p T_+(p) - \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)p}{\Lambda p \sin(\pi p)} Q_1 l^p$$

$$\hat{u}_{z2}(p, \theta)$$

$$= \frac{-\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)p}{2\cos(\pi p/2)} b^p T_+(p) - \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)p}{\Lambda p \sin(\pi p)} Q_1 l^p \quad (34b)$$

같은 방법으로 식 (25)를 식 (17)에 대입하여 각 영역에 대한 적분 변환된 전위 $\hat{\phi}(p, \theta)$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$\hat{\phi}_1(p, \theta)$$

$$= \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)p}{2\cos(\pi p/2)} b^p M_+(p) - \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)p}{\Lambda p \sin(\pi p)} Q_2 l^p \quad (35a)$$

$$\hat{\phi}_2(p, \theta)$$

$$= \frac{-\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)p}{2\cos(\pi p/2)} b^p M_+(p) - \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)p}{\Lambda p \sin(\pi p)} Q_2 l^p \quad (35b)$$

압전재료에서 취약한 부분은 응력 및 전기변위가 특이성(singularity)을 보이는 균열선단이 되므로, 균열선단에 대한 변위와 전위의 점근거동이 요구된다.

Fig. 1에서 보는 바와 같이 극좌표계로 $r \rightarrow b, \theta \rightarrow 0$ 에 해당하는 균열선단은 국부 극좌표계 (ρ, Θ) 로는 $\rho \rightarrow 0, -\pi \leq \Theta \leq \pi$ 에 해당하며, 이들의 점근관계는 다음과 같이 주어진다.

$$r = b(1 + \frac{\rho}{b} \cos \Theta) + O[(\rho/b)^2] \quad (36a)$$

$$\theta = \frac{\rho}{b} \sin \Theta + O[(\rho/b)^2] \quad (36b)$$

식 (34), (35)를 Mellin 역변환 식 (18), (19)에 각각 대입하고 식 (36)을 적용하여 적분경로를 세 개의 구간으로 나누어 적분식을 평가하면, 균열선단 변위 $u_z(\rho, \Theta)$ 및 전위 $\phi(\rho, \Theta)$ 에 대한 점근해는 다음과 같이 결정된다.

$$u_z(\rho, \Theta) = c_0 + \Omega \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2b}} \sin \frac{\Theta}{2} + O(\rho) \quad (37)$$

$(-\pi \leq \Theta \leq \pi)$

$$\phi(\rho, \Theta) = d_0 + \Omega \frac{Q_2}{Q_1} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2b}} \sin \frac{\Theta}{2} + O(\rho) \quad (38)$$

$(-\pi \leq \Theta \leq \pi)$

식 (37), (38)을 구하는 과정은 기존의 연구^(20,21)와 동일하므로, 보다 자세한 것은 이를 참조하기 바란다. 식 (37), (38)의 우변 첫째항 c_0, d_0 는 응력과 전기장에는 기여하는 바가 없는 적분상수를 나타낸 것이고, 둘째항인 $\sqrt{\rho}$ 항은 응력장 및 전기장의 특이치를 나타내는 항을 말하고, 셋째항 $O(\rho)$ 는 ρ 의 1차 항 이상을 묶어서 표현한 항으로서 균열선단의 특이치에 기여하는 바가 없는 항을 말한다.

4.2 강도계수와 에너지 방출률

국부 극좌표계로 표현되는 균열선단의 변형률

$\gamma_{\theta z}$, 전기장 E_{θ} 과 변위 u_z , 전위 ϕ 에 대한 관계식과 응력 $\sigma_{\theta z}$ 과 전기변위 D_{θ} 에 대한 구성식은 식 (2)~(5)의 도움으로 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_z}{\rho \partial \theta} \quad (39a)$$

$$E_{\theta} = -\frac{\partial \phi}{\rho \partial \theta} \quad (39b)$$

$$\sigma_{\theta z} = C_{44}\gamma_{\theta z} - e_{15}E_{\theta} \quad (40a)$$

$$D_{\theta} = e_{15}\gamma_{\theta z} + \epsilon_{11}E_{\theta} \quad (40b)$$

식 (37), (38)을 식 (39a,b),(40a,b)에 각각 대입하여 4개 장에 대한 균열선단 부근의 점근거동을 구하면 다음과 같이 얻어진다.

$$\gamma_{\theta z}(\rho, \theta) = \frac{\partial u_z(\rho, \theta)}{\rho \partial \theta} = \frac{K^{\gamma}}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (41a)$$

$$E_{\theta}(\rho, \theta) = -\frac{\partial \phi(\rho, \theta)}{\rho \partial \theta} = \frac{K^E}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (41b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}(\rho, \theta) &= C_{44}\gamma_{\theta z} - e_{15}E_{\theta} \\ &= \frac{K^{\sigma}}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (41c)$$

$$\begin{aligned} D_{\theta}(\rho, \theta) &= e_{15}\gamma_{\theta z} + \epsilon_{11}E_{\theta} \\ &= \frac{K^D}{\sqrt{2\pi\rho}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (41d)$$

여기서 K^{γ} 는 변형률 강도계수, K^E 는 전기장 강도계수를 말하며, 또한 K^{σ} 는 응력강도계수, K^D 는 전기변위 강도계수를 말하며, 다음과 같이 계산된다.

$$K^{\gamma} = \frac{[\epsilon_{11}S_0 + e_{15}D_0] \sqrt{b}}{\Lambda \sqrt{\pi(l^2 + b^2)}} \quad (42a)$$

$$K^E = \frac{[-e_{15}S_0 + C_{44}D_0] \sqrt{b}}{\Lambda \sqrt{\pi(l^2 + b^2)}} \quad (42b)$$

$$K^{\sigma} = \frac{S_0 \sqrt{b}}{\sqrt{\pi(l^2 + b^2)}} \quad (42c)$$

$$K^D = \frac{D_0 \sqrt{b}}{\sqrt{\pi(l^2 + b^2)}} \quad (42d)$$

한편 선형 압전재료에 대한 에너지 방출률 J 와 강도계수의 관계는 다음과 같이 표현된다.⁽²⁾

$$J = \frac{1}{2} [K^{\sigma} K^{\gamma} - K^D K^E] \quad (43)$$

식 (43)에 식 (42)를 대입하면 에너지 방출률 J 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} J &= \frac{f^2}{2\Lambda} [\epsilon_{11}S_0^2 + 2e_{15}S_0D_0 - C_{44}D_0^2] \\ f &= \sqrt{b} / \sqrt{\pi(l^2 + b^2)} \end{aligned} \quad (44)$$

5. 결과에 대한 논의

5.1 강도계수

식 (41)에서 보는 바와 같이 4개 장은 균열선단의 주위에서 $1/\sqrt{\rho}$ 의 특이성을 보이고 있으며 장의 식이 기존 연구자의 결과와 일치한다.^(2,6)

4개 성분에 대한 강도계수 식 (42)는 Fig. 1에 대한 해가 된다. 균열길이 b 및 하중거리 l 가 증가할수록 강도계수는 감소를 보이고 있다.

기존 연구자의 연구결과^(2,7)에 의하면, 무한 압전체에 대하여 무한 거리에 가해진 등분포 외력과 이들 변수와 동일하게 대응되는 강도계수는 재료물성치 뿐 아니라 다른 변수의 외력에 무관함을 보였다. 실제로 이들의 주장을 식 (42)에 적용하여 비교하면 정성적으로 일치하는 결과를 얻을 수 있다. 본문제의 경우 외력으로 집중전단하중 S_0 와 집중 전기변위 D_0 가 작용하고 있다. S_0 및 D_0 에 대응하는 동일 성분의 강도계수는 응력강도계수 K^{σ} 와 전기변위 강도계수 K^D 가 된다. 식 (42)에서 K^{σ} 및 K^D 는 압전재료의 물성치에 무관하고 각각 S_0 및 D_0 만의 함수로 주어짐을 알 수 있어서 기존 연구자의 주장과 일치하고 있음을 확인할 수 있다.^(2,7)

또한 특수한 경우로서 알고 있는 기존의 탄성해와 비교함으로써 식 (42)를 정량적으로 검증할 수 있다. 탄성해는 집중전단하중 S_0 ($D_0 = 0$)만 작용하고, 재료가 압전성을 상실하는 경우의 해에 대응하게 된다. 실제로 식 (42)에 상수 $\epsilon_{11} = e_{15} = 0$ 와 $D_0 = 0$ 을 대입함으로써 얻은 결과는 다음과 같이 탄성해로 수렴됨 알 수 있다.^(21,22)

$$K^{\sigma} = \frac{S_0 \sqrt{b}}{\sqrt{\pi(l^2 + b^2)}}, K^{\gamma} = K^{\sigma} / C_{44}, K^E = K^D = 0 \quad (45)$$

지금까지의 결과를 이용하면, 탄성문제에 대한 해를 알고 있을 때는 반무한 압전재료에서도, 탄성해를 이용하여 복잡한 해석 없이 그 해를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 즉, 전단응력과 전기변위가 외력으로 주어진 문제라고 하면, K^{σ} 는 탄성해와 동일하므로 알 수 있고, 또한 K^D 는 응력강도계수에서 알 수 있다. 그러면 K^{γ} 및 K^E 는 구성방정식에서 결정이 되므로, 결국 4개의 강도계수를 결정할 수 있게 된다.

5.2 에너지 방출률

파괴변수인 에너지 방출률 J 는 식 (44)에서 보는 바와 같이, 압전재료의 물성치 및 전단응력과 전기변위의 함수로 표현되고 있다. 형상함수 f 를 제외한 식 (44)의 함수값은 D_0 에 대한 2차식으로 주어지고, 이는 무한크기의 압전재료에 해석결과와 유사한 모양을 하고 있다.^(2,5) 전단하중 S_0 가 주어질 때, J 는 전기변위 D_0 의 크기와 방향의 함수가 됨을 알 수 있다. J 가 양의 값이 되는 D_0/S_0 구간은 다음과 같이 계산된다.

$$-\frac{\sqrt{e_{12}^2 + \epsilon_{11}C_{44}} - e_{15}}{C_{44}} < \frac{D_0}{S_0} < \frac{\sqrt{e_{12}^2 + \epsilon_{11}C_{44}} + e_{15}}{C_{44}} \quad (46)$$

Fig. 2는 주어진 전단하중 S_0 에 대하여 D_0 의 변화에 따른 식 (44)의 J 를 그림으로 나타낸 것이다. 수치계산에 사용된 압전재료는 PZT(lead zirconate titante)로서 물성치는 다음과 같다.

$$C_{44} = 3.53 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad e_{15} = 17.0 \text{ C/m}^2 \quad (47)$$

$$\epsilon_{11} = 151 \times 10^{-10} \text{ C/Vm}, \quad J_{cr} = 5.0 \text{ N/m}$$

이때 균열길이 및 전단하중의 크기(Fig. 1 참조)는 다음과 같은 값으로 택하였다.

$$b = 0.01\text{m}, \quad l = 0.05\text{m} \quad (48)$$

$$S_0 = 6.6 \times 10^5 \text{ N/m}$$

식 (47) 내의 J_{cr} 은 임계 에너지 방출률을 말하고, $J > J_{cr}$ 에서는 균열이 성장하고, $J < J_{cr}$ 에서는 균열이 정지가 됨을 의미한다.

Fig. 2을 보면 $D_0 = 0$ 일 때 $J = J_{cr}$ 에 도달하고

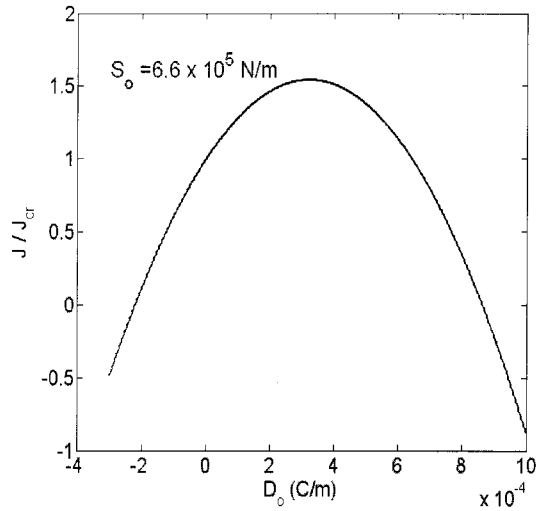


Fig. 2 Energy release rate in PZT material as a function of electric displacement D_0 in a given mechanical shear load

있는 균열이 있다고 할 때, D_0 가 증가함에 따라 J 는 단조증가 및 단조감소를 보여, 전기변위 D_0 에 따라 균열성장과 정지가 발생할 수 있음을 보여주고 있다. $0 < D_0 < 6.4 \times 10^{-4}$ 구간에서는 $J > J_{cr}$ 이 되어 균열이 성장하는 구간이고, $D_0 > 6.4 \times 10^{-4}$ 에서는 균열이 정지가 발생하는 구간임을 알 수 있다. $D_0 = e_{15}S_0/C_{44} = 2.8 \times 10^{-4} \text{ C/m}$ 에서 최대값 $J_{max} = 8.4 \text{ N/m}$ 을 이 되고, $-2.2 \times 10^{-4} < D_0 < 8.6 \times 10^{-4}$ 를 제외한 구간에서는 $J < 0$ 을 보이고 있다. 이처럼 D_0 의 값에 따라 균열성장과 정지가 발생하는 결과는 무한 압전체의 균열문제 해석결과와 일치하고 있다.^(2,5)

6. 결과의 응용

6.1 분포하중문제

Fig. 1에서 압전체의 표면을 따라 만일 외력으로 전단응력 $\sigma_{zx}(x=0, y)$ 및 전기변위 $D_x(x=0, y)$ 가 임의로 분포한다고 하면, 본 연구의 집중하중에 대한 해를 중첩함으로써 그 해를 얻을 수 있다. 이 때 집중하중의 해를 임의 분포하중에

대한 Green 함수라고 한다. 이와 같은 분포하중에 대하여, Green 함수를 사용하여 해를 구성하면, 응력강도계수 K^σ 와 전기변위 강도계수 K^D 는 식 (42c,d)의 도움으로 다음과 같이 적분 형으로 표현된다.

$$K^\sigma = \int_0^\infty \frac{\sigma_{zx}(x=0,y)\sqrt{b}}{\sqrt{\pi(y^2+b^2)}} dy \quad (49)$$

$$K^D = \int_0^\infty \frac{-D_x(x=0,y)\sqrt{b}}{\sqrt{\pi(y^2+b^2)}} dy$$

만일 $0 < y < l$ 구간에서 등분포 전단응력 $\sigma_{zx} = \sigma_0$, 등분포 전기변위 $D_x = -D_0$ 가 작용한다면 식 (49)로부터 K^σ 및 K^D 는 $K^\sigma = \sigma_0 \sqrt{b} \tan^{-1}(l/b)$, $K^D = D_0 \sqrt{b} \tan^{-1}(l/b)$ 으로 계산된다.

6.2. 등가 경계치 문제

표면에 대한 경계조건으로 4가지 경우가 있을 수 있다. 한 가지는 4장에서 이미 해석하였고, 나머지 경우는 별도의 해석 없이 4장의 결과를 가지고 해석할 수 있음을 보이고자 한다. Fig. 1에서 $\theta = \pi/2, r = l$ 인 표면에 가해질 수 있는 기계 및 전기적 하중을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Case 1, } & \sigma_{\theta z} = S_0 \delta(r-l), D_\theta = D_0 \delta(r-l) \\ \text{Case 2, } & \sigma_{\theta z} = S_0 \delta(r-l), E_\theta = E_0 \delta(r-l) \\ \text{Case 3, } & \gamma_{\theta z} = \gamma_0 \delta(r-l), D_\theta = D_0 \delta(r-l) \\ \text{Case 4, } & \gamma_{\theta z} = \gamma_0 \delta(r-l), E_\theta = E_0 \delta(r-l) \end{aligned} \quad (50)$$

식 (50)에서 S_0, D_0 는 집중 전단하중과 집중 전기변위이고, γ_0, E_0 는 각각 집중 전단변형률과 집중 전기장을 말한다.

식 (50)의 case1은 4장에서 해석하였고, 나머지 Case2~Case4에 대해 각각 4개 독립변수에 대한 구성방정식 (4),(5)에 대입하여 연립하면, Case1에 해당되는 등가의 문제로 회귀될 수 있다. 이때 계산된 각 경우의 S_0, D_0 는 다음과 같이 주어진다.

$$\text{Case 1, } S_0 = S_0, D_0 = D_0$$

$$\text{Case 2, } S_0 = S_0, D_0 = [e_{15}S_0 + \Lambda E_0]/C_{44}$$

$$\text{Case 3, } S_0 = [\gamma_0 \Lambda - e_{15}D_0]/\epsilon_{11}, D_0 = D_0$$

$$\text{Case 4, } S_0 = C_{44}\gamma_0 - e_{15}E_0, D_0 = e_{15}\gamma_0 + \epsilon_{11}E_0 \quad (51)$$

식 (51)을 강도계수 식 (42c,d)에 대입하면 각 경우에 대한 응력 및 전기변위 강도계수, K^σ 및 K^D 를 얻고, 또한 구성방정식 혹은 식 (42a,b)에 대입하면 변형률 및 전기장 강도계수 K^γ, K^E 를 얻을 수 있다. 이 4개의 강도계수를 식 (43)에 대입하면 Case2~Case4의 각 경우에 대한 에너지 방출률 J 을 계산할 수 있다.

7. 결 론

횡등방성 압전재료의 표면에서 발생되는 모서리 균열문제를 해석하였다. 압전체의 표면에 면외 집중하중과 면내 집중 전기변위가 작용하고, 이때 균열조건은 절연조건으로 두었다.

Mellin적분 변환을 사용하여 경계치문제를 수식화하고 두 쌍의 단일 Wiener-Hopf 식을 유도하여 해를 구하고, 균열전단의 변위와 전위의 점근거동을 구하였다. 이로부터 기계 및 전기적 강도계수와 에너지 방출률에 대한 폐형 해를 얻었다.

특히 응력강도계수는 압전재료의 물성치에 무관하고 다만 면외 집중하중만의 함수로 주어지고, 이는 탄성해와 일치함을 알 수 있었다. 또한 전기변위 강도계수는 집중 전기변위 제외한 식은 응력강도계수와 동일함을 알 수 있었다. 이로부터 동일 기하모양의 균열에 대한 탄성 해를 안다면, 복잡한 해석 없이도 압전체의 엄밀해를 얻을 수 있다는 무한 고체물에 대한 연구 결과가 본 문제와 같은 반무한 압전체에서도 적용될 수 있음을 확인하였다.

본 연구의 해는 동일한 균열에 임의로 분포하는 표면 하중에 대해서도 그 해석이 가능한 Green 함수가 됨을 알 수 있었다. 또한 본 연구의 해석결과로부터 표면의 경계조건으로 있을 수 있는 4가지 경계조건에 대한 해를 구성할 수 있음을 보였다.

에너지 방출률은 압전재료 물성치와 전단하중

및 전기변위의 함수로 주어짐을 보였고, 기존 연구자의 결과와 같이, 주어진 전단하중에서 전기변위의 크기에 따라 균열의 성장과 정지가 일어날 수 있음을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) Parton, V. Z., 1976, "Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *Acta Astronautica*, Vol. 3, pp. 671~683.
- (2) Pak, Y. E., 1990, "Crack Extension Force in a Piezoelectric Materials," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 647~653.
- (3) Suo, Z., Kuo, C.M., Barnet, D.M., Willis, J.R., 1992, "Fracture Mechanics for Piezoelectric Ceramics," *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 57, pp. 647~653.
- (4) Wang, B.L., Mai, Y.-W., 2002, "A Piezoelectric Material Strip with a Crack Perpendicular to its Boundary Surfaces," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 4501~4524.
- (5) Pak, Y. E., 1992, "Linear Electro-elastic Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *Int. J. Frac.*, Vol. 54, pp. 79~100.
- (6) Sosa, H. A. and Pak, Y. E., 1990, "Three-Dimensional Eigenfunction Analysis of a Crack in a Piezoelectric Material," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 26, No.1, pp. 1~15.
- (7) Park, S.B. and Sun, C.T., 1995, "Effect of Electric Field on Fracture of Piezoelectric Ceramics," *International Journal of Fracture*, Vol. 70, pp. 203~216.
- (8) Zhang, T. -Y and Tong, P., 1996, "Fracture Mechanics for a Mode III Crack in a Piezoelectric Material," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 33, No.3, pp. 343~359.
- (9) Zhang, T. -Y and Hack, J.E., 1992, "Mode-III Cracks in Piezoelectric Materials," *J. Appl. Phys.*, Vol. 71, No.12, pp. 5865~5870.
- (10) Gao, C.-F. and Fan, W.-X., 1999, "A General Solution for the Plane Problem in Piezoelectric Media with Collinear Cracks," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 37, pp. 347~363.
- (11) Kwon, J. H., Kwon, S. M., Shin, J. W. and Lee, K. Y., 2000, "Determination of Intensity Factors in Piezoelectric Ceramic Strip with Impermeable Crack," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 24, No. 6, pp. 1601~1607.
- (12) Kwon, S. M. and Lee, K. Y., 2000, "Analysis of Stress and Electric Fields in a Rectangular Piezoelectric Body with a Center Crack Under Anti-Plane Shear Loading," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 37, pp. 4859~4869.
- (13) Shin, J. W., Kwon, S. M. and Lee, K. Y., 2001, "Eccentric Crack in a Piezoelectric Strip Under Electro-Mechanical Loading," *KSME International Journal*, Vol. 15, No. 1, pp. 21~25.
- (14) Shindo, Y., Narita, F. and Tanaka, K., 1996, "Electroelastic Intensification Near Anti-Plane Shear Crack in Orthotropic Piezoelectric Ceramic Strip," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 25, pp. 65~71.
- (15) Kwon, J. H., 2004, "Central Crack in a Piezoelectric Disc," *KSME International Journal*, Vol. 18, No. 9, pp. 1549~1558.
- (16) Liu, W.-J. and Chu, C.-H., 2007, "Electroelastic Analysis of a Piezoelectric Finite Wedge with Mixed Type Boundary Conditions Under a Pair of Concentrated Shear Forces and free Charges," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 48, pp. 203~224.
- (17) Choi, S. T. and Earmme, Y. Y., 1998, "Antiplane Problem of Interfacial Circular-Arc Cracks in Transversely Isotropic Piezoelectric Media," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 22, No. 5, pp. 868~876.
- (18) Choi, S. R., 2007, "Green's Function of Cracks in Piezoelectric Materials," *Trans. of the KSME*, Vol. 31, No. 9, pp. 967~974.
- (19) Noble, B., 1958, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, Pergamon Press, London.
- (20) Choi, S.R. and Earmme, Y.Y., 1990, "Analysis

of a Kinked Crack in Anti-Plane Shear,"
Mechanics of Materials, Vol. 9, pp. 195~294.

(21) Choi, S. R., 1993, "Analysis of Interfacial Surface
Crack Perpendicular to the Surface," *Trans. of the*

KSME, Vol. 17, No. 2, pp. 277~284.

(22) Tada, H., Paris, P. and Irwin, G., 1973,
Methods The Stress Analysis of Crack Handbook,
Del Research Corp., Hellertown.