

<학술논문>

강건 최적설계에서 통계적 모멘트와 확률 제한조건에 대한 효율적인 민감도 해석

허재성[†] · 곽병만*
(2007년 9월 17일 접수, 2007년 11월 5일 심사완료)

The Efficient Sensitivity Analysis on Statistical Moments and Probability Constraints in Robust Optimal Design

Jae-Sung Huh and Byung-Man Kwak

Key Words : Sensitivity Analysis(민감도 해석), Statistical Moment(통계적 모멘트), Probability Constraint(확률 제한조건), Moment Method(모멘트 방법), Robust Optimal Design(강건 최적설계)

Abstract

The efforts of reflecting the system's uncertainties in design step have been made and robust optimization or reliability-based design optimization are examples of the most famous methodologies. In their formulation, the mean and standard deviation of a performance function and constraints expressed by probability conditions are involved. Therefore, it is essential to effectively and accurately calculate them and, in addition, the sensitivity results are required to obtain when the nonlinear programming is utilized during optimization process. We aim to obtain the new and efficient sensitivity formulation, which is based on integral form, on statistical moments such as the mean and standard deviation, and probability constraints. It does not require the additional functional calculation when statistical moments and failure or satisfaction probabilities are already obtained at a design point. Moreover, some numerical examples have been calculated and compared with the exact solution or the results of Monte Carlo Simulation method. The results seem to be very satisfactory.

1. 서론

최근에 항공/헬기, 자동차,⁽¹⁾ 초소형 기기^(2,3) 등의 공학시스템을 해석하고 설계하는 단계에서 시스템에 필연적으로 존재하는 불확실성에 의한 영향을 정량적으로 파악하고 이를 설계에 반영하려는 연구가 많이 이루어지고 있다.⁽⁴⁾ 시스템에 존재하는 불확실성 요소로는 하중 조건, 물성치(material properties)의 산포, 공차에 의한 형상 및

치수의 변화, 시스템 운용 환경의 다양성 등이 있다. 이러한 불확실성은 시스템의 입력 변수 혹은 잡음 변수가 되어 시스템의 성능을 하나의 값이 아닌 산포가 있는 통계량으로 표출되게 한다. 그러므로 시스템의 성능에 대한 통계적 특성을 정확히 파악할 필요가 있으며 이는 수학적으로 성능함수의 통계적 특성치인 평균, 표준편차 혹은 성능함수의 확률분포(Probability distribution)로 묘사할 수 있다. 이러한 통계적 특성치를 정확하고 효율적으로 계산하는 방법에서 최근에 실험계획법을 활용하는 연구들이 활발히 이루어지고 있다. D'Errico 와 Zaino⁽⁵⁾는 정규분포에 대해 적용한 방법, Seo 와 Kwak⁽⁶⁾은 비정규분포까지 확장한 방법을 제한하였으며, Lee 와 Kwak⁽⁷⁾과 Huh 와 Kwak⁽⁸⁾

[†] 한국항공우주연구원 KHP 개발실 엔진팀
E-mail : caesarhjs@nate.com
TEL : (042)860-2831 FAX : (042)860-2626

* 한국과학기술원 기계공학과

은 반응표면법을 활용하여 보다 효율적인 방법을 연구하였다. 게다가, 이를 강건 최적설계(Robust optimal design) 혹은 신뢰도 기반 최적설계(Reliability-based design optimization, RBDO)에 적용한 사례^(3,4,9)도 풍부하다. 이 두 설계 방법론에서는 주로 성능 함수의 평균과 표준편차로 정의되는 목적함수와 손상 혹은 만족확률(Satisfaction or failure probability)로 정의되는 제한조건으로 구성된 최적 설계 수식화를 활용한다.

이와 같이 두 방법 모두 최적설계 수식화를 기반으로 하고 있으므로 해를 탐색하기 위해서 일반적으로 비선형 프로그래밍(Nonlinear programming)을 사용한다. 이는 방향 탐색과정(Searching direction)에서 목적함수 및 제한조건에 대한 민감도를 요구한다. 즉, 성능함수의 평균, 표준편차에 대한 미분 혹은 확률 제한조건에 대한 미분 필요함을 의미한다. 확률 제한조건에 대한 미분 필요함을 계산하는 방법에 따라 민감도 수식이 달라지는데 여기서는 모멘트 방법(moment method)⁽¹⁰⁾을 기초로 한 민감도에 대해 기술하고자 한다. 그러므로, 본 연구에서는 성능 함수의 평균, 표준편차와 확률 제한조건에 대한 적분 형태의 민감도 수식을 유도하고 여러 가지 수치 적분 방법을 통해 민감도를 계산하고 비교하려 한다.

2. 민감도 해석

강건 최적설계에서는 식 (1)처럼 정의되는 최적 설계 수식화에서 설계변수(design variable) \mathbf{x} , 시스템 파라미터(System variable) \mathbf{z} , 상태 변수(state variable) \mathbf{b} 모두 명칭 값(nominal value)에 대한 산포를 가정한다. 이들을 수학적으로 좀 더 엄밀하게 다루기 위해서는 확률밀도함수(Probability density function)로 모델링하는 것이 타당하고 이는 설계변수가 x_i 에서 μ_{x_i} 로의 변경을 의미한다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \\ & \text{subject to } g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{b}) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

최적설계 혹은 신뢰도 기반 최적설계와 상이하게 강건 최적설계는 아직 정립된 수식이 없으나, 일반적으로 목적함수와 제한조건의 강건성을 각각 확보하기 위해 목적함수 f 의 평균과 표준편차 혹은 이에 대응되는 지수와 제한조건을 만족할 확률인 $\text{Pr}[g_j \leq 0]$ 나 이에 대응되는 다른 통계적 특성치

를 주로 이용한다.^(1,3,11) 식 (2)는 성능함수의 통계적 특성을 이용한 강건 최적설계 수식화의 예이며 제한조건의 수식화는 신뢰도 기반 최적설계와 동일하다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } [\mu_f - T^*, \sigma_f]^T \\ & \text{subject to } \text{Pr}[g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{b}) \leq 0] - \text{Pr}_j^T \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 T^* 와 Pr_j^T 는 각각 성능 이상치와 목표 확률이다.

식 (2)와 같이 주어진 강건 최적설계를 해결하기 위해선 $\mu_f, \sigma_f, \text{Pr}[g_j \leq 0]$ 에 대한 설계 변수 μ_{x_i} 의 미분이 필요하다. 특히 확률에 대한 민감도는 $\text{Pr}[g_j \leq 0]$ 을 계산하는 방법에 따라 상이하며 본 연구에서는 모멘트 방법을 기초로 한다. 모멘트 방법은 g_j 의 평균, 표준편차와 같은 일련의 통계적 모멘트(Statistical moment)와 피어슨 시스템(Pearson system), 존슨 시스템(Johnson system)과 같은 확률 분포 근사 기법을 결합하여 만족 혹은 손상 확률을 계산하는 방법이다. 여기서는 식 (3)과 같이 4개 모멘트-평균(μ_g), 표준편차(σ_g), 왜도($\sqrt{\beta_{1g}}$), 첨도(β_{2g})-와 피어슨 시스템을 이용하여 확률을 계산하는 방법을 기초로 한다. 식 (3)의 확률은 4개의 통계적 모멘트에 대한 함수이므로 민감도는 연쇄 규칙(chain rule)에 의해 식 (4)처럼 정리된다. 단, 식 (4)부터 g_j 에서 j 첨자는 표현의 간략화를 위해 생략하기로 한다.

$$G_j = \text{Pr}[g_j \leq 0] = \text{Pr}(\mu_{g_j}, \sigma_{g_j}, \sqrt{\beta_{1g_j}}, \beta_{2g_j}) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dG_j}{d\mu_{x_i}} = & \frac{\partial G_j}{\partial \mu_{g_j}} \frac{\partial \mu_{g_j}}{\partial \mu_{x_i}} + \frac{\partial G_j}{\partial \sigma_{g_j}} \frac{\partial \sigma_{g_j}}{\partial \mu_{x_i}} + \\ & \frac{\partial G_j}{\partial \sqrt{\beta_{1g_j}}} \frac{\partial \sqrt{\beta_{1g_j}}}{\partial \mu_{x_i}} + \frac{\partial G_j}{\partial \beta_{2g_j}} \frac{\partial \beta_{2g_j}}{\partial \mu_{x_i}} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)에서 각 항의 첫 번째 항 즉, 확률에 대한 g 모멘트의 미분은 피어슨 시스템에 대해 유한 차분법(finite difference method)을 적용하여 비교적 쉽고 빠르게 계산할 수 있다. 그러므로 남은 항은 g 의 4개 모멘트 $\mu_g, \sigma_g, \sqrt{\beta_{1g}}, \beta_{2g}$ 에 대한 설계 변수 μ_{x_i} 의 미분이며 이는 각각 식 (5)~(8)과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} &= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[\prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 2\sigma_g \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \sigma_g &= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^2 \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[\prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} 2[g(\mathbf{x}) - \mu_g] \cdot \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[\prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} 3\sigma_g^2 \frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \sqrt{\beta_{1g}} + \sigma_g^3 \frac{\partial \sqrt{\beta_{1g}}}{\partial \mu_{x_i}} &= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^3 \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^3 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[\prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} 3[g(\mathbf{x}) - \mu_g]^2 \cdot \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 4\sigma_g^3 \frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \beta_{2g} + \sigma_g^4 \frac{\partial \beta_{2g}}{\partial \mu_{x_i}} &= \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^4 \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^4 \cdot \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}} \left[\prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) \right] dx_1 \dots dx_n + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} 4[g(\mathbf{x}) - \mu_g]^3 \cdot \frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (8)$$

식 (5) ~ (8)에서 공통적으로 계산되어야 할 부분은 확률밀도함수 $\phi_i(x_i)$ 에 대한 μ_{x_i} 의 미분이며 이는 확률분포에 따라 상이하다. 본 논문에서는 식 (9)와 같이 정의되는 정규분포(Normal distribution)로 한정한다.

$$\phi_i(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} \cdot e^{-\frac{(x_i - \mu_{x_i})^2}{2\sigma_{x_i}^2}} \quad (9)$$

위 식에 대한 μ_{x_i} 의 미분은 식 (10)처럼 확률밀도함수와 x_i 의 선형함수 곱으로 정리된다.

$$\frac{\partial \phi_i(x_i)}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2} \cdot \phi_i(x_i) = H_i(x_i) \cdot \phi_i(x_i) \quad (10)$$

그러므로 식 (5) ~ (8)은 성능함수 g , 확률밀도함수 $\phi_i(x_i)$ 와 미분과정에서 발생하는 함수인 $H_i(x_i)$ 로 이루어진 적분형태로 표현된다. 식 (11)은 식 (5)를 간단히 정리한 것이며 식 (6) ~ (8)도 유사하게 표현된다.

$$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}) \cdot H_i \cdot \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 \dots dx_n \quad (11)$$

그런데 이들은 식 (12)처럼 정의되는 성능함수의 k 차 통계적 모멘트와 동일한 적분형태이다.

$$E\{g^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [g(\mathbf{x}) - \mu_g]^k \prod_{i=1}^n \phi_i(x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (12)$$

이와 같이 성능함수에 대한 통계적 모멘트와 민감도 수식은 H_i 라는 함수를 제외하고는 동일하므로 동일한 방법으로 적분이 가능하다. 만약 식 (13)과 같은 전조합법을 이용한 모멘트 방법(Full Factorial Moment Method, FFMM)⁽⁵⁻⁸⁾을 사용한다면 통계적 모멘트를 계산할 때 얻어진 함수값을 민감도 계산에서도 그대로 사용할 수 있다. 왜냐하면 H_i 함수가 식 (10)처럼 정의되어 있기 때문이다. 이는 최적화 과정에서의 방향 탐색을 위한 추가적인 노력이 필요하지 않음을 의미한다.

$$E\{g^k\} \cong \sum_{i=1}^m w_i [g(\mu + \alpha_i \sigma)]^k \quad (13)$$

여기서 m 이 3이면 3th FFMM이다.

3. 수치 적분 및 검증

본 연구에서 얻어진 적분 형태의 민감도 수식을 기초로 하여 정해 혹은 몬테카를로 시뮬레이션 방법(Monte Carlo simulation, MCS)과 1 ~ 4 차 통계적 모멘트를 비교적 정확하게 추정하는 걸로 알려진 3th FFMM⁽⁵⁻⁸⁾을 이용하여 계산하고 그 결과를 비교하고자 한다. 여기서 모든 확률변수는 정규분포를 따른다고 가정한다.

3.1 균일한 하중을 받는 보⁽¹²⁾

첫 검증 예제는 균일 하중을 지탱하는 보 문제 (Elastic beam under uniform load)이며 제한조건은 식 (14)처럼 정의된다. 설계 변수는 $[\mu_{x1}, \mu_{x2}, \mu_{x3}]^T = [2.0, 4.0, 5.0]^T$ 이며, 표준편차는 변동계수 (Coefficient of variation, COV)로 나타낸다.

$$g(P, l, m_F) = \frac{9}{128} \cdot Pl^2 - m_F \leq 0 \quad (14)$$

Table 1 Sensitivity results of the elastic beam problem (a) COV = 5%

	<i>i</i>	Exact	FFMM
$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	1.128	1.128
	2	1.125	1.125
	3	-1.0	-1.0
$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	0.07137	0.07139
	2	0.05359	0.05361
	3	0.0	0.0
$\frac{\partial \Pr[g \leq 0]}{\partial \mu_{x_i}}$	1	0.0	0.0
	2	0.0	0.0
	3	0.0	0.0

(b) COV = 10%

	<i>i</i>	Exact	FFMM
$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	1.136	1.136
	2	1.125	1.125
	3	-1.0	-1.0
$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	0.1429	0.1429
	2	0.1077	0.1077
	3	0.0	0.0
$\frac{\partial \Pr[g \leq 0]}{\partial \mu_{x_i}}$	1	-0.00175	-0.00173
	2	-0.00108	-0.00106
	3	0.00099	0.00099

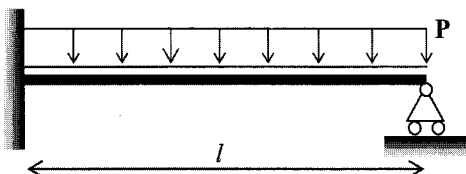


Fig. 1 Elastic beam under uniform load⁽¹²⁾

여기서 P 는 x_1 , l 은 x_2 , m_F 는 x_3 에 대응된다.

제한 조건이 3 차 다항식으로 표현되어 앞 절에서 정의된 민감도 해석을 해석적으로 정확히 계산 가능하므로 그 결과와 3" FFMM의 결과를 비교하며 Table 1 과 같다. 변동계수가 5%인 경우는 식 (14)의 모멘트에 대한 확률의 민감도, 즉 식 (5)에서 각 항의 첫 번째 항이 영(zero)의 값을 가져 확률에 대한 민감도가 0.0 으로 계산된다. 그리고 변동계수가 10%가 되어야 3" FFMM 으로 계산한 확률의 민감도가 1%의 오차를 가지기 시작한다. 이는 고차 모멘트 즉, 왜도와 첨도에 대한 설계변수의 미분 오차에 기인하는 것이다. 이를 종합하면 얻어진 민감도 수식에 3" FFMM 방법을 적용하여 계산된 민감도는 강건 최적설계나 신뢰도 기반 설계에 충분히 활용이 가능할 정도의 정확도를 가지고 있다.

3.2 유리함수

다음 예제는 신뢰도 기반 최적설계(RBDO)의 수학 예제⁽¹¹⁾에서 많이 인용되는 함수로 식 (15)와 같이 정의되는 유리함수이다. 설계 변수는 $[\mu_{x1}, \mu_{x2}]^T = [5.0, 5.0]^T$ 이며 표준편차는 앞 예제와 동일하게 변동계수로 표현을 한다.

$$g = 1.0 - \frac{80.0}{x_1^2 + 8x_2 + 5} \leq 0 \quad (15)$$

앞 예제와 상이하게 해석적으로 적분형태의 민감도 수식을 계산할 수 없으므로 민감도를 비교하기 위해 300 만회 MCS 결과를 이용하였다. 변동계수가 5%인 경우에서 확률에 대한 민감도가 모두 0.0 인 이유는 앞 절의 예제와 동일하게 식 (15)의 통계적 모멘트에 대한 확률의 미분이 모두 0.0 이기 때문이다. 각 변동계수에 대해 평균, 표준편차, 확률에 대한 민감도 순으로 오차가 점점 증가하고 있다. 이는 고차 모멘트로 갈수록 3" FFMM 의 정확도가 감소하기 때문이며 이러한 누적된 오차가 확률의 민감도에 반영되기 때문이다. 그러나 변동계수가 10%일 때까지 평균과 표준편차의 민감도는 최대 오차가 1.7%이며 확률에 대한 민감도의 최대 오차는 3.4%이다. 이 정도의 정확도는 앞서 언급하였듯이 강건 최적설계 혹은 신뢰도 기반 최적설계에 활용하여도 해에 큰 영향을 주지 않으리라 판단된다. 또한 얻어진 함수값을 활용하면 주어진 설계에서 모멘트 및 만족확률을 추가적인 함수 계산없이 얻을 수 있다.

Table 2 Sensitivity results of the equation (15)
(a) COV = 5%

	<i>i</i>	MCS	FFMM
$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	0.16345	0.16341
	2	0.13150	0.13120
$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	-0.00862	-0.00863
	2	-0.01184	-0.01204
$\frac{\partial \Pr[g \leq 0]}{\partial \mu_{x_i}}$	1	0.0	0.0
	2	0.0	0.0

(b) COV = 10%

	<i>i</i>	MCS	FFMM
$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	0.16359	0.16339
	2	0.13350	0.13301
$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}}$	1	-0.01738	-0.01725
	2	-0.02480	-0.02457
$\frac{\partial \Pr[g \leq 0]}{\partial \mu_{x_i}}$	1	-0.21232	-0.21948
	2	-0.15277	-0.15711

Table 3 Sensitivity results of speed reducer

	<i>i</i>	5" FFMM	3" FFMM
$\frac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{x_i}}$	2	-0.01671	-0.01671
	3	-6.881×10 ⁻⁴	-6.881×10 ⁻⁴
	4	1.602×10 ⁻³	1.602×10 ⁻³
	6	-0.8450	-0.8450
$\frac{\partial \sigma_g}{\partial \mu_{x_i}}$	2	-5.065×10 ⁻⁴	-5.065×10 ⁻⁴
	3	-2.086×10 ⁻⁵	-2.085×10 ⁻⁵
	4	4.842×10 ⁻⁵	4.842×10 ⁻⁵
	6	-0.03384	-0.03378
$\frac{\partial \Pr[g \leq 0]}{\partial \mu_{x_i}}$	2	0.07869	0.07871
	3	3.240×10 ⁻³	3.241×10 ⁻³
	4	-7.542×10 ⁻³	-7.544×10 ⁻³
	6	4.035	4.141

3.3 속도 감쇄기(Speed reducer)

마지막 문제는 Fig. 2 와 같은 형상을 가지며 경량 비행기의 엔진과 프로펠러 사이에 사용되는 속도 감쇄기이다. 참고문헌 (13)에서 이 장치에 대한 신뢰도 기반 최적설계 문제가 정의되어 있으며, 그 수식화에서 아래와 같은 제한조건에 대한 민감도를 계산하고자 한다.

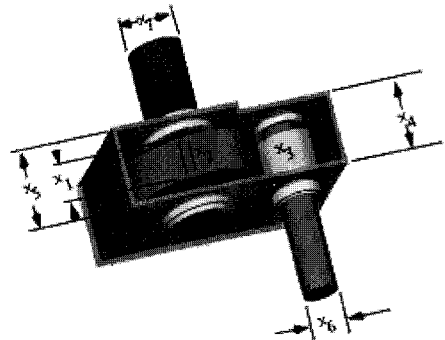


Fig. 2 Illustration of speed reducer⁽¹³⁾

$$g = \frac{\sqrt{\left(\frac{745x_4}{x_2x_3}\right)^2 + 16.9 \times 10^6}}{110.0 \times x_6^3} - 1.0 \leq 0 \quad (16)$$

여기서 x_2, x_3, x_4, x_6 는 모두 정규분포이며 평균은 $\mu^T = [0.7, 17.0, 7.3, 3.4]^T$ 이며 변동계수는 1.0%이다.

이 문제도 예제 2 처럼 적분식으로 정의되는 민감도를 해석적으로 얻을 수 없으므로 MCS 와 같은 방법을 통해 그 기준 값을 얻어야 한다. 그러나 300 만 번의 샘플링을 실시한 MCS 의 결과가 상당한 산포를 보여 기준 값으로 역할을 하지 못하여, 본 예제에 대해서는 3" FFMM 보다 한 차원 높은 정확도를 가지는 5" FFMM 을 이용한 방법과 민감도 결과를 비교·평가한다. Table 3 에서

평균과 표준편차에 대한 민감도는 두 방법에서 거의 동일한 결과를 보여주나 x_6 의 평균에 대한 식 (16)의 표준편차 민감도에서 0.2%의 오차를 보인다. 그러나 앞의 예제와 유사하게 확률에 대한 민감도는 약간의 오차가 보이며 x_6 에서 최대 오차 2.6%를 가진다. 이는 앞의 예제와 동일하게 고차 모멘트에 대한 민감도가 상대적으로 부정확하므로 이가 확률의 민감도에 반영되기 때문이다. 그러나 신뢰도 기반 최적설계에 적용하기에는 충분한 정확도를 가지고 있다고 판단된다.

4. 결론

본 연구에서는 강건 최적설계 혹은 신뢰도 기반

최적설계에서 필요로 하게 되는 성능함수의 평균 및 표준편차와 확률 제한조건에 대한 적분형태의 민감도 식을 유도하고 이 식에 기존의 수치 적분법들을 적용하여 그 결과를 비교하였다. 얻어진 민감도 수식은 평균 혹은 표준편차와 동일하게 적분형태로 표현되며 크게 3 개 함수- 성능함수, 확률밀도함수, 확률밀도함수로부터 유도되는 함수-의 곱으로 정의된다. 그러므로 평균 혹은 표준편차를 계산하는 과정에서의 성능 함수값을 활용하여 추가적인 함수 계산 없이 민감도 계산이 가능한 장점을 가지고 있다. 얻어진 민감도 수식을 바탕으로 정해, MCS 방법, FFMM 법을 적용하고 서로 해의 정확도를 3 개의 함수에 대해 비교하였다. 이 중에서 FFMM 법은 실제로 강건 최적설계 혹은 신뢰도 기반 최적설계에 사용이 가능하며 이때에 필요한 민감도 값은 3 개의 예제에서 만족할 만한 정확도를 보여주었다.

이러한 기초 연구 결과는 터보 샤프트 엔진의 부품처럼 고정밀도가 요구되는 시스템 혹은 부품에 대한 통계적 특성과 신뢰도를 파악하고 설계에 반영하는데 활용될 수 있다.

참고문헌

- (1) Youn, B. D., Choi, K. K., and Yang, L. G., 2004, "Reliability-Based Design Optimization for Crashworthiness of Vehicle Side Impact," *Strut. Multidisc. Optim.* Vol. 25, pp. 272~283.
- (2) Huh, J. S., Kim, K. H., Kang, D. W., Gweon, D. G., and Kwak, B. M., 2006, "Performance Evaluation of Precision Nanopositioning Devices Caused by Uncertainties Due to Tolerances Using Function Approximation Moment Method," *Review of Scientific Instruments*, Vol. 77, No. 1, pp.015103~015111.
- (3) Han, J. S., and Kwak, B. M., 2001, "Robust Optimal Design of a Vibratory Microgyroscope Considering Fabrication Errors," *Journal of Micromechanics of Microengineering*, Vol. 11, No. 6, pp. 662~671.
- (4) Park, G. J., Lee, T. H., Lee, K. W., and Hwang, K. H., 2006, "Robust Design: An Overview," *AIAA Journal*, Vol. 44, No. 1, pp. 181~191.
- (5) D'Errico, J. R., and Zaino Jr., N. A., 1988, "Statistical Tolerancing Using a Modification of Taguchi's Method," *Technometrics*, Vol. 30, No. 4, pp. 397~405.
- (6) Seo, H. K., and Kwak, B. M., 2002, "Efficient Statistical Tolerance Analysis for General Distribution Using Three Point Information," *International journal for production research*, pp. 931~944.
- (7) Lee, S. H., and Kwak, B. M., 2006, "Response Surface Augmented Moment Method for Efficient Reliability Analysis," *Structural Safety*, Vol. 28, No. 3, pp. 261~272.
- (8) Huh, J. S., and Kwak, B. M., 2007, "Numerical Verification of the First Four Statistical Moments Estimated by a Function Approximation Moment Method," *Transactions of the KSME A*, Vol. 31, No. 4, pp. 490~495.
- (9) Huh, J. S., Jung, B. C., Lee, T. Y., and Kwak, B. M., 2006, "A Study on the Robust Optimal Supporting Positions of TFT-LCD Glass Panel," *Transactions of the KSME A*, Vol. 30, No. 8, pp. 1001~1007.
- (10) Zhao, Y.G., and Ono, T., 2001, "Moment Methods for Structural Reliability," *Structural safety*, Vol.23, pp. 47~75.
- (11) Tu, J., Choi, K. K., and Park, Y. H., 2001, "Design Potential Method for Robust System Parameter Design," *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 4, pp. 667~677.
- (12) Thoft-Christensen, P., and Baker, M., 1982, *Structural Reliability Theory and Its Applications*, Springer-Verlag.
- (13) Kang, H. Y., Lee, Y. H., Huh, J. S., and Kwak, B. M., 2006, "Comparative Study of RBDO Algorithms Based on Form and FAMM," *III European Conference on Computational Mechanics*.