

균열회전체의 고조파진동 해석

Analysis of Harmonic Vibration of Cracked Rotor

전 오 성†

Oh Sung Jun

(2007년 10월 1일 접수 ; 2007년 12월 7일 심사완료)

Key Words : Cracked Rotor(균열 회전체), Harmonic Vibration(고조파진동), Transverse Breathing Crack(횡방향 개폐균열), Additional Slope(추가 기울기), Influence Coefficient(영향계수)

ABSTRACT

Harmonic vibration characteristics for the general rotor model having a breathing crack are analyzed. Analyses are performed at the half critical speed ranges. The vibration characteristics are explained by using the additional slope and bending moment at the crack position and the influence coefficient showing the structural dynamic characteristics of the rotor. With the low crack depth the magnitude of the additional slope is kept constant even at the speed range at which the orbit magnitude is very sensitive to the rotational speed change. At this speed range the vibration is affected by the influence coefficient only. As the dynamic bending moment exceeds the static bending moment with the increase of crack depth, the additional slope affects the vibration amplitude of cracked rotor and the crack propagation rate increases.

1. 서 론

고속회전체에서 발생할 수 있는 가장 큰 사고의 하나는 운전 중 균열 미감지로 인한 사고다. 수평 회전체에 존재하는 횡방향 균열은 중력의 영향으로 인하여 축이 회전할 때 반복되는 균열의 개폐 현상을 일으키고, 이는 균열선단에 피로응력을 발생시켜 균열을 진전시킨다. 따라서 균열의 거동을 고려한 사전 진단 방법이 필요하다.

균열을 포함하여 회전체에서 발생하는 대부분의 불량으로 인한 진동은 회전수의 고차항(harmonic component)을 포함하는 진동이 발생하는 공통된 특성을 가지고 있다. 따라서 각 불량 원인 별로 고유한 특성을 찾기 위한 노력이 필요하며, 이 때문에 신호 분석 방법의 개발과 정확한 해석 모델에 대한

연구가 꾸준히 이어오고 있다.

지금까지도 균열을 가진 회전체의 해석 모형은 대부분 질량-감쇠-강성의 단순 회전체 해석 모형에 머물러 왔다^(1,2,3). 이에 반해 분산된 질량을 갖는 실험상의 회전체에 대한 해석에 유한요소법을 이용한 연구도 일부 발표되었다^(4,5). Jun⁽⁶⁾은 탄성회전체에 대하여 복소수 전달행렬법(complex transfer matrix method)을 제안하고, 양단에 탄성 베어링이 있는 일반적 회전체에 이를 적용하여 영향계수를 유도하였으며, 이 방법은 임의의 위치에서의 응답을 해석적으로 표현할 수 있게 하였다.

Jun^(7,8)은 균열이 있는 일반 회전체의 해석을 위하여 영향계수로 표현되는 시스템의 선형 전달함수를 사용하고, 균열 위치에서의 추가 기울기(additional slope)를 자려 진동원으로 표현하여 이를 운동방정식에 함유시켰다. 균열 회전체의 진동을 모사(simulation)하기 위하여, 응답과 균열에 의한 추가 기울기를 연성시킨 반복기법(iterative method)을 제안하였다. 이 방법은 기존의 질량-감쇠-강성 해석

† 교신저자 : 정희원, 전주대학교 기계자동차공학과
E-mail : junos@jj.ac.kr
Tel : (063)220-2614, Fax : (063)220-2056

에 사용되었던 단순회전체 모형을 일반 회전체 모형으로 표현하여 적용하였으며, 해석결과와 타당성을 입증하고 균열 회전체의 거동을 분석하였다.

이 연구에서는 Jun이 사용하였던 방법을⁽⁷⁾ 보다 일반적인 회전체 모형에 적용하여, 단순회전체 모형으로는 설명할 수 없었던 균열회전체가 갖는 고유한 특성인 고조파 진동의 발생 원인과 그 특성에 대하여 분석하고자 한다.

2. 균열 개폐 현상의 모형화

연구를 위해 회전체 양단에 있는 스프링의 수직 및 수평 강성 성분이 동일하다고 가정하였다. 수평 회전체에 존재하는 횡방향 균열은 회전체가 회전하면서 개폐를 반복하는데, 회전체 거동은 중력에 의한 축의 정적 처짐 곡선을 중심으로 하여 균열 개폐에 따른 진동을 하게 된다. 이 정적 처짐 때문에, 균열과 불평형 질량이 공존할 때 이들의 상대적 방위각에 따라서 축의 회전 시 균열이 항상 닫혀있거나 항상 열려있는 경우도 발생한다.

2.1 균열 개폐와 요소의 변형

중양에 균열을 갖는 보 요소는 양단에 가해지는

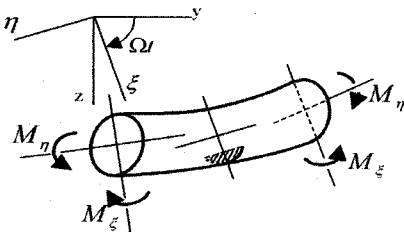


Fig. 1 Moments on a shaft having a crack

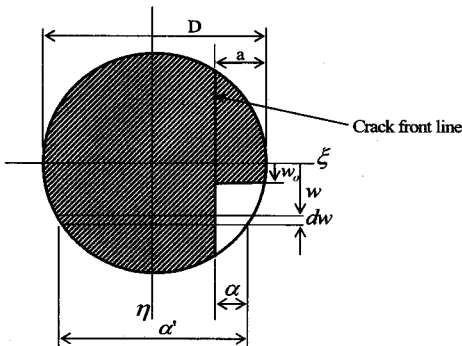


Fig. 2 Cross section of shaft at crack

굽힘 모멘트에 의해 거동이 결정된다. 균열선단에서의 균열 개폐유무는, Fig. 1의 회전좌표계(ξ, η) 상에서 표현된 굽힘모멘트 M_ξ 와 M_η 에 의한 모드 I의 응력집중계수(stress intensity factor)의 부호에 따라 결정된다. 즉 균열에 의한 추가 기울기(additional slope)는, 양의 응력집중계수를 갖는 균열선단을 따라 적분함으로써 구할 수 있다.

Fig. 2와 같이 두께 dw 의 얇은 판 요소의 양단에 양의 굽힘 모멘트 ($-M_\eta$)와 양의 굽힘 모멘트 ($-M_\xi$)가 작용하면 균열선단에 나타나는 응력집중계수는 아래와 같다⁽⁹⁾.

$$K^I(w) = K_{M_\eta}^I(w) + K_{M_\xi}^I(w) \quad (1)$$

Castigliano정리를 사용하면 η 및 ξ 축에 대한 추가 기울기는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta\alpha_{\eta,crack} = \frac{1}{2E} \int_A (K_{M_\eta}^I + K_{M_\xi}^I) \frac{\partial K_{M_\eta}^I}{\partial M_\eta} dA \quad (2)$$

$$\Delta\alpha_{\xi,crack} = \frac{1}{2E} \int_A (K_{M_\eta}^I + K_{M_\xi}^I) \frac{\partial K_{M_\xi}^I}{\partial M_\xi} dA \quad (3)$$

2.2 균열 절점(node)에서의 전달함수

축 요소에 대한 상태변수인 변위, 기울기, 굽힘 모멘트, 전단력을 Fig. 3과 같은 부호와 방향으로 정의한다. Fig. 3의 (a)와 (b)는 각각 수직면과 수평면을 나타내는 X-Z평면과 X-Y평면을 보여준다. 이 그림의 상태변수를 복소수로 표현하여 다음과 같이 변위, 기울기, 굽힘 모멘트, 전단력으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U_i &= Y_i + jZ_i \\ \alpha_i &= \phi_i + j\theta_i \\ M_i &= M_{z,i} + jM_{y,i} \\ V_i &= V_{y,i} + jV_{z,i} \end{aligned} \quad (4)$$

절점 i 와 $i+1$ 사이의 요소에 대한 상태벡터는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\begin{pmatrix} U_{i+1} \\ \alpha_{i+1} \\ M_{i+1} \\ V_{i+1} \end{pmatrix}^L = [F]_i \begin{pmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{pmatrix}^R$$

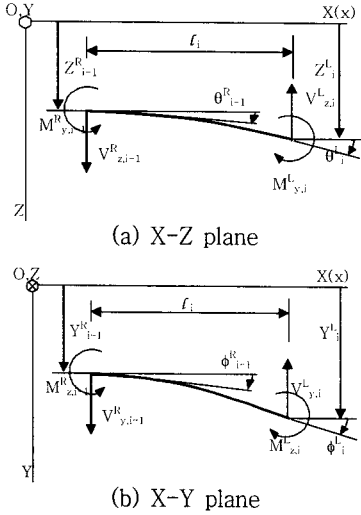


Fig. 3 State variables of i -th shaft element

여기서 $[F]_i$ 는 i 번째 축 요소의 전달행렬을 보여준다. 균열이 있는 경우에는, 균열 위치를 절점으로 선택하여 추가 기울기를 절점 양쪽의 상태벡터에 식 (5)와 같이 고려한다.

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix}^L + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta\alpha \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

이 식을 상태벡터를 나타내는 간단한 표기방법을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\{s\}_i^R = \{s\}_i^L + \{c\}_i \quad (6)$$

3. 탄성 회전체 거동

3.1 동적 해석을 위한 전달행렬

회전관성과 전단변형을 고려한 회전축에 대한 운동방정식은 아래와 같다⁽¹⁰⁾.

$$\begin{aligned} & EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{EI\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - jT \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + j \frac{T\rho}{\kappa G} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \\ & + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho A r_o^2 \left[\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) \right. \\ & \left. - j2\Omega \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 E 와 ρ 는 각각 Young상수와 질량밀도를, T 는 축 양단의 토크를, A 와 I 는 단면의 면적과 면적관성모멘트를, r_o 는 회전반경(radius of gyration)을, κ 는 일반적으로 사용되는 형상계수(form factor)의 역수를, G 은 전단탄성계수를, Ω 는 회전속도를, ω 는 고유진동수를 나타낸다. 운동방정식의 변수 u 는 시간과 공간의 함수로 복소수 변위를 나타낸다.

$$u(x,t) = y(x,t) + jz(x,t) \quad (8)$$

이 식을 아래와 같이 변수분리하고

$$u(x,t) = U(x) \cdot e^{j\omega t} = \{Y(x) + jZ(x)\} \cdot e^{j\omega t} \quad (9)$$

이로부터 유한한 길이의 축 요소에 대한 상태벡터와 전달행렬을 표현하면 아래와 같다⁽⁷⁾.

$$\{s\}_{i+1}^L = [F]_i \{s\}_i^R \quad (10)$$

여기서 $[F]_i$ 는 i 번째 축 요소의 전달행렬이고, $\{s\}$ 는 복소수 상태벡터를, 이의 하첨자(subscript) i 는 절점의 번호를, 상첨자(superscript) L 과 R 은 각각 절점의 좌측과 우측을 나타낸다. 전달행렬 $[F]_i$ 는 축의 기하학적 제원, 재질 특성, 회전수 및 고유진동수의 함수로 표현되는데⁽⁷⁾, 여기서는 전개과정과 자세한 표현을 생략하고 아래와 같이 형태만 표현하였다.

$$[F]_i = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (11)$$

한편 디스크 요소의 좌우측 상태벡터 사이의 전달행렬은 식 (12)의 4×4 행렬과 같다.

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega\Omega J_p - \omega^2 J_r) & 1 & 0 \\ m_i \omega^2 - j\omega & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ \alpha_i \\ M_i \\ V_i \end{Bmatrix}^L + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_i e_i \Omega^2 e^{j(\Omega + \beta)} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

이 식을 상태벡터를 사용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\{s\}_i^R = [S]_i \{s\}_i^L + \{u\}_i \quad (13)$$

여기서 J_i 와 J_p 는 각각 디스크의 질량관성모멘트와 질량극관성모멘트를, c 는 감쇠계수를 나타낸다. $m_i e_i$ 와 β_i 는 각각 질량 불평형량의 크기와 균열방향인 ξ 축으로부터의 방위각이다.

3.2 중력응답 해석을 위한 전달행렬

균열 회전체에서의 진동해석을 위해서는, 중력이 균열의 개폐에 중요한 역할을 하기 때문에 중력에 의한 축의 처짐을 고려해야 한다. 중력의 영향은 시간에 무관하므로 축의 운동방정식은 아래와 같이 변위 U_g 에 대한 상미분방정식이 된다.

$$EI \frac{d^4 U_g}{dx^4} - jT \frac{d^3 U_g}{dx^3} = j\rho A g \quad (14)$$

여기서 g 는 중력가속도를 나타낸다. 토크를 무시하고, 축 양단의 경계조건을 도입하여 다음의 전달행렬을 만들 수 있다⁽⁷⁾.

$$\begin{pmatrix} U_g \\ \alpha_g \\ M_g \\ V_g \end{pmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_g \\ \alpha_g \\ M_g \\ V_g \end{pmatrix}^L + \begin{pmatrix} \frac{\rho A g l^4}{24EI} \\ \frac{\rho A g l^3}{6EI} \\ \frac{\rho A g l^2}{2} \\ \rho A g l \end{pmatrix} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (15)$$

이를 절점번호와 축 요소의 번호를 일반화하여 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다.

$$\{s\}_{i+1}^L = [F_g]_i \{s\}_i^R + \{g\}_i \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (16)$$

한편 디스크 요소의 좌우측 상태벡터 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} U_g \\ \alpha_g \\ M_g \\ V_g \end{pmatrix}^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_g \\ \alpha_g \\ M_g \\ V_g \end{pmatrix}^L + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (17)$$

또한 상태벡터를 사용하면 아래와 같다.

$$\{s_g\}_i^R = \{s_g\}_i^L + \{d_g\}_i \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (18)$$

3.3 탄성 회전체 모형에 대한 동 응답

회전체의 좌측 끝 절점 1과 우측 끝의 절점 N에서의 각각의 상태벡터, 절점 B_i 에서 불평형질량을 포함하는 상태벡터, 균열 위치인 절점 C_i 의 상태벡터를 아래에 차례로 표시한다.

$$\{s\}_N^L = \begin{Bmatrix} U_N \\ \alpha_N \\ 0 \\ k_N U_N \end{Bmatrix}, \quad \{s\}_1^R = \begin{Bmatrix} U_1 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ -k_1 U_1 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\{u\}_{B_i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_i e_i \Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta_i)} \end{Bmatrix}, \quad \{c\}_{C_i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \alpha_{C_i}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

여기서 k_1 과 k_N 는 절점 1과 절점 N의 탄성 베어링의 강성을 나타내며, $m_i e_i$ 와 β_i 는 불평형질량의 크기와 방위각이다.

요소 1에서부터 요소 N-1까지의 전달행렬을 차례로 곱하여, 절점 N에서의 상태벡터를 표현한 후 U_1^R 와 α_1^R 에 대하여 풀어서 측정위치인 절점 M_i 에서의 상태벡터를 나타내면 아래와 같다⁽⁷⁾.

$$\{s\}_{M_i} = Q^{1-M_i} \{s\}_1^R + \sum_{No.(B_i)} Q^{B_i-M_i} \{u\}_{B_i} + \sum_{No.(C_i)} Q^{C_i-M_i} \{c\}_{C_i} \quad (20)$$

식 (20)의 우측에 있는 시그마(Σ)는 불평형질량이 있는 절점 번호 B_i 나 균열의 절점 번호 C_i 가 측정위치 절점 번호 M_i 보다 작은 경우에만 유효하다. 이 식에서 Q^{p-q} 는 절점 p 와 절점 q 사이의 전달행렬 곱을 가리킨다. 상태벡터 중 변위 U_{M_i} 만을 선택하여 자세히 표시하면 아래와 같다.

$$U_{M_i} = \sum_{No.(B_i)} \{ (q_{11}^{1-M_i} - q_{14}^{1-M_i} k_1) c_{B_i}^U + q_{12}^{1-M_i} c_{B_i}^\alpha + q_{14}^{1-M_i} \} \cdot (m_{B_i} e_{B_i} \Omega^2 e^{j(\Omega t + \beta_{B_i})}) + \sum_{No.(C_i)} \{ (q_{11}^{1-M_i} - q_{14}^{1-M_i} k_1) c_{C_i}^U + q_{12}^{1-M_i} c_{C_i}^\alpha + q_{14}^{1-M_i} \} \Delta \alpha_{C_i}(t) \quad (21)$$

여기서 $\{(q_{11}^{1-M_i} - q_{14}^{1-M_i} k_1) c_{B_i}^U + q_{12}^{1-M_i} c_{B_i}^\alpha + q_{14}^{B_i-M_i}\}$ 는 절점 B_i 에서의 불평형질량에 의한 절점 M_i 에서의 변위를 나타내는 영향계수를 보여주며, $\{(q_{11}^{1-M_i} - q_{14}^{1-M_i} k_1) c_{C_i}^U + q_{12}^{1-M_i} c_{C_i}^\alpha + q_{12}^{C_i-M_i}\}$ 는 절점 C_i 에서의 균열에 의한 절점 M_i 에서의 변위를 나타내는 영향계수이다. 또한 q_{ij}^{p-q} 는 Q^{p-q} 행렬의 (i, j) 요소를 가리킨다.

3.4 중력에 의한 탄성 회전체 모형의 정 응답

중력에 의한 정적 응답을 고려하기 위하여 동 응답을 구한 방법과 유사한 방법으로 접근한다. 이를 위해 아래와 같이 상태벡터를 표시한다.

$$\{s_g\}_N^L = \begin{Bmatrix} U_{g,N}^L \\ \alpha_{g,N}^L \\ 0 \\ k_N U_{g,N}^L \end{Bmatrix}, \quad \{s_g\}_1^R = \begin{Bmatrix} U_{g,1}^R \\ \alpha_{g,1}^R \\ 0 \\ -k_1 U_{g,1}^R \end{Bmatrix}, \quad (22)$$

$$\{g\}_i = \begin{Bmatrix} \rho A_i g l_i^4 \\ 24EI \\ \rho A_i g l_i^3 \\ 6EI \\ \rho A_i g l_i^2 \\ 2 \\ \rho A_i g l_i \end{Bmatrix}, \quad \{c\}_{C_i} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta \alpha_{C_i} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

요소 1에서부터 요소 $N-1$ 까지의 전달행렬을 차례로 곱하여, 절점 N 에서의 상태벡터를 표현한 후 $U_{g,1}^R$ 과 $\alpha_{g,1}^R$ 에 대하여 풀어서 측정위치인 절점 M_i 에서의 상태벡터를 나타내면 아래와 같다⁽⁷⁾.

$$\begin{aligned} \{s_g\}_{M_i}^L &= Q_g^{1-M_i} \{s_g\}_1^R + (Q_g^{2-M_i} \{g\}_1^L + Q_g^{3-M_i} \{g\}_2^L \\ &+ \dots + Q_g^{(M_i-1)-M_i} \{g\}_{M_i-2}^L + Q_g^{M_i-M_i} \{g\}_{M_i-1}^L) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &+ Q_g^{C_i-M_i} \{c\}_{C_i} + Q_g^{C_2-M_i} \{c\}_{C_2} + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

이 식에서 Q_g^{p-q} 는 절점 p 와 절점 q 사이의 중력 응답에 대한 전달행렬 곱을 가리키며 Q_g^{p-p} 는 단위행렬 $[I]$ 가 된다. 위 상태벡터 중에서 변위를 취하여 표시하면 다음과 같다⁽⁷⁾.

$$U_{g,M_i} = \sum_{i=1}^{N-1} \{(q_{11}^{1-M_i} - q_{14}^{1-M_i} k_1) c_{g,i}^U + q_{12}^{1-M_i} c_{g,i}^\alpha\} \{g\}_i^L e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} &+ \left(\sum_{i=1}^{M_i-1} \begin{Bmatrix} q_{g,11}^{(i+1)-M_i} \\ q_{g,12}^{(i+1)-M_i} \\ q_{g,13}^{(i+1)-M_i} \\ q_{g,14}^{(i+1)-M_i} \end{Bmatrix} \{g\}_i^L \right) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &+ \sum_{No.(C_i)} \{(q_{11}^{1-M_i} - q_{14}^{1-M_i} k_1) c_{g,C_i}^U + q_{12}^{1-M_i} c_{g,C_i}^\alpha\} \Delta \alpha_{C_i} \\ &+ \sum_{C_i=C_1}^{M_i} q_{g,12}^{C_i-M_i} \Delta \alpha_{C_i} \end{aligned} \quad (24)$$

여기서

$$c_{g,i}^U = \frac{\begin{pmatrix} (q_{g,11}^{(i+1)-N} k_N - q_{g,41}^{(i+1)-N}) & q_{g,31}^{(i+1)-N} \\ (q_{g,12}^{(i+1)-N} k_N - q_{g,42}^{(i+1)-N}) & q_{g,32}^{(i+1)-N} \\ (q_{g,13}^{(i+1)-N} k_N - q_{g,43}^{(i+1)-N}) & q_{g,33}^{(i+1)-N} \\ (q_{g,14}^{(i+1)-N} k_N - q_{g,44}^{(i+1)-N}) & q_{g,34}^{(i+1)-N} \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_{g,11} k_N - t_{g,14} k_1 k_N - t_{g,41} + t_{g,44} k_1) & (t_{g,12} k_N - t_{g,42}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34} k_1) & t_{g,32} \end{vmatrix}}$$

$$c_{g,i}^\alpha = \frac{\begin{pmatrix} q_{g,31}^{(i+1)-N} \\ q_{g,32}^{(i+1)-N} \\ q_{g,33}^{(i+1)-N} \\ q_{g,34}^{(i+1)-N} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (t_{g,11} k_N - t_{g,14} k_1 k_N - t_{g,41} + t_{g,44} k_1) & (t_{g,12} k_N - t_{g,42}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34} k_1) & t_{g,32} \end{pmatrix}}$$

$$c_{g,C_i}^U = \frac{\begin{vmatrix} -(q_{g,12}^{C_i-N} k_N - q_{g,42}^{C_i-N}) & (t_{g,12} k_N - t_{g,42}) \\ -q_{g,32}^{C_i-N} & t_{g,32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_{g,11} k_N - t_{g,14} k_1 k_N - t_{g,41} + t_{g,44} k_1) & (t_{g,12} k_N - t_{g,42}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34} k_1) & t_{g,32} \end{vmatrix}}$$

$$c_{g,C_i}^\alpha = \frac{\begin{vmatrix} (t_{g,11} k_N - t_{g,14} k_1 k_N - t_{g,41} + t_{g,44} k_1) & -(q_{g,12}^{C_i-N} k_N - q_{g,42}^{C_i-N}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34} k_1) & -q_{g,32}^{C_i-N} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (t_{g,11} k_N - t_{g,14} k_1 k_N - t_{g,41} + t_{g,44} k_1) & (t_{g,12} k_N - t_{g,42}) \\ (t_{g,31} - t_{g,34} k_1) & t_{g,32} \end{vmatrix}}$$

이며, 또한 $q_{g,ij}^{N-N}$ 는 Q_g^{P-g} 행렬의 (i, j) 요소를 가리키며, $t_{g,ij}$ 는 전체 전달행렬을 모두 곱한 행렬의 (i, j) 요소를 가리킨다.

4. 균열회전체 거동 해석방법

균열 위치에서의 굽힘 모멘트는 균열의 개폐에 직접적 영향을 미친다. 굽힘 모멘트를 다음의 관계식을 사용하여 좌표 변환함으로써 회전 좌표계 상에서의 굽힘 모멘트로 표현할 수 있다.

$$M_\eta + jM_\xi = (M_z + jM_y)e^{-j\Omega t} \quad (25)$$

여기서 $(M_z + jM_y)$ 는 균열 위치에서의 동응답과 중력응답의 합으로부터 추출한 것이다.

한편 회전 좌표계로 표현된 굽힘모멘트를 사용하여 균열의 추가기울기를 계산한다. 이 추가기울기는 다시 고정좌표계로 좌표 변환하여 동 응답과 정 응답을 구하는 데 사용한다. 이와 같이 균열의 추가기울기와 굽힘모멘트는 서로 연성되어(coupled) 있다.

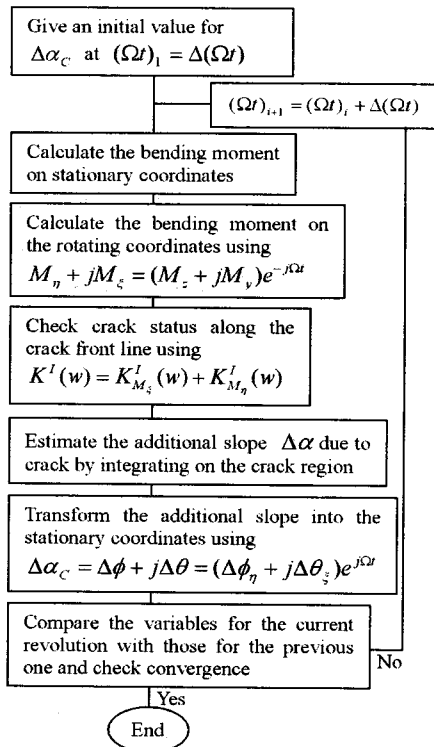


Fig. 4 Iterative simulation procedure

회전체가 회전하면서 균열의 열림상태가 계속 변화하며, 이에 따라서 축의 거동도 변화한다. 이를 고려하여, 회전체를 매우 작은 각도로 회전시키면서 매 각 위치에서 굽힘 모멘트와 균열에 의한 추가 기울기를 반복적으로 계산하며 서로 계산에 활용한다. 이러한 반복에 의해서 1회전에서의 거동이 안정상태에 도달하면 반복 계산을 종료한다⁽⁷⁾. 계산방법을 설명하는 절차를 Fig. 4에 제시하였다.

5. 시뮬레이션

일반적인 형태의 회전체를 고려하기 위하여 직경이 다른 축 요소를 갖는 Fig. 5의 회전체 모형을 사용한다. 굵은 실린더가 회전체의 중앙에 위치하고, 좌측 및 우측 축의 직경은 각각 5 cm와 3 cm로 서로 다르고 길이는 30 cm로 동일하다. 축은 양단에 탄성 베어링으로 지지되어 있고, 균열은 좌측 축의 중간에 위치한다. 이 회전체 재료의 Young상수와 밀도는 각각 $2.12 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 와 0.0078 kg/cm^3 이며, 베어링의 강성은 $1.0 \times 10^{10} \text{ N/m}$ 이다.

가진에 의한 응답을 나타내는 영향계수는 시스템의

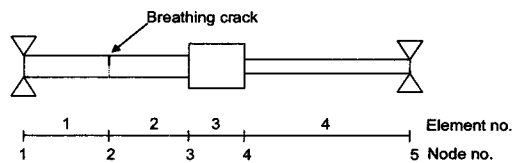


Fig. 5 Simulation model

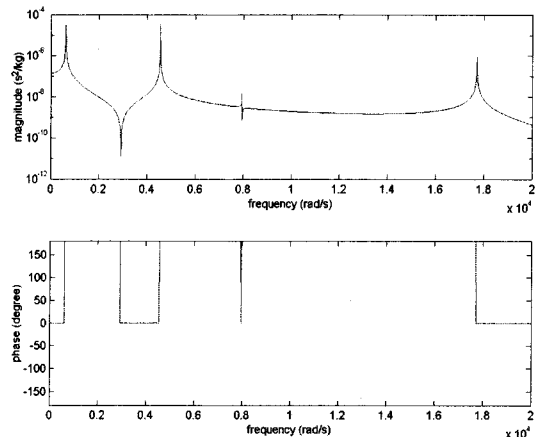


Fig. 6 Influence coefficient of displacement at node 2 due to unbalance at node 3

동적 특성을 보여준다. Fig. 6은 균열이 없는 Fig. 5의 회전체 모형에서 절점 3의 가진에 의한 절점 2에서의 응답을 나타내는데, 이 모형이 608.7, 4550.3, 7952., 17707.4 rad/s에서 위험속도를 가짐을 나타낸다.

5.1 고조파 진동원인

(1차 위험속도의 1/2에서의 고조파 진동특성)

잘 알려져 있듯이 회전속도가 위험속도의 1/N되는 속도에 가까이 가면서 고조파 성분들이 두각을 나타낸다. Fig. 7은 1차 위험속도의 1/2되는 속도 부근에서 균열절점의 선회계적을 보여준다. 각 선회계적은 축이 1회전하는 동안에 만들어진 것이다. 300 rad/s에서 강력한 2차 고조파 성분이 발생한다.

1회전 동안 균열 절점에서의 추가기울기를 계산하여 고정좌표계에서 나타내면 Fig. 8과 같다. 그림에서 음(-)의 값으로 나타난 추가기울기가 균열이 열린 상태를 나타낸다. 그림의 수평방향 축 상의 회전각(rotation angle)은, Fig. 1에 보인 바와 같이 양(+)의 ζ 축이 수평위치로부터 시계방향으로 회전하는 각을 가리킨다. 균열은 그림에서와 같이 1회전하

는 동안 열림과 닫힘을 반복한다.

축 1회전 당 추가기울기의 변화 속에는 고조파항이 존재하며, 이는 시스템의 고조파 응답을 만든다는 점을 이해할 수 있다. Fig. 9와 Fig. 10은 270 rad/s와 300 rad/s속도 시 고정 좌표계에서 표현된

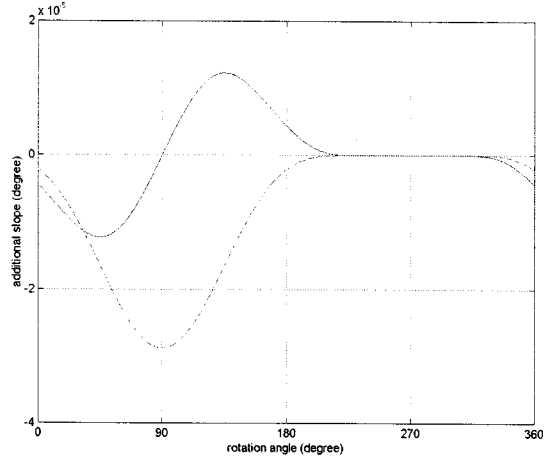


Fig. 8 Additional slope on the stationary coordinates at 300 rad/s (solid line: $\Delta\phi$, dotted line: $\Delta\theta$)(20% crack depth)

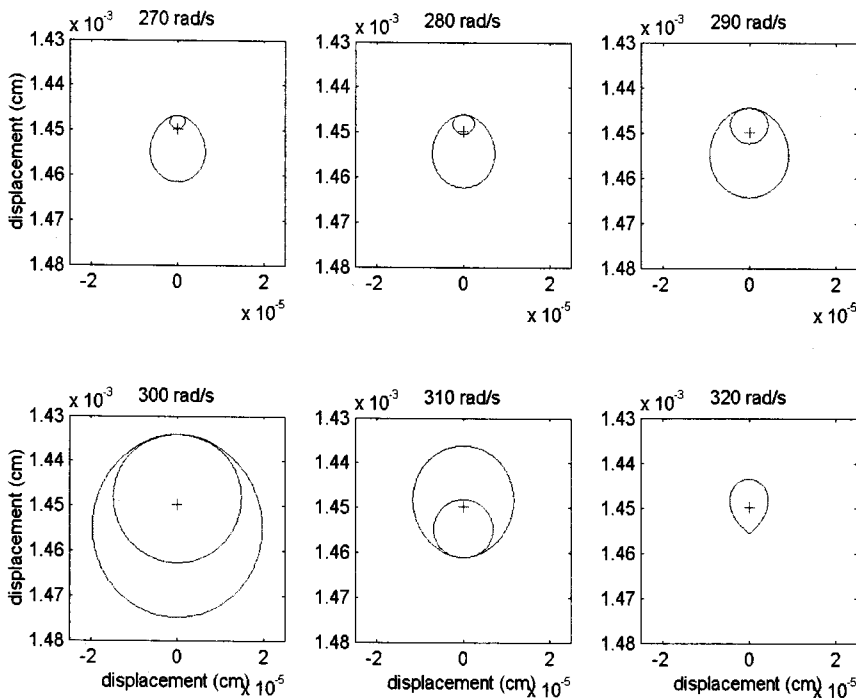


Fig. 7 Orbits at crack position near half the first critical speed (20% crack depth)

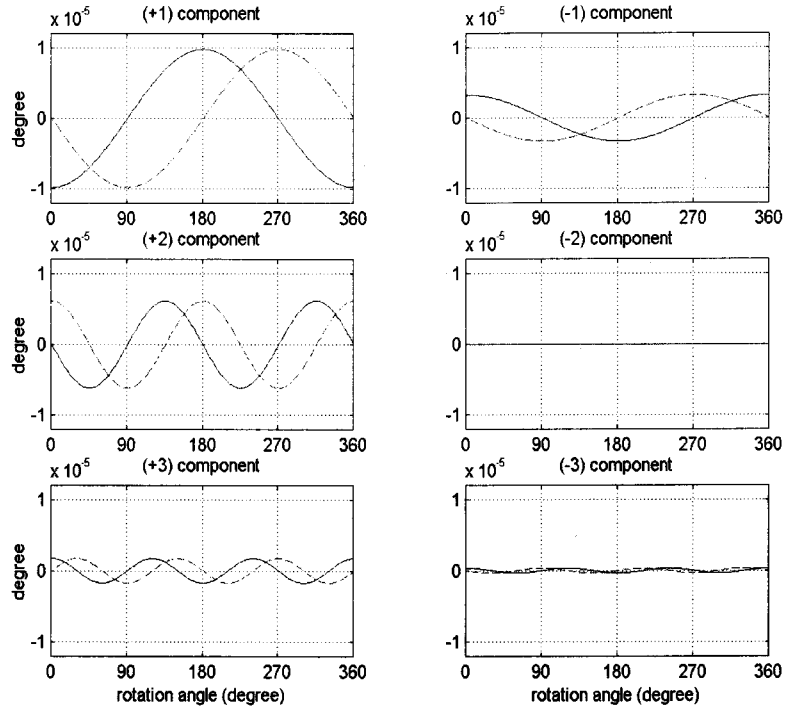


Fig.9 Harmonic components analysed from additional slope on the stationary coordinates at 270 rad/s(solid line: $\Delta\phi$, dotted line: $\Delta\theta$)(20% crack depth)

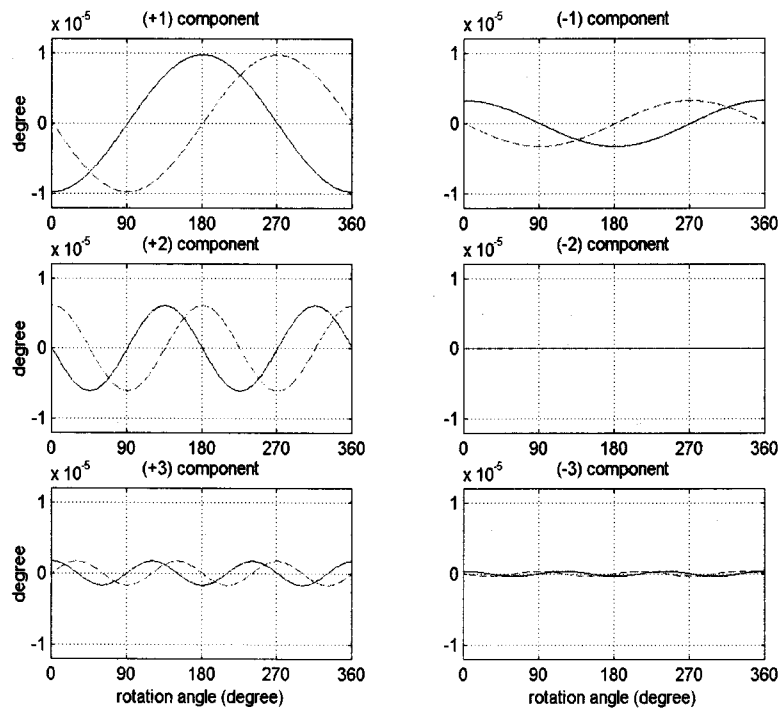


Fig.10 Harmonic components analysed from additional slope on the stationary coordinates at 300 rad/s(solid line: $\Delta\phi$, dotted line: $\Delta\theta$)(20% crack depth)

추가기울기에 대하여 푸리에 분석한 고조파성분을 보여준다. 그러나 270 rad/s 속도에서 구한 선회계적은 300 rad/s에서와 상당히 차이가 나는데 비하여, 추가 기울기의 성분 분석은 두 경우가 일치한다.

이는 현재의 균열 깊이(20%)일 때 위 속도영역에서 속도변화에 따른 선회계적은 차이가 크지만 균열의 열림은 변화가 없다는 것을 보여준다. 이 현상을 설명하기 위하여 균열위치에서의 굽힘 모멘트를 검토해 보고자 한다.

Fig.11과 Fig.12는 회전수 변화에 따른 균열 절점

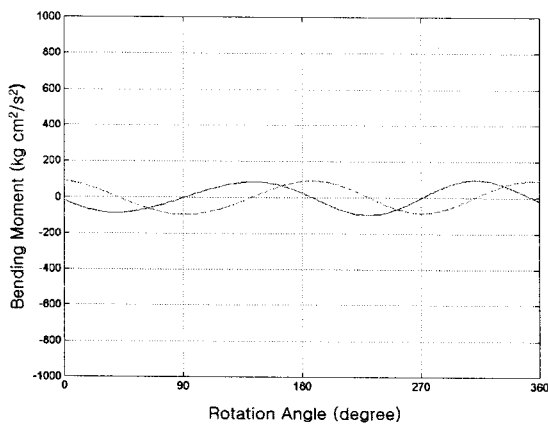


Fig. 11 Dynamic bending moment due to crack breathing on the stationary coordinates at 270 rad/s(20% crack depth)(solid line: M_z , dotted line: M_y)

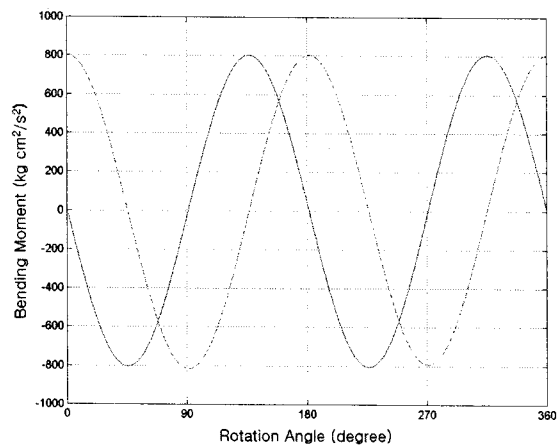


Fig. 12 Dynamic bending moment due to crack breathing on the stationary coordinates at 300 rad/s(20% crack depth)(solid line: M_z , dotted line: M_y)

에서의 동 굽힘모멘트를 보여준다. 한편 중력에 의한 정 굽힘모멘트는 $86419.441 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2$ 로서 크기가 일정하며, 동 굽힘모멘트에 더하여 균열의 열림 상태를 결정하는 데 역할을 하게 된다. Fig. 11과 Fig. 12의 동 굽힘모멘트는 축의 회전에 따라 반복적으로 변하지만, 그 크기가 정 굽힘모멘트에 비하여 현저히 작다. 따라서 균열 개폐에 따른 추가기울기는 정 굽힘모멘트에 의해서 결정되는 경우이다.

그러면 Fig. 7에서 보는 바와 같이 이 속도 부근에서의 급속한 선회계적 변화의 원인은 무엇인가. 이를 위해 식 (21)에서 균열에 대한 변위를 나타내는 영향계수 $\{(q_{11}^{1-Mi} - q_{14}^{1-Mi} k_1) c_{Ci}^U + q_{12}^{1-Mi} c_{Ci}^\alpha + q_{12}^{Ci-Mi}\}$ 의 특성

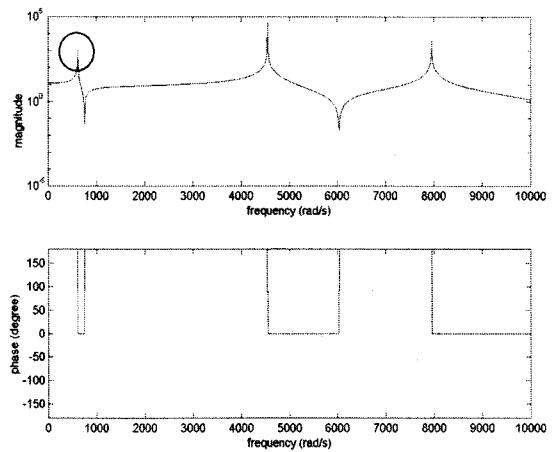


Fig.13 Displacement at 2 due to crack at 2(20% crack depth)

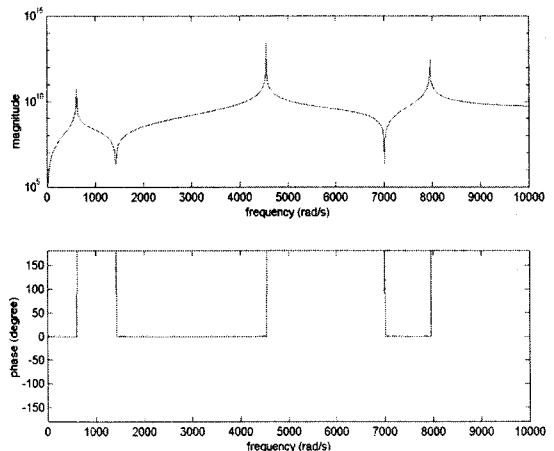


Fig. 14 Bending moment at 2 due to crack at 2 (20% crack depth)

을 점검해보고자 한다.

Fig. 13은 균열 위치인 절점 2에서의 가진에 의한 해당 위치에서의 변위응답을 나타내는 영향계수이다. 이는 균열에 관계없이 축 구조물의 재질특성과 기하학적인 구성에 의해 정해지는 것이다. 270 rad/s에서 300 rad/s으로 회전수가 증가하면, 이 속도의 2배수 회전수에 해당하는 속도도 540 rad/s에서 600 rad/s으로 증가하는데, 이때 영향계수는 기하급수적으로 커진다 (Fig. 13에서 원으로 표시한 부분). 그런데 식 (21)에서 보는 바와 같이 변위가 영향계수와 추가기울기의 곱으로 표현되는 점을 고려하면, 선회 크기의 굽힘은 1차 위험속도 부근에서의 영향계수가 증가하면서 커진 것을 알 수 있다. 한편 절점 2에서의 가진에 의한 해당 위치에서의 굽힘모멘트 응답을 나타내는 영향계수를 같은 방법으로 표현해 보면(Fig. 14 참조), 굽힘 모멘트도 540 rad/s에서 600 rad/s로 가면서 크기가 증가하지만 이 영향은 앞에서 검토한 바와 같이 중력에 의한 정 굽힘모멘트에 비하여 현저히 작기 때문에 추가기울기의 크기 증가에는 영향을 미치지 못한다는 것을 이해할 수 있다.

5.2 고조파 진동원인

(2차 위험속도의 1/2에서의 고조파 진동특성)

2차 위험속도의 1/2속도 부근에서 선회레직을 구

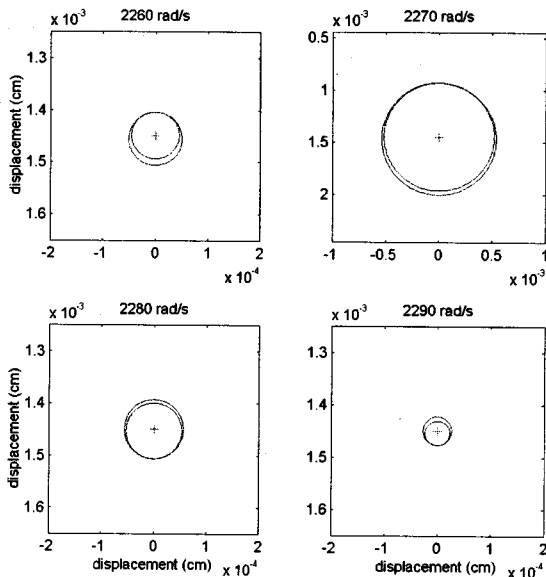


Fig. 15 Orbits near half of second critical speed (20% crack depth)

해보면 Fig. 15와 같다. 이 응답은 1차 위험속도의 1/2에서의 선회레직 보다 크다. 특히 2275 rad/s에서는 선회 시뮬레이션이 수렴하지 않는 결과가 나온다.

이때에는 동 굽힘모멘트가 증가하면서 총 굽힘모멘트에 영향을 미치게 되어 추가기울기를 증가시키기 때문으로 보인다. Fig. 14로부터, 1차 위험속도 부근에서의 굽힘모멘트는 작지만, 2차 위험속도 부근에서의 굽힘모멘트는 훨씬 큰 값을 갖는 것을 알 수 있다. 2260 rad/s와 2270 rad/s에서 동 굽힘모멘트를 구해보면(Fig. 16과 Fig. 17 참조), 2260 rad/s에

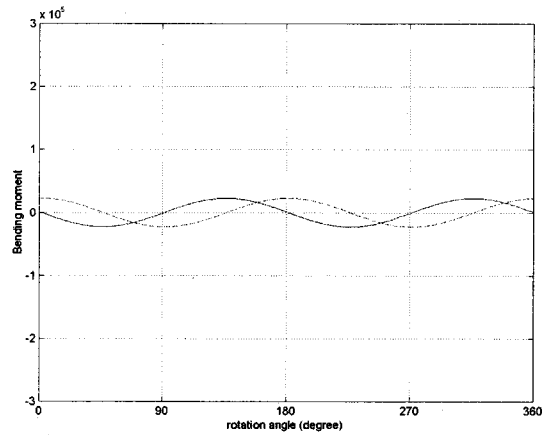


Fig. 16 Dynamic bending moment due to crack breathing on the stationary coordinates at 2260 rad/s

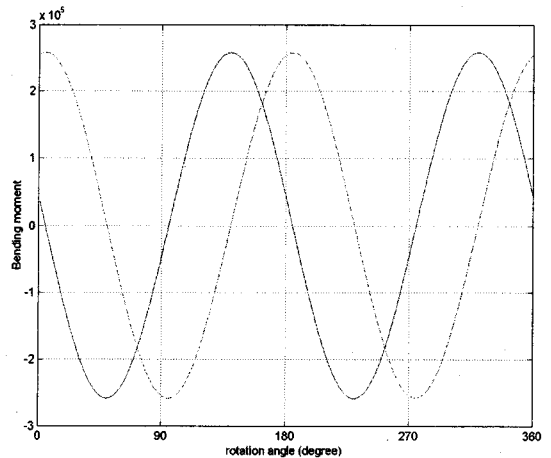


Fig. 17 Dynamic bending moment due to crack breathing on the stationary coordinates at 2270 rad/s

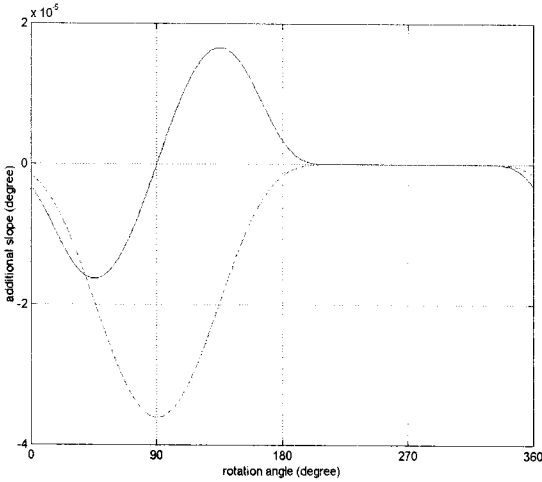


Fig. 18 Additional slope on the stationary coordinates at 2260 rad/s(solid line: $\Delta\phi$, dotted line: $\Delta\theta$)

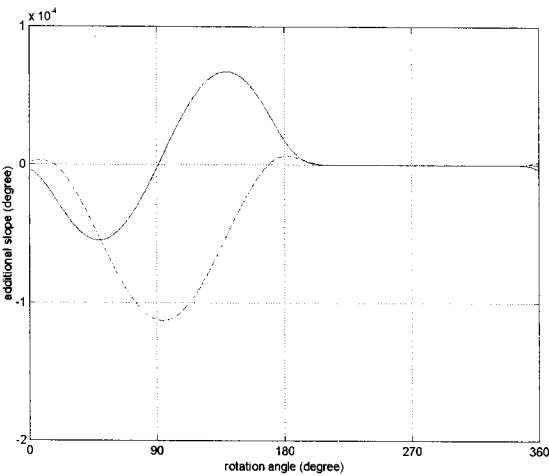


Fig. 19 Additional slope on the stationary coordinates at 2270 rad/s(solid line: $\Delta\phi$, dotted line: $\Delta\theta$)

서는 동 굽힘모멘트 크기가 $22730 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2$ 정도 내에서 변화하고, 2270 rad/s에서는 급상승하여 중력에 의한 정 굽힘모멘트($86419.441 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2$)보다 큰 $258000 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2$ 정도에서 변화하는 것을 관찰할 수 있다.

Fig. 18과 Fig. 19는 2260 rad/s와 2270 rad/s 속도에서 구한 추가기울기이다. 앞에서 270 rad/s와 300 rad/s에서 비교할 때 나타나지 않았던 추가기울기의 변화가 2260 rad/s와 2270 rad/s 사이에서는 나타난다. 동 굽힘모멘트의 변화와 추가기울기의 변

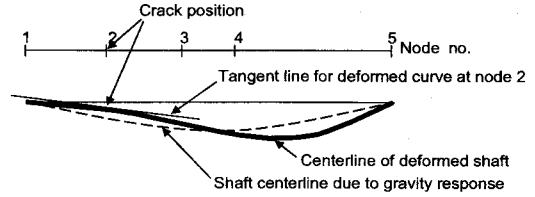


Fig. 20 Deformation curve of rotor due to second harmonic vibration

화로부터, 이들 속도에서는 동 굽힘모멘트에 의한 총 굽힘모멘트가 증가하여 추가기울기를 크게 만들고 이는 다시 동 굽힘모멘트를 증가시키는 순환적(recursive) 작용을 하는 것을 알 수 있다.

Fig. 19에서는 특이한 현상이 발견되는데, 축 회전 중의 균열 방향이 수평을 향하는 순간(rotation angle=0 또는 180°)추가기울기 $\Delta\theta$ 성분에 양의 값이 갖는 것을 보여주고 있다. 고정좌표계의 수직 평면(X-Z평면) 상에서 Y축을 중심으로 하는 균열위치(절점2)에서의 기울기가 양(+의 값을 갖는 것이다. 이는 해당 회전 속도의 2배 성분이 2차 위험속도에 매우 밀접하게 접근하면서 2차 모드의 진동이 가진 되어 Fig. 20과 같이 축의 변형곡선을 갖는 진동이 발생되면서 일어나는 현상이라고 이해된다. 반면에 균열이 10%만 진행된 경우에 동일한 회전수에서 구해진 추가기울기 해석에서는 이와 같은 결과가 발생하지 않는다. 20%에서 양(+의 $\Delta\theta$)이 발생한 것은 균열이 깊어짐에 따라 2차 고조파의 가진이 증가함에 따른 것으로 보인다.

이와 같은 해석에도 불구하고, 2차 위험속도의 1/2에서 이 현상이 항상 적용되는 것은 아니다. 이 해석에 사용된 회전체 모형과 같이 균열 위치에 의한 굽힘모멘트의 영향계수가 큰 위험속도에 적용되는 현상이다.

6. 결 론

일반적인 형상을 갖는 회전체 모형을 사용하여, 균열로 인한 고조파 진동의 특성을 분석하였다. 이를 위해 고조파 진동이 잘 나타나는 1차 및 2차 위험속도의 1/2속도 위치에서 중점적으로 분석하였다.

해석에서는 균열의 추가기울기, 균열위치에서의 굽힘모멘트, 그리고 축의 구조적 동특성인 영향계수 사이의 관계를 이용한 설명이 이루어졌다.

균열에 의한 추가기울기는 균열 위치에서의 굽힘 모멘트에 의해 결정이 되며, 회전체의 거동은 추가기울기와 영향계수에 의해 결정되는데, 중력에 의한 정적인 굽힘모멘트가 동적인 굽힘모멘트 보다 큰 회전수 영역에서는 회전수 변화에 따라 회전체의 선회궤적이 민감하게 변하더라도 추가기울기에는 변화가 없는 것이 파악되었다. 이 경우의 선회궤적은 회전수의 함수인 회전체 구조의 영향계수에 의해 결정된다는 것이 분석되었다.

이 연구에서 사용한 모형에서 균열이 20% 진전된 경우, 2차 위험속도의 1/2에서 동 굽힘모멘트가 정 굽힘모멘트 보다 커지는 경우가 발생하는데, 이러한 경우에는 회전수 변화에 따라 총 굽힘모멘트가 변하면서 균열의 추가기울기를 변화시켜서 선회궤적이 추가기울기와 영향계수에 의해 크게 변하는 것을 알 수 있다. 뿐만 아니라 추가기울기의 증가에 따라 균열의 진전이 급속히 발생할 수 있음을 예상할 수 있다.

2차 위험속도의 1/2 영역에서 2차 고조파 성분이 커지면서 2차 모드가 출현하여 이로 인한 추가기울기의 변칙적인 발생도 분석되었다.

참 고 문 헌

(1) Gasch, R., 1976, "Dynamic Behaviour of a Simple Rotor with a Cross-sectional Crack", *Vibration in Rotating Machinery*, Institution of Mechanical Engineers, London, pp. 123~128.

(2) Mayes, I. W. and Davies, W. G. R., 1980, "A Method of Calculating the Vibrational Behaviour of Coupled Rotating Shafts Containing a Transverse

Crack", *Vibration in Rotating Machinery*, Institution of Mechanical Engineers, London, pp. 17~27.

(3) Darpe, A. K., Gupta, K. and Chawla, A., 2002, "Analysis of the Response of a Cracked Jeffcott Rotor to Axial Excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 249, pp. 429~445.

(4) Choi, S.-H., Hong, S.-W. and Lee, C.-W., 2003, "An Efficient Dynamic Model of General Rotor Systems with Open Cracks," *Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference*, pp. 88~93.

(5) Keiner, H. and Gadala, M. S., 2002, "Comparison of Different Modeling Techniques to Simulate the Vibration of a Cracked Rotor", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, pp. 1012~1024.

(6) Jun, O. S., 2004, "Influence Coefficients on Rotor Having Thick Shaft Elements and Resilient Bearings", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 272, pp. 657~673.

(7) Jun, O. S., 2005, "Vibration Analysis of Flexible Rotor Having a Breathing Crack", *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 15, No. 10, pp. 1137~1147.

(8) Jun, O. S. and Gadala, M. S., 2008, "Dynamic Behavior Analysis of Cracked Rotor", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 309, pp. 210~245.

(9) Tada, H., Paris, P. C. and Irwin, G. R., 2000, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 3rd ed., ASME Press.

(10) Lee, C.-W., 1993, *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, Ch. 8.