

# 다입력 다출력 비선형 시스템의 관측기 설계 및 인덕션 모터에 응용

## An Observer Design for MIMO Nonlinear Systems and Its Application to Induction Motor

이 성 렬\*  
(Sungryul Lee)

**Abstract :** This paper presents an observer design method for a special class of multi input multi output(MIMO) nonlinear systems. First, we characterize the class of MIMO nonlinear systems with a block triangular structure. Also, the observability matrices for SISO nonlinear systems are extended to MIMO systems. By using the generalized observability matrices, it is shown that under the boundedness conditions of system state and input, the proposed observer guarantees the local exponential stability of error dynamics. Finally, its application to induction motor is given to verify the proposed method.

**Keywords :** observer, nonlinear systems, induction motor

### I. 서론

최근에 MIMO 비선형 시스템의 관측기 설계 문제가 여러 논문에서 많은 관심을 끌고 있다. 일반적으로 이 문제를 해결하기 위한 연구들은 두 가지 범주로 크게 분류할 수 있다.

첫 번째 연구 방향은 선형의 오차 동역학을 갖는 비선형 관측기의 설계를 목표로 하는 오차 선형화기법이다. 대부분의 이런 연구들은 SISO 비선형 시스템에 대한 Krener[1]의 연구를 MIMO 시스템으로 확장한 결과였다. [2]에서 저자들은 다변수 비선형 시변시스템을 관측기 표준형으로 변환하기 위한 필요 충분 조건을 유도하였다. [3]에서는 선형의 관측 가능한 형태로 변환할 수 있는 모든 종류의 비선형 시스템의 조건을 정의하였다. 한편, 오차 선형화와 관련된 모든 연구들은 관측기 설계를 위하여 필요한 조건들이 제약이 너무 강하여 실제 시스템에 적용하기 어려운 단점을 가진다. 이런 단점을 해결하기 위하여 [4]에서는 근사 오차 선형화 기법과 이를 이용한 로컬 관측기를 제안하였다.

두 번째 연구방향은 삼각구조를 갖는 시스템에 적용가능한 고이득 관측기 연구이다. [5]에서 삼각구조를 갖는 SISO 비선형 시스템에 대하여 지수 함수적 수렴성을 만족하는 고이득 관측기를 제안하였다. 이후 [6]에서 블록 삼각구조를 갖는 다출력 시스템으로 확장되었다. [7]에서는 고이득 관측기가 갖는 고이득에 기인한 진동문제와 노이즈에 민감한 단점을 개선하는 관측기를 제안하였다.

지금까지 대부분의 고이득 관측기 연구에서는 관측 가능한 선형시스템 부분과 삼각구조의 비선형 시스템 부분으로 구성된 시스템에 대하여 주로 연구하였다. 최근에 [8]에서는 선형 부분과 삼각구조를 가정하지 않은 매우 일반적인 구조의 SISO 비선형 시스템에 대하여 로컬 관측기 설계 방

법을 제안하였다. 본 논문에서는 [8]의 연구결과를 MIMO 시스템으로 확장하고자 한다. 이를 위하여 본 논문에서는 관측 가능한 선형 부분을 가지지 않는 삼각구조의 MIMO 시스템을 정의한다. 그리고 일종의 가관측성 행렬을 MIMO 시스템으로 일반화한다. 가관측성 조건과 시스템 상태변수와 입력에 대한 유계조건을 이용하여 제안한 관측기가 로컬 영역에서 지수 함수적 수렴성을 보임을 증명한다. 마지막으로 제안한 설계 방법의 유효성을 증명하기 위하여 인덕션 모터에 대한 모의 실험 결과를 제공한다.

### II. 시스템 기술

본 장에서는 논문에서 다룰 비선형 시스템의 형태를 정의하고자 한다. 본 논문에서는 다음과 같은 형태의 MIMO 비선형 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x_{[1,i]}, u, y_{[1,p]}) \\ y_i &= h_i(x_i), 1 \leq i \leq p \end{aligned} \quad (1)$$

위 (1)에서  $f_i: R^{n_1+\dots+n_i} \times R^m \times R^{q_1+\dots+q_p} \rightarrow R^{n_i}$  와  $h_i: R^{n_i} \rightarrow R^{p_i}$  는  $C^\infty$  벡터 필드들이다. 즉 무한 번까지 미분한 결과가 연속인 벡터 함수들이다. 또한 시스템 (1)의 각 부분 시스템의 상태 변수는  $x_i = [x_{i1}^T, \dots, x_{in_i}^T]^T \in R^{n_i}$ ,  $x_{ij} \in R^{q_i}$ ,  $1 \leq j \leq r_i$  이고 따라서, 전체 상태 변수와 출력은  $x = [x_1^T, \dots, x_p^T]^T \in R^n$ ,  $y = [y_1^T, \dots, y_p^T]^T \in R^l$  으로 정의한다. 또한 상태 벡터와 출력 벡터의 크기에 대하여  $r_1 q_1 + \dots + r_p q_p = n$ ,  $q_1 + \dots + q_p = l$  이 성립한다. 한편, 표현을 간단하게 하기 위해 부분 벡터를  $x_{[1,i]} = [x_1^T, \dots, x_i^T]^T$ ,  $y_{[1,i]} = [y_1^T, \dots, y_i^T]^T$  으로 정의한다. 기존의 연구에서는 관측 가능한 선형 부분과 삼각구조를 가정하였으나 시스템 (1)에서는 그러한 가정을 필요로 하지 않는다는 점에서 기존 연구보다 더 넓은 범위의 시스템을 포함한다는 장점을 가진다. 본론으로 들어가기 전

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2007. 7. 30., 채택확정 : 2007. 11. 28.

이성렬 : 군산대학교 전자정보공학부(2sungryul@kunsan.ac.kr)

에 논문의 주요 결과를 유도하기 위하여 필요한 정의와 가정들을 제공하겠다. 먼저, 아래 (2)와 같은 비선형 시스템을 고려해보자.

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, u, y), \hat{x} \in R^n \quad (2)$$

정의 1: 만약 임의의 양의 상수  $\sigma$ 에 대하여 어떤 양의 상수  $\delta_1, \delta_2, k$ 가 존재하여  $\|x(0) - \hat{x}(0)\| \leq \delta_1, \|u(t)\| \leq \delta_2$ 이면 모든  $t \geq 0$ 에 대하여 아래 (3)이 성립할 때 (2)를 (1)의 지수 함수적 수렴성을 갖는 로컬 관측기라고 정의한다.

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\| \leq k \|x(0) - \hat{x}(0)\| e^{-\sigma t} \quad (3)$$

가정 1: 모든  $x(0) \in X$ 와 모든  $u \in U$ 에 대하여 (1)의 해  $x(t)$ 가 모든  $t \geq 0$ 에서  $x(t) \in X$ 를 만족하도록 하는 어떤 콤팩트 집합  $X \subset R^n, U \subset R^m$ 가 존재한다.

한편, 임의의 양의 상수  $\epsilon$ 과 임의의 벡터  $x \in X$ 에 대하여 다음 (4)을 만족하도록 하는 콤팩트 집합  $V$ 가 항상 존재한다.

$$\{\dot{x} \in R^n : \|\dot{x} - x\| < \epsilon\} \subset V \quad (4)$$

가정 2: 아래에서 정의한 가관측성 행렬  $M_i, 1 \leq i \leq p$ 가 모든  $x \in V$ 와  $u \in U$ 에 대하여 비 특이 행렬이다.

$$M_i(x_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) = \begin{pmatrix} H_i(x_i) \\ H_i(x_i)F_{ii}(x_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) \\ \vdots \\ H_i(x_i)F_{ii}^{(r_i-1)}(x_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) \end{pmatrix} \quad (5)$$

위 식에서  $F_{ij} = \partial f_i / \partial x_j, H_i = \partial h_i / \partial x_i$ 이다.

가정 3: 모든  $x \in V$ 와  $u \in U$ 에 대하여 아래 (5)를 만족시키는 양의 상수  $d_i, 1 \leq i \leq p$ 가 반드시 존재한다.

$$\sup_{\theta_i \geq 1} \|\Delta_{\theta_i} \dot{M}_i(\cdot) M_i^{-1}(\cdot) \Delta_{\theta_i}^{-1}\| \leq d_i \quad (6)$$

여기서  $\Delta_{\theta_i} = \text{blockdiag}(1/\theta_i I_{q_i}, 1/\theta_i I_{q_i}, \dots, 1/\theta_i^{r_i} I_{q_i})$ 이고  $I_{q_i}$ 는  $(q_i \times q_i)$  단위 행렬을 의미한다.

가정 1은 (1)의 시스템에 유한한 입력이 가해질 때 (1)의 해는 유한한 크기를 가짐을 의미한다. 이 것은 로컬 안정도 증명을 위하여 필요한 조건이다. 가정 2는 선형시스템의 가관측성 행렬을 확장한 것으로 볼 수 있다. 따라서 가정 2는 관측기 설계의 필수 조건이다. 가정 3도 로컬 지수함수적 수렴성을 증명하는데 필요한 조건이다. 만약 시스템 (1)이 삼각구조를 갖는다면 자동으로 성립하는 조건이다.

### III. 비선형 관측기 설계

이번 장에서는 앞 장에서 제시한 비선형 시스템에 대하여 로컬 관측기 설계 방법을 제안한다. 먼저 (1)에 대하여 다음과 같은 비선형 관측기를 설계한다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i &= f_i(\hat{x}_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) \\ &+ M_i^{-1}(\hat{x}_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i (y_i - h_i(\hat{x}_i)), \quad (7) \\ 1 &\leq i \leq p \end{aligned}$$

여기서  $\theta_i$ 는 설계 변수이다. 설계 방법은 증명 과정에서 제시할 것이다.  $K_i$ 는 아래에서 정의된 행렬  $A_i, C_i$ 에 대하여 행렬  $A_i - K_i C_i$ 의 모든 고유값이 음의 실수부를 갖도록 설계한다.

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{pmatrix} 0 & I_{q_i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{q_i} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in R^{n_i \times n_i} \\ C_i &= (I_{q_i} \ 0 \ \dots \ 0) \in R^{q_i \times n_i} \end{aligned} \quad (8)$$

정리 1: 만약 다입력 다출력 비선형 시스템 (1)이 가정 1,2,3을 만족시킨다면 제안한 시스템 (7)은 지수 함수적 수렴성을 갖는 로컬 관측기이다.

증명: 가정 1에 의하여 (1)의 해는 콤팩트 집합  $X$ 안에 항상 머문다. 그러나 (7)의 해는 집합  $X$ 를 벗어날 수도 있다. 따라서 (7)의 해가 콤팩트 집합  $V$ 안에 항상 머문다고 가정하자. 이 가정은 초기조건과 입력조건에 따라 제거될 수 있음을 증명의 끝부분에서 보일 것이다. 먼저 (7)의  $i$ 번째 서브시스템을 고려해보자.  $e_i = x_i - \hat{x}_i$ 으로 정의하면  $i$ 번째 오차동역학은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= f_i(x_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) - f_i(\hat{x}_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) \\ &- M_i^{-1}(\hat{x}_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i (h_i(x_i) - h_i(\hat{x}_i)) \end{aligned} \quad (9)$$

테일러 정리를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &f_i(x_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) - f_i(\hat{x}_{[1,i]}, u, y_{[i+1,p]}) \\ &= F_{i1}(\hat{x}, u) e_1 + \dots + F_{ii}(\hat{x}, u) e_i + r_{if}(\hat{x}, e_{[1,i]}, u) \end{aligned} \quad (10)$$

$$h_i(x_{i1}) - h_i(\hat{x}_{i1}) = H_i(\hat{x}) e_i + r_{ih}(\hat{x}, e_i) \quad (11)$$

(10), (11)에서 고차항  $r_{if}, r_{ih}$ 는 다음 식을 만족시킨다.

$$r_{if}(\hat{x}, 0, u) = 0, r_{ih}(\hat{x}, 0) = 0 \quad (12)$$

이후로 표현을 단순하게 하기 위하여 모든 독립 변수의 표기를 생략하겠다. (10)과 (11)을 이용하면 (9)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= (F_{ii} - M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i H_i) e_i + F_{i(i-1)} e_{i-1} + \dots + F_{i1} e_1 \\ &+ r_{if} - M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1} K_i r_{ih} \end{aligned} \quad (13)$$

$M_i$ 의 정의로부터 다음 성질은 선형시스템 이론에서 잘 알려져 있다.

$$\begin{aligned} M_i F_{ii} M_i^{-1} &= A_i + B_i \\ H_i M_i^{-1} &= C_i \end{aligned} \quad (14)$$

위 (14)에서  $B_i$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ir} \end{pmatrix} \in R^{n_i \times n_i} \quad (15)$$

또한 다음 식이 만족함을 쉽게 보일 수 있다[5].

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta_i} A_i \Delta_{\theta_i}^{-1} &= \theta_i A_i \\ C_i \Delta_{\theta_i}^{-1} &= \theta_i C_i \end{aligned} \quad (16)$$

이제 좌표변환  $\bar{e}_i = \Delta_{\theta_i} M_i e_i$ 을 정의하고 (14)와 (16)을 이용하면 새로운 좌표계에서 (13)을 다음과 같이 간단하게 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_i &= \Delta_{\theta_i} \dot{M}_i e_i + \Delta_{\theta_i} \dot{M}_i e_i \\ &= \theta_i (A_i - K_i C_i) \bar{e}_i + \Delta_{\theta_i} B_i \Delta_{\theta_i}^{-1} \bar{e}_i \\ &\quad + \Delta_{\theta_i} M_i (F_{i(i-1)} e_{i-1} + \dots + F_{i1} e_1) \\ &\quad + \Delta_{\theta_i} M_i r_{if} - K_i r_{ih} + \Delta_{\theta_i} \dot{M}_i M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1} \bar{e}_i \end{aligned} \quad (17)$$

$A_i - K_i C_i$ 가 Hurwitz하기 때문에 다음을 만족하는 양한정 행렬  $P_i$ 가 반드시 존재한다.

$$(A_i - K_i C_i)^T P_i + P_i (A_i - K_i C_i) = -I_{n_i} \quad (18)$$

$I_{n_i}$ 는  $n_i \times n_i$  단위 행렬을 의미한다. 이제 (17)에 대하여 리아푸노프 후보함수를 다음과 같이 정의한다.

$$V_i(\bar{e}_i) = \bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i \quad (19)$$

(19)의 시간도함수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}_i) &= 2\bar{e}_i^T P_i \dot{\bar{e}}_i \\ &= -\theta_i \|\bar{e}_i\|^2 + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} B_i \Delta_{\theta_i}^{-1} \bar{e}_i \\ &\quad + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} M_i F_{i(i-1)} M_{i(i-1)}^{-1} \Delta_{\theta_{i-1}}^{-1} \bar{e}_{i-1} + \dots \\ &\quad + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} M_i F_{i1} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1} \bar{e}_1 \\ &\quad + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} M_i r_{if} - 2\bar{e}_i^T P_i K_i r_{ih} \\ &\quad + 2\bar{e}_i^T P_i \Delta_{\theta_i} \dot{M}_i M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1} \bar{e}_i \\ &\leq -\theta_i \|\bar{e}_i\|^2 \\ &\quad + 2 \|\bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} B_i \Delta_{\theta_i}^{-1}\| \|\bar{e}_i\| \\ &\quad + 2 \|\bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} M_i F_{i(i-1)} M_{i(i-1)}^{-1} \Delta_{\theta_{i-1}}^{-1}\| \|\bar{e}_{i-1}\| + \dots \\ &\quad + 2 \|\bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} M_i F_{i1} M_1^{-1} \Delta_{\theta_1}^{-1}\| \|\bar{e}_1\| \\ &\quad + 2 \|\bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} M_i\| \|r_{if}\| + 2 \|\bar{e}_i\| \|K_i\| \|r_{ih}\| \\ &\quad + 2 \|\bar{e}_i\| \|\Delta_{\theta_i} \dot{M}_i M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1}\| \|\bar{e}_i\| \end{aligned}$$

위 식에서 모든 항은  $\Delta_{\theta_j} H \Delta_{\theta_k}^{-1}$  형태의 행렬들을 포함하고 있다. 이런 형태의 행렬들의  $(s, t)$  번째 블록 행렬은 다음과 같은 형태를 가진다.

$$h_{(s,t)} \theta_k^s / \theta_j^t, 1 \leq s \leq r_j, 1 \leq t \leq r_k, j \geq k \quad (20)$$

(1)의 모든 벡터필드는  $C^\infty$ 이므로 모든  $x(t) \in X, \hat{x}(t) \in$

$V, u \in U$ 에 대하여  $h_{(s,t)}$ 의 모든 원소는 유계이다. 여기서  $\theta_i$ 를 아래 식을 항상 만족하도록 설계한다.

$$\theta_i \geq 1, \theta_i \geq \theta_{i-1}^{r_{i-1}} \quad (21)$$

그러면  $\Delta_{\theta_j} H \Delta_{\theta_k}^{-1}$ 의 모든 원소는 (20)으로 부터 항상 유계가 됨을 알 수 있다. 따라서 모든  $x(t) \in X, \hat{x}(t) \in V, u \in U$ 에 대하여 다음 식을 만족하는  $\theta_i$ 와 무관한 양의 상수  $c_i, k_{ij}, l_{if}, l_{ih}, l_{ip}$ 가 항상 존재한다.

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\theta_i} B_i \Delta_{\theta_i}^{-1}\| &\leq c_i, \|\Delta_{\theta_i} M_i F_{ij} M_j^{-1} \Delta_{\theta_j}^{-1}\| \leq k_{ij} \\ \|\Delta_{\theta_i} M_i\| &\leq l_{if}, \|K_i\| \leq l_{ih}, \|P_i\| \leq l_{ip} \end{aligned} \quad (22)$$

또한 가정 3에 의하여 다음 식을 만족하는  $\theta_i$ 와 무관한 양의 상수  $d_i$ 가 항상 존재한다.

$$\|\Delta_{\theta_i} \dot{M}_i M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1}\| \leq d_i \quad (23)$$

또한 식 (12)와 연속함수의 성질로부터 임의의 양의 상수  $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{ii}, \alpha_i$ 에 대하여 다음 (24)를 만족시키는 양의 상수  $\delta_i, \zeta_i$ 가 항상 존재한다.

$$\begin{aligned} \|e(t)\| \leq \delta_i, \|u(t)\| \leq \zeta_i \Rightarrow \\ \|r_{if}\| \leq \gamma_{i1} \|e_1\| + \dots + \gamma_{ii} \|e_i\|, \|r_{ih}\| \leq \alpha_i \|e_i\| \end{aligned} \quad (24)$$

(22), (23), (24)로부터 (19)의 시간도함수는 다음처럼 간략하게 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}_i) &\leq -\theta_i \|\bar{e}_i\|^2 \\ &\quad + 2c_i l_{ip} \|\bar{e}_i\|^2 \\ &\quad + 2k_{i(i-1)} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_{i-1}\| + \dots + 2k_{i1} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_1\| \\ &\quad + 2l_{if} l_{ip} \|\bar{e}_i\| (\gamma_{i1} \|e_1\| + \dots + \gamma_{ii} \|e_i\|) \\ &\quad + 2l_{ih} l_{ip} \alpha_i \|\bar{e}_i\| \|e_i\| \\ &\quad + 2d_i l_{ip} \|\bar{e}_i\|^2 \end{aligned} \quad (25)$$

다음처럼 상수  $\kappa_i$ 를 정의하자.

$$\kappa_i = \sup_{x \in X, u \in U, e \in V} \|M_i^{-1}\|$$

그러면 다음 식을 쉽게 얻을 수 있다.

$$\|e_i\| \leq \|M_i^{-1} \Delta_{\theta_i}^{-1}\| \|\bar{e}_i\| \leq \kappa_i \theta_i^{r_i} \|\bar{e}_i\| \quad (26)$$

$\gamma_{ij} = 1/(\kappa_j \theta_j^{r_j}), \alpha_i = 1/(\kappa_i \theta_i^{r_i})$ 으로 정의하면 (25)는 다음과 같이 간략하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}_i) &\leq -\theta_i \|\bar{e}_i\|^2 \\ &\quad + 2c_i l_{ip} \|\bar{e}_i\|^2 \\ &\quad + 2k_{i(i-1)} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_{i-1}\| + \dots + 2k_{i1} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_1\| \\ &\quad + 2l_{if} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_1\| + \dots + 2l_{if} l_{ip} \|\bar{e}_i\| \|\bar{e}_i\| + 2l_{ih} l_{ip} \|\bar{e}_i\|^2 \\ &\quad + 2d_i l_{ip} \|\bar{e}_i\|^2 \\ &\leq (-\theta_i + \eta_i) \|\bar{e}_i\|^2 + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} \|\bar{e}_j\|^2 \end{aligned} \quad (27)$$

여기서  $\mu_{ij}, \eta_i$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= k_{ij}l_{ip} + l_{ii}l_{ip} \\ \eta_i &= 2c_{ii}l_{ip} + 2l_{ii}l_{ip} + 2d_{ii}l_{ip} + (i+1)l_{ii}l_{ip} + \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}l_{ip} \end{aligned}$$

마지막으로 전체 관측기 시스템에 대하여 다음과 같은 리아푸노프 후보함수를 정의한다.

$$V(\bar{e}) = \sum_{i=1}^p V_i(\bar{e}_i) \quad (28)$$

여기서  $\bar{e} = [\bar{e}_1^T, \dots, \bar{e}_p^T]^T$ 이다. (27)로부터 (28)의 시간 도함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{V}(\bar{e}) \leq \sum_{i=1}^p (-\theta_i + \lambda_i) \|\bar{e}_i\|^2 \quad (29)$$

따라서 임의의 양의 상수  $\Sigma$ 에 대하여 다음 (30)을 만족하는  $\theta_i$ 가 반드시 존재한다.

$$\dot{V}(\bar{e}) \leq -2\Sigma \|\bar{e}\|^2 \quad (30)$$

(28)와 (30)로부터 다음을 쉽게 얻는다.

$$\frac{\dot{V}}{V} \leq -\frac{2\Sigma}{\lambda_M(P)}$$

위 식에서  $P = \text{blockdiag}(P_1, \dots, P_p)$ 이다. 이것은 리아푸노프 함수의 성질로부터 다음을 의미한다.

$$\|\bar{e}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|\bar{e}(0)\| e^{-\sigma t} \quad (31)$$

여기서  $\lambda_M(P), \lambda_m(P)$ 는 각각  $P$ 의 최대 고유값, 최소 고유값을 의미하고  $\sigma$ 는 다음처럼 정의한다.

$$\sigma = -\frac{\Sigma}{\lambda_M(P)}$$

(31)로부터 다음 식을 만족하는  $\psi > 0$ 가 반드시 존재한다.

$$\|e(0)\| \leq \psi \Rightarrow \|e(t)\| \leq \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

$\psi$ 의 존재로부터 (7)의 해는 항상 콤팩트 집합  $V$ 안에 머문다. 결론적으로 다음 식을 만족하는 모든  $e(0), u(t)$ 에

$$\|e(0)\| \leq \min(\psi, \delta_i), \|u(t)\| \leq \min(\zeta_i)$$

대하여 (31)은 제안한 관측기가 지수 함수적 수렴성을 가짐을 보여준다. ■

#### IV. 인덕션 모터에 응용

이런 장에서는 앞장에서 제안한 관측기 설계 방법을 인덕션 모터에 적용하여 그것의 유효성을 증명하고자 한다. 먼저, 인덕션 모터 모델을 다음과 같이 5차 비선형 모델로 표현한다.

$$\dot{i}_{sa} = \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{ra} + \frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{rb} - \gamma i_{sa} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sa}$$

$$\begin{aligned} \dot{i}_{sb} &= \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{rb} - \frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{ra} - \gamma i_{sb} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sb} \\ \dot{\psi}_{ra} &= -\frac{R_r}{L_r} \psi_{ra} - n_p \omega \psi_{rb} + \frac{MR_r}{L_r} i_{sa} \\ \dot{\psi}_{rb} &= n_p \omega \psi_{ra} - \frac{R_r}{L_r} \psi_{rb} + \frac{MR_r}{L_r} i_{sb} \\ \dot{\omega} &= \frac{n_p M}{J L_r} (\psi_{ra} i_{sb} - \psi_{rb} i_{sa}) - \frac{f_v}{J} \omega - \frac{1}{J} \tau_L \end{aligned} \quad (32)$$

위 식에서  $\sigma = 1 - (M^2/L_s L_r), \gamma = (M^2 R_r + L_r^2 R_s)/\sigma L_s L_r^2$ 이다. 또한,  $i_{sa}, i_{sb}, \psi_{ra}, \psi_{rb}, \omega$ 는 각각 고정자 전류, 회전자 자속, 회전자 속도를 의미한다.  $M, R_r, L_s, L_r, n_p, J, f_v, \tau_L$ 은 각각 코일의 상호인덕턴스, 회전자 저항, 고정자 코일의 인덕턴스, 회전자 코일의 인덕턴스, 자극의 쌍수, 모터와 부하의 관성, 점성마찰계수, 부하토크를 나타낸다.  $u_{sa}, u_{sb}$ 는 각각 고정자의 입력 전압을 나타낸다. 인덕션 모터의 회전자 자속은 측정이 불가능하므로 인덕션 모터 제어를 위하여 자속을 추정하는 것이 매우 중요하다. 여기서 부하토크를 상수라고 가정하면 (32)에 다음 식을 추가할 수 있다.

$$\dot{\tau}_L = 0 \quad (33)$$

상태변수를  $x_1 = [x_{11}^T, x_{12}^T]^T, x_{11} = [i_{sa}, i_{sb}]^T, x_{12} = [\psi_{ra}, \psi_{rb}]^T, x_2 = [x_{21}^T, x_{22}^T]^T, x_{21} = \omega, x_{22} = \tau_L$ 으로 정의한다. 출력을  $y = [y_1^T, y_2^T]^T, y_1 = x_{11} = [i_{sa}, i_{sb}]^T, y_2 = x_{21} = \omega$ 으로 정의하고 입력을  $u = [u_{sa}, u_{sb}]^T$ 으로 정의한다. 그러면 (32)와 (33)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, u, y_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \\ y_1 &= x_{11} \\ y_2 &= x_{21} \end{aligned} \quad (34)$$

위 식에서  $f_1, f_2$ 는 다음처럼 정의한다.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, u, y_2) &= \begin{pmatrix} \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{ra} + \frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{rb} - \gamma i_{sa} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sa} \\ \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2} \psi_{rb} - \frac{n_p M}{\sigma L_s L_r} \omega \psi_{ra} - \gamma i_{sb} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{sb} \\ -\frac{R_r}{L_r} \psi_{ra} - n_p \omega \psi_{rb} + \frac{MR_r}{L_r} i_{sa} \\ n_p \omega \psi_{ra} - \frac{R_r}{L_r} \psi_{rb} + \frac{MR_r}{L_r} i_{sb} \end{pmatrix} \\ f_2(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} \frac{n_p M}{J L_r} (\psi_{ra} i_{sb} - \psi_{rb} i_{sa}) - \frac{f_v}{J} \omega - \frac{1}{J} \tau_L \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

위 (34)는 (1)의 형태를 가진다. 일반적으로 가정 1이 만족됨을 수학적으로 증명하기란 매우 어렵기 때문에 여기서는 모의 실험을 통하여 가정 1이 만족됨을 확인하는 것으로 대신하겠다. 입력으로  $u_{sa} = 50\sin 50t, u_{sb} = 50\cos 50t$ 를 시

시스템 (34)에 가했을 때 모든 상태 변수들이 유계가 됨 모의 실험을 통하여 확인할 수 있다. 시스템 (34)이 가정 2를 만족시키는지 확인하기 위하여 행렬  $M_1, M_2$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$M_1(y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma & 0 & \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2} & \frac{n_p M y_2}{\sigma L_s L_r} \\ 0 & -\gamma & -\frac{n_p M y_2}{\sigma L_s L_r} & \frac{MR_r}{\sigma L_s L_r^2} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{f_v}{J} & -\frac{1}{J} \end{pmatrix}$$

따라서 모든  $x = [x_1^T, x_2^T]^T$ 에 대하여  $M_1, M_2$ 은 항상 비특이 행렬이므로 가정 2를 만족시킨다. 어떤 컴팩트 집합  $V$ 에 속하는 모든  $x$ 에 대하여 (32)로부터  $\dot{y}_2 = \dot{\omega}$ 는 유계임을 알 수 있다. 따라서  $M_1$ 의 모든 원소는 유계이다.  $M_2$ 의 모든 원소는 상수이므로  $\dot{M}_2 = 0$ 이다. 또한 (35)으로부터  $M_1, M_2$ 는 하부 블록 삼각 행렬임을 알 수 있다. 따라서 (20)과 (21)을 고려하면 가정 3을 만족함을 보이는 것은 매우 쉽다. 이제 (34)가 가정 1, 2, 3을 만족하므로 다음과 같은 관측기를 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= f_1(\hat{x}_1, u, y_2) + M_1^{-1}(y_2) \Delta_{\theta_1}^{-1} K_1 (y_1 - \hat{x}_{11}) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + M_2^{-1} \Delta_{\theta_2}^{-1} K_2 (y_2 - \hat{x}_{21}) \end{aligned} \quad (36)$$

모의 실험을 위한 (34)의 파라미터 값으로  $M = 0.12H, R_r = 1.99\Omega L_s = 0.14H, L_r = 0.14H, n_p = 1, J = 0.04kgm^2, f_v = 0.01Nm s, \tau_L = 2Nm$ 을 사용한다. 입력 신호로는  $u_{sa} = 50\sin 50t, u_{sb} = 50\cos 50t$ 을 사용하고 설계 파라미터는  $\theta_1 = 2, \theta_2 = 4$ 으로  $K_1, K_2$ 는 다음과 같이 설계한다.

$$K_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}^T, K_2 = [2 \ 1]^T$$

(34)와 (36)의 초기 조건은 다음과 같이 설정한다.

$$\begin{aligned} x_1(0) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, x_2(0) = [0 \ 2]^T \\ \hat{x}_1(0) &= [4 \ 2 \ 2 \ 1]^T, \hat{x}_2(0) = [2 \ 0]^T \end{aligned}$$

그림 1, 2, 3은 각각  $\psi_{ra}, \psi_{rb}, \tau_L$ 의 추정오차를 보여 준다. 그림에서 추정 오차가 지수 함수적으로 0으로 수렴하고 있음을 확인할 수 있다.

제한한 관측기의 성능 평가를 위하여 자코비안 선형화를 이용한 선형관측기와 성능을 비교하였다. 선형관측기 설계를 위하여 (34)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (37)$$

여기서  $f = [f_1^T, f_2^T]^T, h = [x_{11}^T, x_{21}^T]^T$ 이다. (37)에 대하여 자

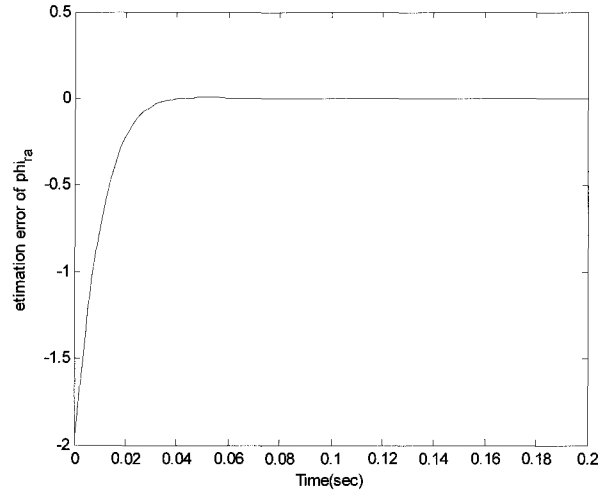


그림 1.  $\psi_{ra}$ 에 대한 추정 오차.

Fig. 1. The estimation error of  $\psi_{ra}$ .

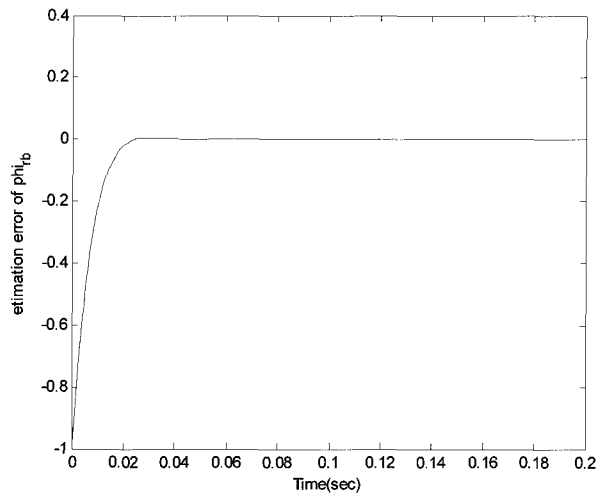


그림 2.  $\psi_{rb}$ 에 대한 추정 오차.

Fig. 2. The estimation error of  $\psi_{rb}$ .

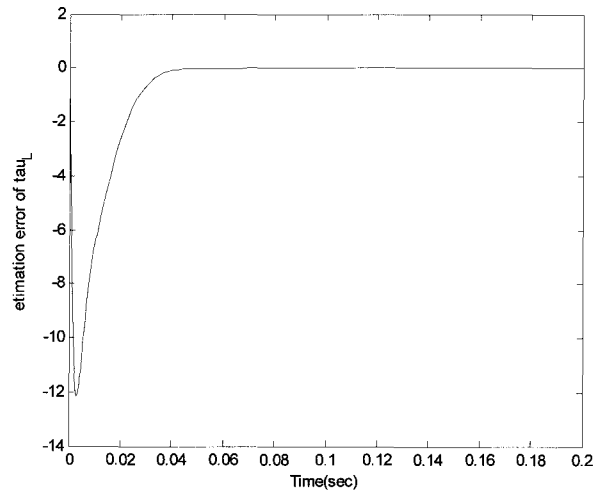


그림 3.  $\tau_L$ 에 대한 추정 오차.

Fig. 3. The estimation error of  $\tau_L$ .

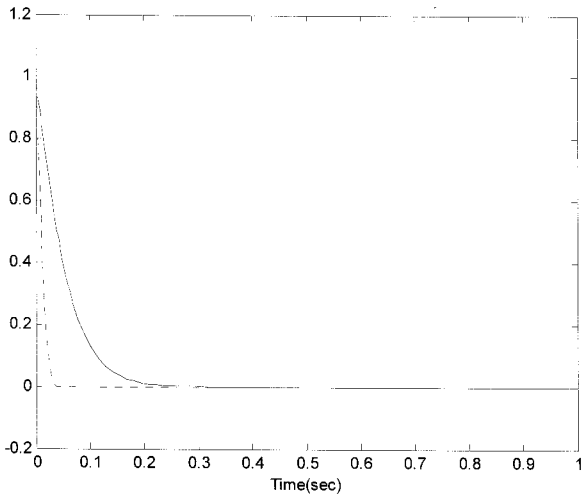


그림 4.  $\hat{\psi}_{ra}(0) = 1$  인 경우  $\psi_{ra}$ 에 대한 추정 오차 비교.  
 Fig. 4. The estimation error of  $\psi_{ra}$  in the case of  $\hat{\psi}_{ra}(0) = 1$ .

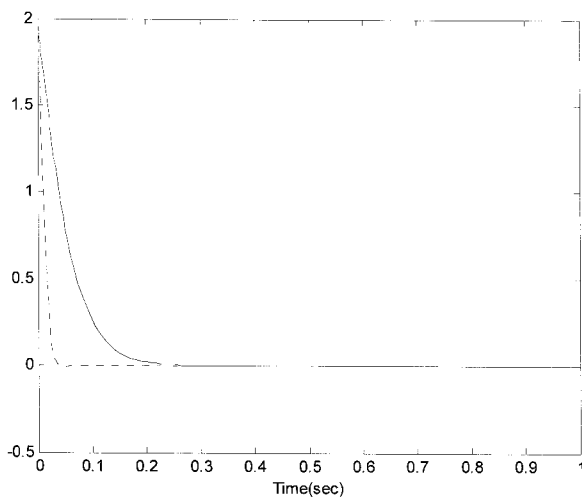


그림 5.  $\hat{\psi}_{ra}(0) = 2$  인 경우  $\psi_{ra}$ 에 대한 추정 오차 비교.  
 Fig. 5. The estimation error of  $\psi_{ra}$  in the case of  $\hat{\psi}_{ra}(0) = 2$ .

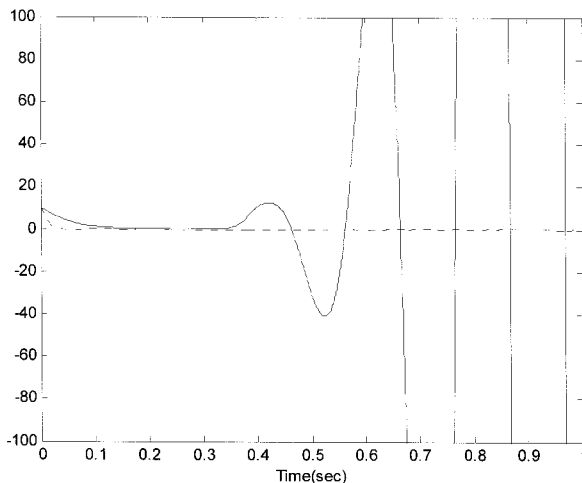


그림 6.  $\hat{\psi}_{ra}(0) = 10$  인 경우  $\psi_{ra}$ 에 대한 추정 오차 비교.  
 Fig. 6. The estimation error of  $\psi_{ra}$  in the case of  $\hat{\psi}_{ra}(0) = 10$ .

코비안 선형화에 기반한 선형 관측기는 다음과 같다.

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \quad (38)$$

여기서 행렬  $A, B, C$ 는 다음처럼 정의한다.

$$A = \partial f / \partial x(0,0), B = \partial f / \partial u(0,0), C = \partial h / \partial x(0)$$

제어 입력은 (37)의 모든 상태 변수를 0으로 안정화시키는 자코비안 선형화를 이용한 선형 제어기를 이용하였다. (36)과 (38)의  $K_i, K$ 는 각각  $A_i - K_i C_i, A - KC$ 의 고유값이 -30이 되도록 설계한다.  $\theta_1 = 2, \theta_2 = 4$ 으로 설정하고 관측기와 시스템의 초기값은 다음과 같이 설정하였다.

$$x(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \hat{x}(0) = [0, 0, x_0, 0, 0, 0]^T$$

그림 4-6은 각각  $x_0 = 1, 2, 10$ 일때  $\psi_{ra}$ 의 추정오차에 대한 (36)과 (38)의 모의 실험결과를 비교한 그림이다. 그림에서 실선은 (38)의 결과이고 점선은 (36)의 결과를 나타낸다. 그림 6에서 보는 것처럼  $x_0 = 10$ 일때 (38)의 추정오차는 발산함을 보여준다. 그러나 (36)의 추정오차는 0으로 수렴하고 있다. 따라서 제안한 관측기는 선형 관측기 보다 더 넓은 수렴반경을 가짐을 알 수 있다.

### V. 결론

본 논문에서 MIMO 비선형 시스템의 로컬 관측기 설계 방법을 제안하였다. 입력과 상태 변수의 유계조건과 가관측성 행렬을 이용하여 제안한 관측기가 로컬 영역에서 지수 함수적 수렴성을 가짐을 증명하였다. 제안한 방법은 존재하는 연구 결과보다 더 넓은 범위의 시스템에 응용 가능하다는 장점을 가진다. 마지막으로 인덕션 모터에 대한 모의 실험을 통하여 제안한 방법의 타당성을 입증하였다.

### 참고문헌

- [1] A. J. Krener and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers," *Systems & Control Letters*, vol. 3, pp. 47-52, 1983.
- [2] X.-H. Xia and W.-B. Gao, "Non-linear observer design by observer canonical forms," *Int. J. Contr.*, vol. 47, pp. 1081-1100, 1988.
- [3] M. Hou and A.C. Pugh, "Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems," *Systems & Control Letters*, vol. 37, pp. 1-9, 1999.
- [4] A. F. Lynch and S. A. Bortoff, "Nonlinear observers with approximately linear error dynamics: The multivariable case," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 46, no. 6, pp. 927-932, June 2001.
- [5] J. P. Gauthier, H. Hammouri, and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems: Application to bioreactors," *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, vol. 37, no. 6, pp. 875-880, June 1992.
- [6] H. B. Shim, Y. I. Son, and J. H. Seo, "Semi-global observer for multi-output nonlinear systems," *Systems &*

*Control Letters*, vol. 42, pp. 233-244, 2001.

- [7] K. Busawon and J. de Leon-Morales, "An observer design for uniformly observable nonlinear systems," *Int. J. Control*, vol. 73, no. 15, pp. 1375-1381, 2000.

- [8] K. Busawon, M. Saif, "A state observer for nonlinear systems," *IEEE Trans. Auto. Contr.*, vol. 44, no. 11, pp. 2098-2103, Nov., 1999.



#### 이 성 렬

2003년 연세대학교 전기전자공학과 박사학위 받음. 2003년~2006년 삼성전자 책임연구원 재직. 2007년~현재 군산대학교 전임강사 재직중. 관심분야는 비선형제어 및 응용.