Journal of the Korean Institute of Illuminating and Electrical Installation Engineers Vol. 22, No.1, pp. 118~123 January 2008 논문 22-1-16

첨두공진점을 갖는 모델 근사화를 위한 전달함수 합성법

(A Transfer Function Synthesis for Model Approximation with Resonance Peak Value)

김종근* · 김주식 · 김홍규
(Jong-Gun Kim · Ju-Sik Kim · Hong-Kyu Kim)

요 약

본 논문은 주파수영역에서 첨두공진점을 갖는 고차모델을 저차모델로 근사화하기 위한 주파수 전달함수 합성법을 제안한다. 제안된 근사화 방법은 근사화된 모델의 분모 다항식에 가중된 오차함수의 최소화에 근거하며, 근사화된 모델의 주파수 전달함수에 대한 계수벡터를 추정하기 위해 RLS 기법을 이용한다. 제안된 방법은 저주파수와 첨두공진점에서 우수한 정합특성을 나타내며, 예제에 의해 제안된 방식의 유용성을 검증한다.

Abstract

This paper proposes a frequency transfer function synthesis for approximating a high-order model with resonance to a low-order model in the frequency domain. The presented model approximation method is based on minimizing the error function weighted by the numerator polynomial of approximated models, which is used of the RLS(Recursive Least Square) technique to estimate the coefficient vector of approximated models. The proposed method provides better fitting in a low frequency and peak resonance. And an example is given to illustrate feasibilities of the suggested schemes.

Key Words : Approximation, Frequency transfer function synthesis, RLS(Recursive Least Square)

1. 서 론

복잡한 동적 시스템의 모델링은 제어기 설계에 있어서 가장 중요한 과제중의 하나이다. 또한 어떤 모델들은 실제 문제에 이용하기에는 지나치게 복잡하므로 원모델보다 근사화된 모델을 얻기 위해서 수학적인 접근을 이용한 근사화 절차가 반드시 선행되어야 한다.

종래에 제안된 방법들 중에서 Hsia[1]의 근사화방법, Padé 근사법[2-3], 연분수 전개방법[4], Markov 파라미터[5] 그리고 Routh 근사법[6-9]은 근사화 과정에서 불안정한 극점이 발생할 수 있고, 안정성 확보를 위한 반복연산 그리고 비교적 큰 오차를 발생시키는 문제점을 갖고 있다. 전달함수의 실 · 허수부 사이의 오차관계를 이용한 Reddy의 방법[10]과 주파수응답을 이용한 Luus의 방법[11] 및 Levy 방법의 개선방법[12-13]도 복잡하고 반복적인 연산과정과 저주파수 정합특성에 문제점을 보이고 있다.

* 주저자 : 충주대학교 전기공학과
Tel : 043-841-5141, Fax : 043-841-5140
E-mail : tofuture2000@yahoo.co.kr
접수일자 : 2007년 9월 17일
1차심사 : 2007년 9월 27일
심사완료 : 2007년 10월 15일

이의 개선방법으로 Sanathan과 Koerner의 가중된 최소자승법을 이용한 반복법[12-13], Lawrence와 Rogers 그리고 Stahl 등의 반복법[13]이 제안되었으나, 편이(bias), 비선형성, 수렴성 및 복잡한 연산 등의 문제를 여전히 해결하지 못하였다. 또한 상태공간모델을 이용한 Moore 등의 BT(Balanced Truncation)[16] 그리고 이를 개선하기 위한 Schur의 BST(Balanced Stochastic Truncation) 알고리즘 등의 방법[17]들이 제안되었으나, 알고리즘이 복잡할 뿐만 아니라 기존의 다른 방법들보다 우수한 특성을 나타내지는 못하였다. 위의 문제점들을 해결하기 위해 Kim 등은 주파수응답으로부터 근사화된 저차의 주파수 전달함수합성에 TLS(Total Least Squares)를 적용한 방법[14-15]을 제안하여 개선된 성능을 보였지만, 첨두공진이 존재하는 모델에 대해서는 만족할 만한 결과를 얻지 못하였다.

본 논문에서는 위와 같은 문제점들을 해결하기 위해 고차모델의 주파수응답으로부터 근사화된 Kim 등의 방법을 변형한 저차의 주파수 전달함수 합성법을 제안한다. 제안된 방법은 고차의 정상상태응답을 고려하여 각각의 주파수에서 이득과 위상응답이 복소평면의 허용영역에 놓이도록 근사화된 저차의 주파수 전달함수에 대한 계수벡터를 RLS (Recursive Least Square) 기법을 이용하여 추정하는 방식이다. 전달함수합성을 이용하지만[18], 제안된 방법은 합성에서 나타나는 분모다항식에 대한 편의(bias)문제를 해결하기 위한 오차조건과 반복과정이 필요 없는 공식화된 관계식을 포함하기 때문에 간단한 연산에 의해 근사화를 성취할 수 있고, 컴퓨터를 이용한 자동연산이 가능하다. 제안된 근사화 방법의 효율성과 우수성을 설명하기 위해 하나의 예제를 다루며, 시뮬레이션 결과에서 기존 방식들과 비교한다.

2. 근사화 모델을 위한 주파수 전달함수합성

고차모델의 주파수응답으로부터 근사화된 저차의 계수값들을 결정하기 위해서 다음과 같은 고차의 주파수 전달함수 $G_H(j\omega)$와 저차의 주파수 전달함수 $G_L(j\omega)$를 고려하자.

$$G_H(j\omega) = \frac{\sum_{g=0}^{m_h} b_g (j\omega)^g}{\sum_{h=0}^{n_h} a_h (j\omega)^h} = |G_H(j\omega)| \cos\phi_H(\omega) + j|G_H(j\omega)| \sin\phi_H(\omega) \tag{1}$$

$$G_L(j\omega) = \frac{\sum_{g=0}^{m_h} d_g (j\omega)^g}{\sum_{h=0}^{n_h} c_h (j\omega)^h} = |G_L(j\omega)| \cos\phi_L(\omega) + j|G_L(j\omega)| \sin\phi_L(\omega) \tag{2}$$

여기서 $|G_H(j\omega)|$와 $\phi_H(\omega)$는 고차모델의 이득과 위상이고, $n_h \ge m_h$, $n_h > n_l \ge m_l$이다. 또한 $|G_L(j\omega)|$와 $\phi_L(\omega)$는 근사화된 저차모델의 이득과 위상이고, $c_0 = a_0$, $d_0 = b_0$이다.

주파수 전달함수 합성에 의한 근사화와 분모다항식에 의한 편의문제를 해결하기 위해 오차관계 $e = \frac{1}{G_H(j\omega)} - \frac{c(j\omega)}{d(j\omega)}$ 와 두 시스템의 직류이득을 등가로 고려하면, 고려된 주파수범위에서 i번째 주파수 ω_i에 대해 식 (2)는 다음과 같이 표현할 수 있고,

$$\sum_{h=1}^{n_l} c_h (j\omega_i)^h - \sum_{g=1}^{m_l} d_g (j\omega_i)^g \left(M_i + jN_i\right) = (d_0 M_i - c_0) + j d_0 N_i \tag{3}$$

여기서 M_i 및 N_i는 $M_i = \frac{\cos\phi_H(\omega_i)}{|G_H(j\omega_i)|}$, $N_i = -\frac{\sin\phi_H(\omega_i)}{|G_H(j\omega_i)|}$ 이며, m_l과 n_l이 짝수일 때에는 $p = \frac{m_l}{2}$, $q = \frac{m_l}{2} - 1$, $u = \frac{n_l}{2}$, $v = \frac{n_l}{2} - 1$, m_l과 n_l이 홀수일 때에는 $p = q = \frac{m_l - 1}{2}$,

$u=v=\frac{n_l-1}{2}$ 로 정의하면, 식 (3)의 $\sum_{h=1}^{n_l} c_h(j\omega_i)^h$ 와 $\sum_{g=1}^{m_l} d_g(j\omega_i)^g$를 다음과 같은 일반식으로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{h=1}^{n_l} c_h(j\omega_i)^h = \sum_{\gamma=1}^{u}(-1)^{\gamma} c_{2\gamma}\omega_i^{2\gamma} + j\sum_{\delta=0}^{v}(-1)^{\delta} c_{2\delta+1}\omega_i^{2\delta+1} \tag{4}$$

$$\sum_{g=1}^{m_l} d_g(j\omega_i)^g = \sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha} d_{2\alpha}\omega_i^{2\alpha} + j\sum_{\beta=0}^{q}(-1)^{\beta} d_{2\beta+1}\omega_i^{2\beta+1} \tag{5}$$

그리고 식 (4)와 (5)를 식 (3)에 대입하고, 실 · 허수부로 구분하여 정리하면, 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} d_0M_i - c_0 &= \sum_{\gamma=1}^{u}(-1)^{\gamma} c_{2\gamma}\omega_i^{2\gamma} \\ &\quad - M_i\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha} d_{2\alpha}\omega_i^{2\alpha} \\ &\quad + N_i\sum_{\beta=0}^{q}(-1)^{\beta} d_{2\beta+1}\omega_i^{2\beta+1} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} d_0N_i &= \sum_{\delta=0}^{v}(-1)^{\delta} c_{2\delta+1}\omega_i^{2\delta+1} \\ &\quad - N_i\sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha} d_{2\alpha}\omega_i^{2\alpha} \\ &\quad - M_i\sum_{\beta=0}^{q}(-1)^{\beta} d_{2\beta+1}\omega_i^{2\beta+1} \end{aligned} \tag{7}$$

본 논문에서는 첨두공진점을 갖는 시스템의 근사화를 위해 식 (6)과 (7)의 각 항들을 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{c}^{even} = [c_2 \quad c_4 \quad c_6 \cdots c_{2u}]^T \in R^u$$

$$\boldsymbol{c}^{odd} = [c_1 \quad c_3 \quad c_5 \cdots c_{2v+1}]^T \in R^{v+1}$$

$$\boldsymbol{d}^{even} = [d_2 \quad d_4 \quad d_6 \cdots d_{2p}]^T \in R^p$$

$$\boldsymbol{d}^{odd} = [d_1 \quad d_3 \quad d_5 \cdots d_{2q+1}]^T \in R^{q+1}$$

$$\boldsymbol{p}_i^{even} = [-\omega_i^2 \ \ \omega_i^4 \ \ -\omega_i^6 \ \cdots \ (-1)^u\omega_i^{2u}] \in R^u$$

$$\boldsymbol{p}_i^{odd} = [\omega_i \ \ -\omega_i^3 \ \ \omega_i^5 \ \cdots \ (-1)^v\omega_i^{2v+1}] \in R^{v+1}$$

$$\boldsymbol{z}_i^{even} = \begin{bmatrix} \omega_i^2M_i + \omega_i^2N_i \\ -(\omega_i^4M_i + \omega_i^4N_i) \\ \omega_i^6M_i + \omega_i^6N_i \\ \vdots \\ (-1)^{p+1}(\omega_i^{2p}M_i + \omega_i^{2p}N_i) \end{bmatrix}^T \in R^p$$

$$\boldsymbol{z}_i^{odd} = \begin{bmatrix} \omega_i(N_i - M_i) \\ \omega_i^3(-N_i + M_i) \\ \omega_i^5(N_i - M_i) \\ \vdots \\ \omega_i^{2q+1}((-1)^qN_i + (-1)^{q+1}M_i) \end{bmatrix}^T \in R^{q+1}$$

$$\theta = [\ \boldsymbol{c}^{even}\cdots \boldsymbol{c}^{odd}\cdots \boldsymbol{d}^{even}\cdots \boldsymbol{d}^{odd}]$$

$$\boldsymbol{X}_i = [\ \boldsymbol{p}_i^{even} \ \ \boldsymbol{p}_i^{odd} \ \ \boldsymbol{z}_i^{even} \ \ \boldsymbol{z}_i^{odd}\ ]$$

$$y_i = d_0(M_i + N_i) - c_0$$

그러면 근사화 모델의 계수벡터 θ의 i번째 식별값 $\hat{\theta}_i$를 다음과 같은 RLS 기법을 이용하여 얻을 수 있다[19].

$$\hat{\theta}_i = \hat{\theta}_{i-1} + \boldsymbol{K}_i\varepsilon_i \tag{8}$$

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{X}_i^T \tag{9}$$

$$\varepsilon_i = y_i - \boldsymbol{X}_i\hat{\theta}_{i-1} \tag{10}$$

여기서 $\boldsymbol{P}_i \in R^{(m_l+n_l+1)\times(m_l+n_l+1)}$의 갱신값과 벡터 $\boldsymbol{K}_i \in R^{m_l+n_l+1}$는

$$\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_{i-1} - \frac{\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{X}_i^T\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{P}_{i-1}}{1 + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{X}_i^T} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{K}_i = \frac{\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{X}_i^T}{1 + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{X}_i^T} \tag{12}$$

이고, ε_i는 i번째 추정오차이다.

3. 예제 및 시뮬레이션 결과

본 장에서는 제안된 근사화 방법의 유용성을 검증하기 위하여 첨두공진점을 갖는 다음과 같은 고차모델을 고려한다[20].

$$G_H(s)=\frac{0.05\left(\begin{array}{c}s^7+801s^6\\+1024s^5+599s^4+451s^3\\+119s^2+49s+5.55\end{array}\right)}{\begin{array}{c}s^7+12.6s^6+53.48s^5\\+90.94s^4+71.83s^3+27.22s^2\\+4.75s+0.3\end{array}} \tag{13}$$

$10^{-3} \le \omega \le 10^{3}$[rad/sec]의 주파수 범위에서 대수적인 간격으로 300개의 데이터를 가지고, Moore의 BT 및 Schur의 BST 방법[20], Kim 등의 주파수 전달함수 합성법과 2장에서 제안한 방법을 적용하여 3차로 근사화한 결과는 각각 다음과 같다.

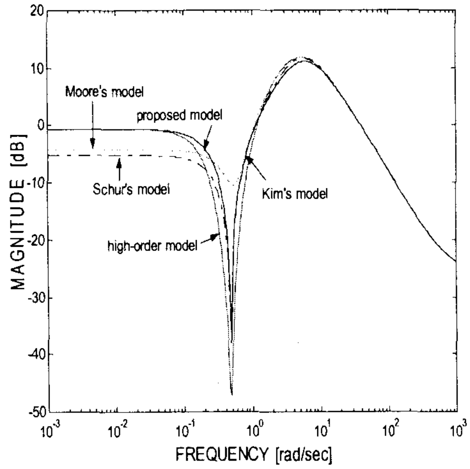
$$G_L^{BT}(s)=\frac{\begin{array}{c}0.05s^3+39.733s^2\\-13.827s+12.612\end{array}}{\begin{array}{c}s^3+10.822s^2\\+35.075s+20.560\end{array}} \tag{14}$$

$$G_L^{BST}(s)=\frac{\begin{array}{c}0.05s^3+39.764s^2\\+0.042755s+9.0549\end{array}}{\begin{array}{c}s^3+10.689s^2\\+38.486s+16.578\end{array}} \tag{15}$$

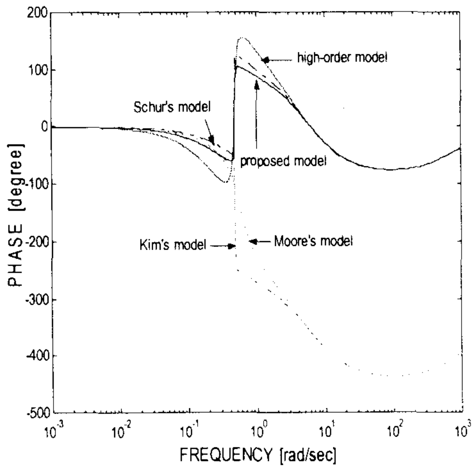
$$G_L^{TLS}(s)=\frac{\begin{array}{c}0.0015043s^3+1.2030s^2\\-0.0004869s+0.2775\end{array}}{\begin{array}{c}0.030087s^3+0.34057s^2\\+1.1584s+0.3\end{array}} \tag{16}$$

$$G_L^{RLS}(s)=\frac{\begin{array}{c}0.0014875s^3+1.1896s^2\\+0.0078623s+0.27750\end{array}}{\begin{array}{c}0.029751s^3+0.33705s^2\\+1.1622s+0.3\end{array}} \tag{17}$$

그림 1과 그림 2는 각각의 결과들에 대한 주파수와 시간응답으로 실선(high-order model)은 고차원모델, 점선(Moore's model) 및 일점쇄선(Schur's model)은 BT 및 BST 알고리즘, 쇄선(Kim's model)은 주파수 전달함수 합성법을 각각 적용한 결과들을 나타낸 것이다. 그리고 실선(proposed model)은 본 논문에서 제안한 방법을 적용한 것이다. 그림 1 (a)의 크기응답으로부터 저주파 및 첨두공진점을 포함하는 영역에서 Moore의 BT 및 Schur의 BST를 적용한 결과보다 Kim 등의 합성법과 본 논문에서 제안된 방법을 적용한 결과가 우수한 정합특성이 나타남을 알 수 있다. 그러나 그림 1 (b)의 위상응답에 의한 결과를 보면 BST 및 제안된 방법이 우수한 성능을 나타내고 있다. 그림 2의 시간응답에서는 그림 1 (a)와 마찬가지로 Kim 등의 합성법과 본 논문에서 제안된 방법을 적용한 결과



(a) magnitude responses



(b) phase responses

그림 1. 고차모델과 근사모델의 주파수응답
Fig. 1. Frequency responses of the High-order model and approximation model

만이 정상오차가 없는 우수한 성능을 나타내지만, BT 및 BST 기법은 정상오차를 보이고 있다. 이 결과들로부터 본 논문에서 제안된 방법이 첨두공진을 갖는 시스템에서 가장 개선된 근사화 성능을 나타내고 있음을 확인할 수 있다.

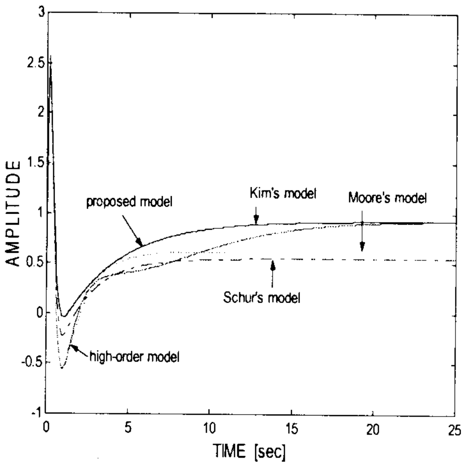


그림 2. 고차모델과 근사모델의 시간응답
Fig. 2. Time responses of the High-order model and approximation model

4. 결 론

본 논문에서는 저차 시스템의 근사화 모델을 얻기 위하여 RLS 기법을 이용한 주파수전달함수 합성법을 제안하였다. 제안된 방법은 고차모델의 정상상태 응답을 고려하며, 분모다항식에 대한 편의문제를 해결하기 위한 오차조건과 반복과정이 필요 없는 공식화된 관계식을 유도하고, 일차연립방정식에 RLS를 적용한 방법이다.

예제에 대한 시뮬레이션 결과로부터 기존의 방법들보다 개선된 정합특성을 얻었으며, 특히 본 논문에서 제안된 근사화 방법은 주파수응답을 직접 이용하였기 때문에 실시스템의 모델링에도 유용하게 활용될 것으로 기대된다. 그러나 제안된 방법은 식별한 근사 모델이 고려하는 주파수영역에 따라 달라지는 문제점과 근사모델의 안정성을 사전에 보장하지 못하는 단점을 가지고 있기 때문에 이를 해결하기 위한 연구가 향후 진행되어야 할 것이다.

감사의 글

본 연구는 2006년도 충주대학교 교내학술연구비의 지원으로 수행되었으며, 관계부처에 감사드립니다.

References

[1] T. C. Hsia, "On the Simplification of Linear Systems", IEEE Trans. Auto. Cont., vol. AC-17, pp. 372-374, 1972.
[2] Y. Shamash, "Stable Reduced-Order Models Using Padé-Type Approximation", IEEE Trans. Auto. Cont., vol. AC-19, pp. 615-616, 1974.
[3] H. Xiheng, "FF-Padé Method of Model Reduction in Frequency Domain", IEEE Trans. Auto. Cont., vol. AC-32, no. 3, pp. 243-246, 1987.
[4] C. F. Chen and L. S. Shieh, "Continued Fraction Inversion by Routh's Algorithm", IEEE Trans. on Circuit Theory, vol. 16, no. 2, pp. 197-202, 1969.
[5] W. Krajewski, A. Lepschy, and U. Viaro, "Model Reduction by Matching Markov Parameters, Time Moments, and Impulse-Response Energies", IEEE Trans. Auto. Cont., vol. AC-40, no. 5, pp. 949-953, 1995.
[6] M. F. Hutton and B. Friedland, "Routh Approximations for Reducing Order of Linear, Time-Invariant Systems", IEEE Trans. Auto. Cont., vol. AC-20, no. 3, pp. 329-337, 1975.
[7] V. Krishnamurthy and V. Seshadri, "Model Reduction Using the Routh Stability Criterion", IEEE Trans. Auto. Cont., vol. AC-23, no. 4, pp. 729-731, 1978.
[8] C. S. Hsieh and C. Hwang, "Model Reduction of Continuous-Time Systems Using a Modified Routh Approximation Method", IEE Proc. Control Theory Appl., vol. 136, no. 4, pp. 151-156, 1989.
[9] Y. Choo, "Direct Method for obtaining Modified Routh Approximants", IEE Electron. Lett., vol. 35, no. 19, pp. 1627-1628, 1999.
[10] A. S. S. R. Reddy, "A Method for Frequency Domain Simplification of Transfer Functions", Int. J. Control, vol. 23, no. 3, pp. 403-408, 1976.
[11] R. Luus, "Optimization in Model Reduction", Int. J. Control, vol. 32, no. 5, pp. 741-747, 1980.
[12] C. K. Sanathanan and J. Koerner, "Transfer Function synthesis as a Ratio of two Complex Polynomials", IEEE Trans. on Auto. Cont, pp.56-58, 1963.
[13] M. T. Jong and K. S. Shanmugam, "Determination of a Transfer Function from Amplitude Frequency Data", Int. J. Cont., vol. 25, no. 6, pp. 941-948, 1977.
[14] J. S. Kim, J. G. Kim and J. W. Ryu, "A Model Reduction with Time Delay in Frequency Domain", KIIEE, vol. 18, no. 6, pp.176-182, 2004.

〔15〕 김종근, "주파수 전달함수 합성법에 의한 모델축소 및 PID 제어기 설계", 공학박사학위논문, 2005.
〔16〕 B. C. Moore, "Principal Component Analysis in Linear Systems : Controllability, Observability and Model Reduction", IEEE Trans. on Auto. Cont, vol. 26, no. 1, pp. 17-32, 1981.
〔17〕 M. G. Safonov and R. Y. Chiang, "A Schur Method for Balanced-Truncation Model Reduction", IEEE Trans. on Auto. Cont, vol. 34, no. 7, pp. 729-733, 1989.
〔18〕 R. Pintelon, P. Guillaume, Y. Rolain, J. Schoukens and H. Van hamme, "Parametric Identification of transfer functions in the frequency Domain - A Survey", IEEE Trans. on Auto. Cont, vol. 39, no. 11, pp. 2245-2260, 1994.
〔19〕 T. K. Moon and W. C. Stirling, Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing, Prentice Hall, 2000.
〔20〕 Matlab Robust Control Toolbox, Ver.6.0.

◇ 저자소개 ◇

김종근 (金鍾根)
1967년 3월 19일생. 1990년 한밭대 전기공학과 졸업. 1992년 충북대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1992~1997년 (주)세방전지 중앙전지기술연구소. 2005년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1999년~현재 충주대학교 시간강사. 2007년~현재 두원공대 겸임교수.

김주식 (金周植)
1971년 1월 23일생. 1992년 충북대 전기공학과 졸업. 1994년 동대학원 졸업(석사). 1998년 동대학원 졸업(박사). 1999~2001년 (주)지앤티씨 기술개발실. 2001~2004년 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부. 2004년~현재 특허청 전기전자심사본부 반도체심사팀 심사관.

김홍규 (金洪奎)
1947년 10월 20일생. 1969년 전북대 전기공학과 졸업. 1981년 단국대 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1993년 전북대 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1978년~현재 충주대학교 전기공학과 교수.