

SIR 알고리즘을 이용한 홍수량 빈도해석에 관한 연구

문 기 호* / 경 민 수** / 김 덕 길*** / 광 재 원**** / 김 형 수*****[†]

Flood Frequency Analysis using SIR Algorithm

Moon, Kiho / Kyoung, Minsoo / Kim, Duckgil / Kawk, Jaewon / Kim, Hungsoo*****[†]

요약 : 일반적으로 빈도해석을 진행할 경우 자료는 정상성을 가정하고 분석하게 된다. 그러나 최근 들어 기후변화 등의 원인으로 인하여 강우나 유출량이 변화하고 있어 변화하는 강우나 유출량을 고려해서 빈도해석을 해야 한다는 주장이 제기되고 있다. 이에 본 연구에서는 Bootstrap을 기반으로 개발된 SIR 알고리즘을 이용하여 홍수 빈도해석을 수행하기 위한 방안을 제시하였다. SIR 알고리즘은 우도함수를 고려하여 자료를 재추출하기 위해서 사용되어 왔으며, 본 연구에서도 최근에 변화하는 홍수량의 변화 양상을 고려하여 홍수량 자료를 재추출하기 위해서 적용되었다. 증가된 홍수 특성을 고려하여 재추출된 홍수량자료는 매개변수적 빈도해석을 함으로써 지속시간별 홍수량을 산정하였으며, 산정된 빈도별 홍수량들을 Bootstrap을 이용해서 재추출한 자료를 이용한 빈도해석 결과와 원자료를 이용하여 분석한 빈도해석 결과를 비교하였다. 비교결과 SIR알고리즘을 이용해서 빈도해석을 진행한 경우의 빈도별 홍수량이 가장 크게 나타났다. 따라서 홍수빈도해석시 현재까지의 변화하는 홍수량 패턴을 고려할 경우, 확률홍수량이 증가하는 것을 확인하였다.

핵심용어 : Bootstrap, SIR알고리즘, 홍수량, 빈도해석

Abstract : Generally, stationary is considered as a basic assumption in frequency analysis. However, rainfall and flood discharge are changing due to the climate change and climate variability. Therefore, there is a new opinion that changing pattern of rainfall and flood discharge must be considered in frequency analysis. This study suggests the flood frequency analysis methodology using SIR algorithm which was developed from bootstrap could be used for considering climate change. Than is, SIR algorithm is selected for resampling method considering changing pattern of flood discharge and it has been used for resampling method with likelihood function. Resampled flood discharge data considering the increase of flood discharge pattern are used for parametric flood frequency analysis and this results are compared with frequency analysis results by Bootstrap and original observations. As the results, SIR algorithm shows the greatest flood discharge than other methods in all frequencies and this may reflect the increasing pattern of flood discharge due to the climate change and climate variability.

Keywords : Bootstrap, SIR Algorithm, Flood discharge, Frequency analysis

1. 서 론

기후변화로 인한 이상홍수의 발생은 현재까지 발생한 홍수의 발생 양상을 변화시키고 있다. 실

제로 일부 지점에서는 홍수량이 증가하는 양상으로 보이기도 한다. 수공구조물을 설계하는데 있어서 중요한 요소 중에 하나는 설계홍수량의 산정이라 하겠다. 일반적으로 설계홍수량을 산정할 때

[†] Corresponding author : sookim@inha.ac.kr
* 비회원 · 인하대학교 사회기반시스템공학부 토목공학과 석사과정
** 정희원 · 인하대학교 사회기반시스템공학부 토목공학과 박사과정
*** 정희원 · 인하대학교 사회기반시스템공학부 토목공학과 박사과정
**** 정희원 · 인하대학교 사회기반시스템공학부 토목공학과 박사과정
***** 정희원 · 인하대학교 토목환경시스템공학과 정교수

는 강우에 대한 빈도해석을 실시한 후에 강우-유출모의를 통해서 산정하도록 되어 있다. 이는 설계홍수량을 산정하는데 필요한 홍수량 자료 충분하지 않기 때문이다. 실제로 김경덕과 허준행(2004)은 재현기간 (T)가 100년인 경우 $4.5 \times T$ 개, 200년인 경우 $5 \times T$ 개 정도의 자료를 이용해야 비교적 정확한 확률값을 얻을 수 있다는 내용을 제시한바 있다. 그러나 아직까지 국내에 이 정도의 관측자료를 가진 지점은 존재하지 않기 때문에 추계학적 방법 등을 이용하여 자료를 생성해서 이용하는 방법이 일반적으로 사용되고 있다.

이에 본 연구에서는 비매개변수적 표본 재추출 기법인 Bootstrap기법을 기반으로 개발된 SIR (Sampling Important Resampling)알고리즘을 이용하여 빈도해석을 하기위한 방안을 제시하고자 한다. Bootstrap기법은 국외는 물론이고 국내에서도 적용된 사례가 있는 복원추출방법 중에 하나이다(이명우 등, 2005; 김병식 등, 2002; 권현환과 문영일, 2004; Srinivas and Srinivasan, 2006). SIR알고리즘은 Albert(1993)에서 사후분포를 결정하기 위해서 제안되었으며, 국내에서는 강승호와 박태성(1996)이 스포츠 분야에 적용한 사례가 있으며, 수자원 분야에서는 이명우 등(2005)이 SIR알고리즘을 확률강우량 산정을 위하여 적용한 사례가 있다. 본 연구에서는 SIR알고리즘을 이용하여 확률홍수량을 산정하는 방안을 제시하고자 한다. 또한 SIR 알고리즘을 적용할 경우에는 우도함수를 사용하게 되는데 이러한 우도함수를 사용할 경우, 최근에 발생하고 있는 홍수량의 변화양상을 고려한 우도함수를 적용함으로써 최근까지의 변화양상을 고려하면서 빈도해석에 필요한 충분한 자료를 생성할 수 있다는 장점이 있다. 마지막으로 본 연구에서 제시한 방법론에 의해서 산정된 확률홍수량은 향후 수공구조물을 설계하는데 유용한 정보를 제공할 수 있을 것으로 생각된다.

2. Bootstrap과 SIR 알고리즘

2.1 Bootstrap

현재 사용되고 있는 대부분의 통계이론은 계산 능력이 미미했던 1930년대에 이르러 이루어 졌으며, 대부분의 경우 정규성 가정을 전제로 한 수리적 측면에서 발전해 왔다. 그러나 컴퓨터의 발전에 따른 계산능력의 향상으로, 확정론적 접근방법이나 추계학적 접근방법 등에 대한관심이 증가하기 시작하였다. 또한 컴퓨터의 계산속도의 발전에 힘입어 Monte Carlo 방법의 활용성이 증가하게 되어 복잡한 통계문제도 효과적으로 처리할 수 있게 되었다.

Eform(1979)에 의해 제안된 Bootstrap방법은 주어진 표본을 토대로 재표본 추출을 하여 연구대상이 되는 어려운 문제들을 포함한 많은 통계문제에 여러 가지 이론적 이점들이 밝혀져 왔다. 더욱이 컴퓨터의 발전과 더불어 그 효용성이 높아지고 있다(전명식 등, 1997).

Bootstrap방법은 알려져 있지 않은 확률분포 $g(\theta)$ 로부터 크기가 n 인 무작위 표본 $X = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ 를 얻었다고 할 때, 이 관찰값 X 로부터 경험적 분포 $h(\theta)$ 를 만든 뒤 무작위 추출표본 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 를 $h(\theta)$ 로부터 얻는 것을 말하며, 이를 Bootstrap표본이라고 통칭한다. 여기서 기본적인 개념은 표본 $X = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ 에 근거한 추측통계량과 Bootstrap표본 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 에 의한 추측통계량의 조건부확률분포가 적절한 조건하에서 유사할 것이라는 점이다. 본 연구에서는 관측자료

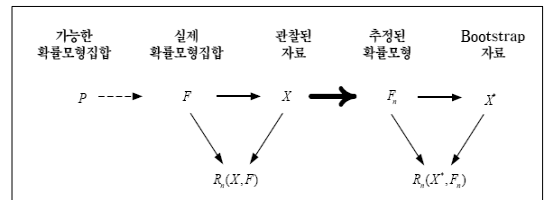


Fig. 1. Bootstrap 과정

로부터 Bootstrap 표본 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 을 추출하기 위하여 Monte-carlo 방법을 이용하였다. 다음 그림은 전명식 등(1997)에서 제시한 Bootstrap 과정을 보여준다.

2.2 SIR 알고리즘

Weighter Bootstrap Sampling 이라고도 불리는 SIR 알고리즘은 Monte Carlo 베이저안 기법의 한 종류로서 기존의 고전적인 분석 방법에 비해 유용한 사전정보의 사용을 가능하게 하고 표본의 크기가 작을 때에 상대적으로 더 신뢰성 있는 분석을 할 수 있는 방법이다. SIR 알고리즘의 주된 목적은 관심 있는 모수의 사후밀도함수를 사전밀도 함수와 우도 함수로부터 구하는 것이다. 본 연구에서는 우도 함수를 최근의 홍수량 자료를 이용해서 산정하였다.

Rubin(1987)이 제시한 SIR 알고리즘의 방법은 $g(\theta)$ 라는 확률분포로부터 표본 값을 직접 모의하기 어려울 때 $g(\theta)$ 와 유사하고 모의가 비교적 쉬운 $h(\theta)$ 를 결정하여 이를 산정된 사전확률분포에 반영하는 방법이다. 즉, 사전확률 분포 $h(\theta)$ 를 결정하고, 결정된 사전확률분포 $h(\theta)$ 로부터 크기가 n 인 표본 $X = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ 을 설정한 후 표본 X 의 가중치 $w(\theta_i)$ 를 계산한다. 여기서 표본 X 로부터 θ_i 가 선택될 확률이 $w(\theta_i)$ 에 비례한다고 가정하고 $X^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*)$ 를 생성하는 과정이 SIR 알고리즘 이다.

$w(\theta_i)$ 는 다음에 의해서 구할 수 있다. 즉, θ 는 우리가 알고자 하는 매개변수이고, 이 θ 는 사후밀도 함수 $\pi(\theta|data) = k \cdot \pi(\theta) \cdot L(\theta)$ 로부터 구해진다. 여기서 $\pi(\theta)$ 는 우도 함수, k 는 비례상수이며, 사전 밀도 함수로부터 표본을 위하는 것이 가능하다는 전제하에서 계산된다. 위의 SIR 알고리즘에서 $h(\theta) = \pi(\theta)$ 이고, $g(\theta) = \pi(\theta|data)$ 로 놓으면 가중 함수는 식(1)과 같다.

$$w(\theta) = g(\theta)/h(\theta) = \frac{\pi(\theta|data)}{\pi(\theta)} = k \cdot L(\theta) \quad (1)$$

여기서, $X(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ 를 사전밀도 함수 $\pi(\theta)$ 로부터 표본이라 하면, 이로부터 우리는 사전밀도 함수의 표본 $X(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ 를 특정한 가중 확률 $L(\theta_i) = (L(\theta_1), L(\theta_2), \dots, L(\theta_n))$ 를 갖고 대체하는 사후밀도 함수의 대략적인 표본 $X^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_n^*)$ 를 얻을 수 있다. 자료를 관측하기 이전에 각 θ_i 는 모두 $1/n$ 만큼의 가중치를 갖고 있다. 이러한 가중치는 우도 함수와의 곱을 통해 배가된다.

3. Bootstrap과 SIR 알고리즘을 이용한 홍수량 빈도해석

3.1 대상지점 및 홍수량 자료

3.1.1 대상지점

본 연구에서 대상지점으로 선정한 무성지점은 IHP 시험 유역중에서 위천유역(Fig. 2)에 속해있는 수위 관측소 이다. 위천유역은 지방1급 하천과 지방 2급하천으로 나뉘며, 지방 1급하천에 해당하는 유역면적은 1,403.06km² 유로연장 113.50km 이다. 지방2급하천에 해당하는 유역면적은 690.16km² 이고 유로연장은 84km이다.



Fig. 2. 위천유역

위천 유역에는 무성 관측소외에도 병천, 미성, 고로, 동곡, 효령의 총 6개의 수위관측소와 군위

남부, 효령, 대울, 곶, 우보, 산성, 신령, 의흥, 화수, 화산, 석산의 우량관측소가 위치하고 있다. 무성관측소는 경북 군위군 군위읍 무성3리에 위치하고 있으며 좌표는 동경 128°33'27" 북위 36°11'27"이다. 1982년부터 관측을 시작하였으며, 관측 기종은 T/M이다.

3.1.2 홍수량 자료의 특성

본 연구에서는 무성지점의 1982년부터 2005년까지의 유출량(홍수량)자료를 이용하였다(Fig. 3). Fig. 3을 보면, 1995년 이후부터 홍수량이 증가하였고 연 최대치 홍수량에 대한 변동폭도 커지고 있음을 알 수 있다. Table 1은 홍수량자료에 대한 기본 통계치를 보여주고 있다. 이에 본 연구에서는 1995년 이후, 증가하는 홍수량 특성을 고려하여 자료를 재추출함으로써 빈도해석에 필요한 홍수량 자료의 수를 확보하도록 하였다.

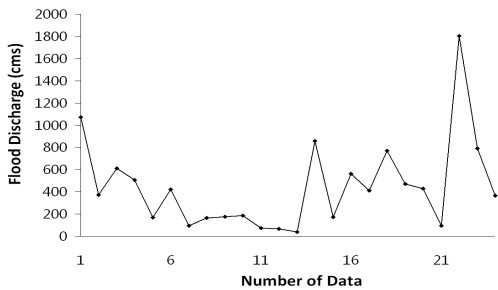


Fig. 3. Flood discharge at Moosung station

Table 1. Statistical characteristics of Observation data

통계치	홍수량
평균	445 cms
표준편차	403 cms
최대값	1,803 cms
최소값	39 cms

3.2 Bootstrap과 SIR 알고리즘을 이용한 표본 재추출

3.2.1 Bootstrap을 이용한 표본 재추출

본 연구에서는 표본 재추출을 위해서 일반적인

로 사용되고 있는 Bootstrap을 적용해서 총200개의 자료를 재추출하였으며, 재추출된 자료는 다음 Fig. 4와 같고, 기본 통계치는 Table 2와 같다.

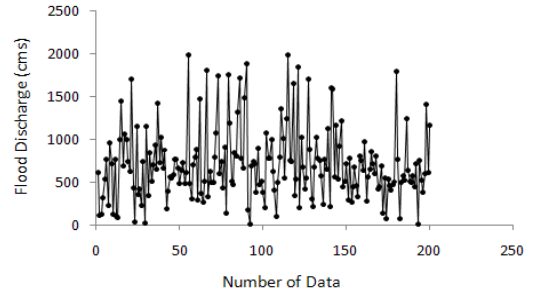


Fig. 4. Resampled flood discharge by Bootstrap

Table 2. Statistical characteristics of Bootstrap data

통계치	홍수량
평균	710 cms
표준편차	425 cms
최대값	1,993 cms
최소값	11 cms

Bootstrap을 이용해서 자료를 재추출할 경우, 관측값에 비해서 최대값은 10% 증가하고 최소값은 39cms 보다 작은 11cms가 발생되었다. 홍수량의 평균값은 자료의 개수가 증가하면서 관측치의 큰 값과 유사한 값들이 생성되면서, 445cms에서 710cms로 증가하였으나 평균을 중심으로 자료의 퍼짐정도를 나타내는 표준편차의 변화는 상대적으로 적었다.

3.2.2 SIR 알고리즘을 이용한 표본 재추출

SIR알고리즘을 이용한 표본을 재추출하기 위해서는 우도함수의 설정이 필요하다. 본 연구에서는 우도 함수의 선정을 위해 최근자료를 기준으로 자료의 개수를 변화시켜 가면서 표준 편차를 계산할 때 표준편차가 수렴하기 시작하는 최근 11년치 자료를 사용하였다. 실제로 표준편차는 꾸준히 감소하였으나 Fig. 3의 홍수량 관측자료를 고려하여 증가하는 경향을 보이기 시작하는 최근 11년치

자료를 사용하였다. Fig. 5는 각 자료 수에 따른 표준 편차의 변화를 나타낸다.

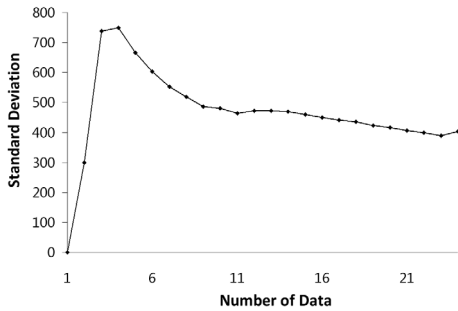


Fig. 5. Standard deviation according to the number of data

최근 11년치 자료에 해당하는 우도함수의 분포형을 선정하기 위해 Anderson Darling(AD) 검정을 실시하였다. Anderson Darling 검정은 표본 데이터의 경험적 누적 분포함수와 데이터가 정규일 경우 예상되는 분포를 비교하고 관측된 차이가 충분히 큰 경우 모집단이 정규 분포를 따른다는 귀무가설을 기각할 경우, 제시된 분포형이 적절하다는 개념의 검정방법이다. 다음의 그림6은 Anderson Darling 검정 결과를 나타낸 것이며, 검정결과 2변수 대수정규분포(Lognormal-2)가 적절함을 확인하였다(Fig. 6, Tabel 3).

Anderson Darling검정에서 적절한 분포형을 찾는 기준은 P-value의 값이다. P-value가 0.05보다 크면 귀무가설을 기각하므로 제시한 분포형이 적절하게 된다. 또한, Anderson Darling 통계

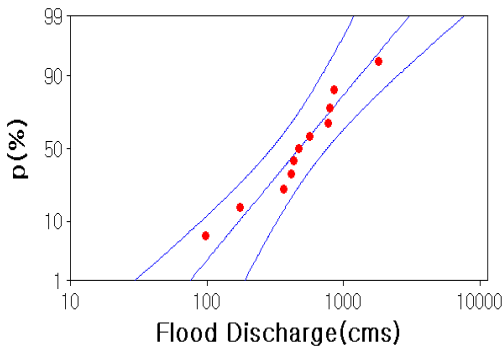


Fig. 6. Lognormal distribution-95% CL

량은 데이터가 귀무가설로 채택한 분포를 얼마나 잘 적합하는지를 나타내는 통계량으로 그 값이 적을수록 이론적 분포를 잘 따른다는 의미이다. 즉, 다수의 분포가 검정을 통과할 경우, AD값이 작은 분포를 선정하면 된다. 위의 과정을 통해 얻어진 우도함수 분포(2변수 대수정규분포)와 매개변수의 결과를 이용하여 과거 24년치 유량 자료에 반영한 후 가중치를 주어 표본을 재추출 하였다. 표본을 재추출할 경우, 재추출하는 자료의 개수를 선정해야한다. 본 연구에서는 자료의 개수를 100, 200, 300, 500개로 변화시켜 가면서 경험적 누가분포 곡선(Cumulative Distribution Function, CDF)을 비교하였다(Fig. 7).

경험적 누가분포 곡선을 비교한 결과 200개 이후부터는 자료의 개수가 늘어나도 곡선의 변화가 거의 없었기 때문에 적절한 재추출 자료의 개수를 200개로 선정하였다. 다음 Fig. 8과 Table 4는 SIR 알고리즘을 이용해서 재추출한 자료와 통계치를 보여준다.

SIR 알고리즘을 이용해서 200개의 자료를 재추출한 경우, Bootstrap을 이용해서 재추출한 결과와 비교할 때, 평균과 표준편차는 각각 710 cms 에서 716cms로 425cms에서 443cms으로 증가하였고 최대값은 동일한 결과를 보였다. 마지막으로 최소값의 경우는 11cms에서 103cms로 크게 증가하였다. 따라서 SIR 알고리즘을 이용할 경우, 최대값 보다는 최소값에 영향을 주는 것을 알 수 있었다.

Table 3. 적합도 검정 및 매개변수

Goodness of Fit Test			
Distribution	AD	P-value	
Lognormal	0.326	0.461	
Maximum Likelihood Estimates of Distribution Parameters			
Distribution	Location	Shape	Scale
Lognormal	6.15967		0.79402

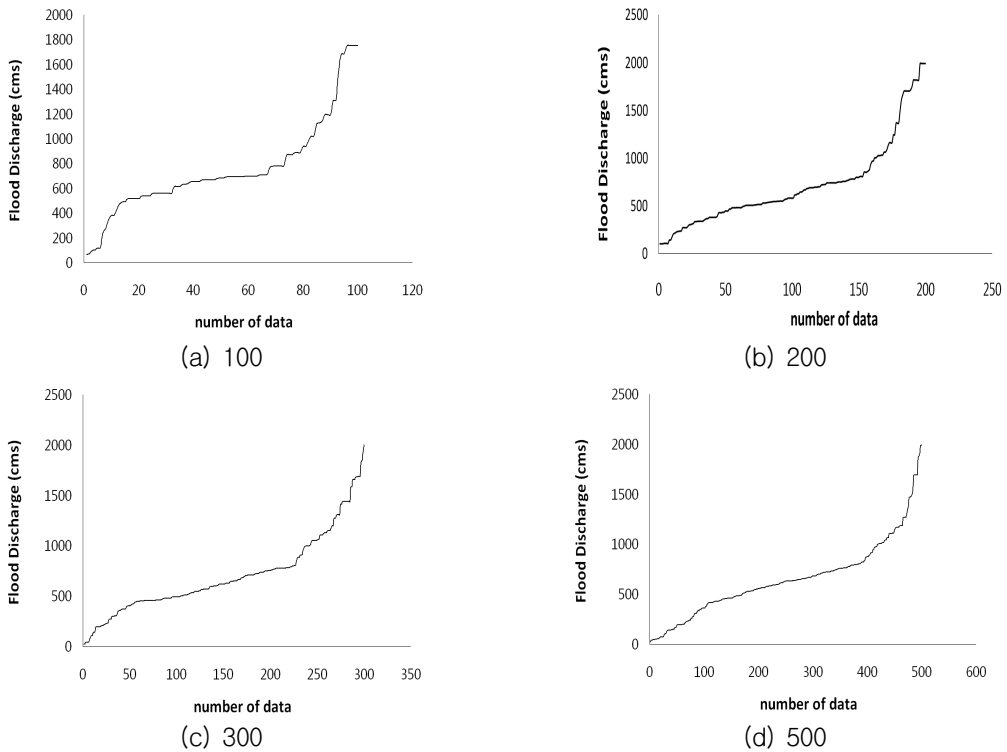


Fig. 7. CDF for the resampled data by SIR algorithm

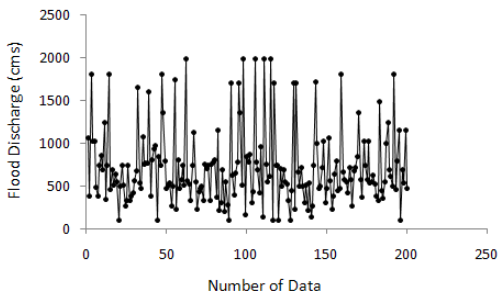


Fig. 8. Resampled flood discharge by SIR algorithm

Table 4. Statistical characteristics of Bootstrap data

통계치	홍수량
평균	716 cms
표준편차	443 cms
최대값	1,993 cms
최소값	103 cms

3.3 홍수량 빈도해석

Bootstrap과 SIR알고리즘을 이용해서 재추출한 200개의 홍수량 자료를 대상으로 빈도해석을 실시하였다. 빈도해석에 앞서 각각의 방법에 따른 홍수량의 히스토그램은 다음 그림과 같다(Figs. 9 and 10).

히스토그램을 비교해 본 결과, 전반적인 분포의 형태는 유사한 것으로 보인다. 다만, SIR에 의해서 생성된 자료에서 평균이 오른쪽으로 이동함을 확인하였다. 즉, 최대값은 증가하고 최대값 주변에 더 많은 값들이 분포하고 있음을 알 수 있다.

Bootstrap과 SIR알고리즘을 통해 얻어진 무성 지점의 자료를 이용하여 빈도해석을 실시한 후, 결과를 비교하였다. 빈도 해석을 위해서 FARD 2006을 이용하였다. 빈도해석을 위한 적정분포형으로는 GEV분포를 선정하였으며 매개변수 추정에는 확률가중모멘트법을 이용하였다. 아래의 Table

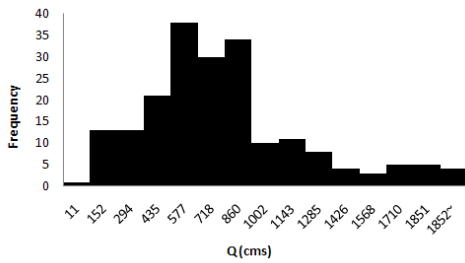


Fig. 9. Resampled flood discharge histogram by Bootstrap

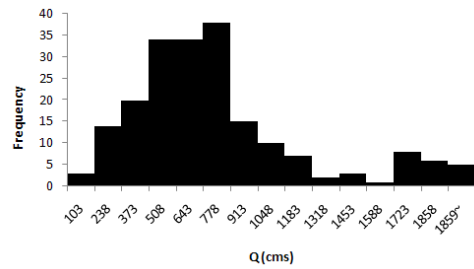


Fig. 10. Resampled flood discharge histogram by SIR algorithm

Table 5. The results of flood discharge frequency analysis (Unit : cms)

Frequency (year)	Bootstrap	SIR	Observation
20	1,513	1,567	1,217
50	1,847	2,007	1,682
80	2,020	2,255	1,959
100	2,103	2,379	2,101
150	2,254	2,613	2,377
200	2,363	2,788	2,589
300	2,518	3,047	2,912
500	2,716	3,395	3,363

5는 빈도해석 결과를 보여준다.

Bootstrap방법과 SIR 알고리즘의 빈도해석 결과를 비교한 결과 저빈도에서는 큰 차이를 보이지 않았으나 빈도가 증가할 수 록 그 차이가 점차 커지는 것을 알 수 있다. 반면에 관측홍수량을 이용한 빈도해석 결과의 경우, 저빈도에서는 Bootstrap방법과 SIR 알고리즘에 비해서는 모두 작은 값을 보였으나, 빈도가 커질 수 록 증가하여 150년 빈도 이후부터는 Bootstrap방법보다는 크고 SIR 알고리즘을 이용한 방법보다는 작은 값을 보였다. 전반적으로 SIR 알고리즘을 이용하여 재추출한 자료를 이용해서 빈도해석한 결과가 가장 큰 값을 보였으며, 이는 SIR 알고리즘의 적용과정에서 최근의 증가하는 홍수량 특성을 고려한 우도함수가 고려된 결과라고 생각 된다.

5. 결 론

본 연구에서는 홍수량 빈도해석에 필요한 충분한 자료를 확보하기 위하여 Bootstrap과 SIR 알고리즘을 각각 적용하여 자료를 재추출한 후, 빈도해석 결과를 비교검토 하였다. 이를 통해서 얻은 결론을 정리하면 다음과 같다.

SIR알고리즘을 이용해서 재추출한 홍수량을 가지고 빈도해석을 하는 경우, 원자료를 이용해서 빈도해석을 하는 경우나 Bootstrap을 이용해서 재추출한 결과를 이용해서 빈도해석을 한 경우에 비해서 큰 값을 가지는 것을 알 수 있으며, 이는 최근의 증가하는 경향을 포함하고 있는 우도함수를 고려했기 때문인 것으로 판단된다.

관측자료를 이용해서 빈도해석한 결과와 Bootstrap과 SIR 알고리즘을 이용해서 자료를 재추출해서 빈도해석한 결과를 비교분석하였다. 분석결과 빈도에 따라서 값이 차이가 각각 다르게 나타났다. 따라서 제한된 자료를 가지고 빈도분석을 하는 경우에는 결과에 대한 검증이 필요할 것으로 생각된다.

SIR알고리즘은 과거의 자료로부터 우도함수와 분포형을 찾아내고 새로운 표본을 추출해 낼 수 있다. 따라서 우도함수를 찾을 때 현재까지의 변화하는 양상을 고려해서 미래의 우도함수를 예측한 후, 자료를 재추출 하여 빈도해석을 한다면, 미래의 변화하는 홍수를 고려한 수공구조물을 설계하는데 참고자료로 활용할 수 있을 것으로 생각 된다.

감사의 글

본 연구는 건설교통부 한국건설교통기술평가원의 이상기후대비시설기준강화 연구단에 의해 수행되는 2005 건설기술기반구축사업(05-기반구축-D03-01)에 의해 지원되었습니다.

참고 문헌

- 강승호, 박태성, “몬테칼로 베이지안 분석과 응용 사례”, 한국통계학회논문집, 제3권, 제1호, pp. 169-177, 1996.
- 권현한, 문영일, “수문시계열의 Bootstrap 신뢰구간 추정기법 응용”, 대한토목학회 논문집, 제24권, 제6B호, pp. 567~576, 2004.
- 김경덕, 허준행, “수문자료 크기에 따른 지역빈도 해석 적용성 기준 검토”, 2004 한국수자원학회 학술발표회논문집, 한국수자원학회, p. 27, 2004.
- 김병식, 김형수, 서병하, “Bootstrap 방법에 의한 하천유출량 모의와 왜곡도”, 한국수자원학회 논문집, 제35권, 제3호, pp. 275~284, 2002.
- 이명우, 이충성, 김형수, 심명필, “Bootstrap방법과

- SIR알고리즘을 이용한 확률강우량 결정과 위험도 분석”, 대한토목학회 논문집, 제25권 5B호, pp. 365-373, 2005.
- 진명식, 정형철, 진서훈, “붓스트랩방법의 이해”, 자유아카데미, 1997.
- Albert, J. H., Teaching bayesian statistics using sampling methods and MINITAB, The american statistician, pp. 182-191, 1993.
- Eform B., Bootstrap Method:Another Look at the Jack-nife, The annual of statistics, Institute of Mathmatical Statistics, Vol. 7, No. 1, pp. 1-26, 1979.
- Rubin D. B., A Noniterative sampling/importance resampling alternative to the data augementation algorithm for creating a few imputation are modest:The SIR algorithm, Journal of the american statistical addiciation, American statistical association, Vol. 82, pp. 543-546, 1987.
- Srinivas, V. V., Srinivasan, K., Hybrid matched-block bootstrap for stochastic simulation of multiseason streamflows, Journal of Hydrology, Vol. 329, Issues 1-2, pp. 1-15, 2006.