

효과적인 수학 교수를 위한 교사 지식 기반 영역과 수학적 지식 구조¹⁾

김영옥²⁾

본 연구는 효과적인 수학 교수(teaching)를 위해 교사들이 갖추어야 할 지식 기반 영역들을 소개하고, 그 지식 기반 영역 중에서도 가장 핵심 영역인 수학적 지식에 대한 다양한 정의와 그 구조에 관한 모델을 소개하고자 한다. 이를 통해, 본 연구는 교사 지식 영역에 대한 전반적인 이해를 제공 할 뿐만 아니라, 수학적 지식에 대한 구체적이고 이론적인 틀을 제공하고자 한다.

주요용어 : 효과적인 수학 교수, 교사 지식 기반 영역, 수학적 지식, 수학적 구조

I. 서론

최근 우리나라 교육계의 최대 쟁점 중에 하나가 교사 다면평가제 도입이다. 교사 평가제도의 한 형태인 다면평가(Multi-source Assessment)는 종래 교장·교감에 의한 하향식 평가에 동료교사들에 의한 수평적 평가와 학생·학부모에 의한 상향식 평가가 더해짐으로서 보다 종합적이고 공정하며 객관적인 교사 평가를 추구하데 그 목적이 있다고 볼 수 있다(이병환, 김순남, 2004). 하지만 교사 다면평가는 그 근본 취지와는 다르게 현재 일선 학교 현장에 적용하는데 있어서 평가 설계 및 절차와 관련된 많은 문제점들이 지적되고 있다. 그 중에서도 학생이 다면평가제의 평가주체가 되는 것과 교사의 무엇을 평가할 것인가에 대한 견해가 심각하게 논의되고 있다.

학생이 교육의 질을 결정하는 중요한 요인에 해당하고, 교수활동의 주된 대상으로서 교사의 수업활동을 관찰하고 평가할 수 있는 적절한 위치에 있다는 점에서 학생이 교사평가의 주체가 되는 것에 대해 대부분 동의를 하고 있다(이병환, 김순남, 2004; 임정원, 2002). 하지만 교사를 평가할 때 가장 중요한 요소로서 '교사의 무엇을 평가할 것인가?'하는 문제는 어떤 실험적 조사(inquiry)를 통해 얻은 결과에 근거해서 범국가적으로 통용될 수 있는 공통적 요소를 제시할 수 있는 차원이 아니라, 각 나라마다 소유하는 문화와 사회적 요구에 의해 결정되는 교육적 신념에 근거할 때가 많다.

Bruner는 1996년도에 출판된 그의 책, 「교육의 문화(The Culture of Education)」에서

1) 본 연구는 2008학년도 경남대학교 학술연구장려금 지원으로 이루어졌음.

2) 경남대학교 (youokim@kyunnam.ac.kr)

교육 목적의 이율배반적인 모순과 혼란을 설명하는 가운데 현대 교육의 보편적 기능으로서 ‘개인으로 하여금 자신의 잠재능력을 최고로 발휘하도록 하며, 인간에게 자신의 위트와 기능, 열정을 최대한 이용할 수 있게 해주는 도구와 기회를 제공하는 것이다 (p. 67)’ 라고 기술하고 있다. 이 두 교육의 기능 중 어느 기능에 더 많은 비중을 두느냐에 따라 그 사회의 교육목적도 구체화되며, 그에 따라 교사에게 어떤 기능과 역할이 요구될 지 자연스럽게 결정된다. 하지만 이런 교육목적의 혼란 속에서도 교사의 역할 중에서 가장 중요한 역할이 ‘가르치는 것(teaching)’이라는 것과 ‘교수의 효과성(teaching effectiveness)³⁾’이 우수한 교사를 판별하는 핵심적 기준이 된다는 점에서는 이견이 없다.

교수(teaching)의 효과성이 학생의 학습에 가장 유의미하게 영향을 미치는 요인이라는 교육계의 오래된 통념에도 불구하고, 교수의 본질과 교수-학습과의 관계에 대한 심도 있는 논의가 시작된 것은 그리 오래 되지 않았다. 현재 교육학의 세계적 흐름을 주도하고 있는 미국의 경우 1960년대부터 1970년대 중반까지는 교실상황 속에서 교사의 교수행동(teaching behavior)을 관찰하여 그 행동 특징들과 학습자의 학업성취도와와의 상관관계를 분석하여 효과적인 교수(effective teaching)란 어떤 특징을 가지는지 그 특징을 제시하고자 했던 ‘과정-결과(process-product)’ 중심의 연구형태가 주류를 이루었다 (Shulman, 2004a).

과정-결과 중심의 연구 형태는 미국의 수학교육계에서도 조금 늦은 1970년대 중반부터 1980년대 초반에 걸쳐 나타나게 된다. Brophy와 Evertson(1976), 그리고 Good와 Grouws(1979)는 수학 학업성취도가 높게 나온 학생들을 지도한 초등 교사들의 수학 교수활동 패턴을 관찰, 분석하였으며, Evertson과 그의 동료들은(Evertson et al., 1980; Evertson, Emmer, & Brophy, 1980) 중학교 수학교사들의 교수활동을 관찰함으로써 효과적인 교수의 공통된 특징들을 보고하였다. 이들에 따르면 좀 더 우수한 수학교사는 학생 혼자 자습하는 시간보다는 학생들에게 수학적 내용을 소개하고 그 내용에 대해 학생들과 토론하는데 더 많은 시간을 소비하였다. 효과적인 수학교사는 그렇지 못한 교사보다 학생들에 대한 기대치가 높고, 숙제를 자주 제시하며, 학생들의 학업성취도에 대한 높은 관심과 더불어 학생들을 계속적으로 격려하는 특징을 보였다. 또한 효과적인 교사들은 열정적으로 가르치고, 자신이 가르치는 내용에 대해서 확신이 있으며, 과제 지향적인 특징을 보인다고 보고하였다. 학생들의 학업성취도를 효과적인 교수 활동을 판단하기 위한 궁극적 기준으로 생각한 과정-결과 연구들의 방법론적 접근 방식에 대해 1980년대 초부터 비판이 일기 시작했다. 이 비판에 대해 Shulman(2004a)은 과정-결과 형태의 연구방법론이 효과적인 수업에 대한 유용한 정보를 제공한 반면에, 수업의 핵심위치에 놓인 교사의 사고(thinking)에 대해서는 무관심했던 사실에 대해 사람들이 인식하기 시작하였다고 평하고 있다. 이때부터 교사교육 연구가들은 교실상황 속에서 관찰되는 교사들의 교수활동은 그들의 지식, 신념, 태도와 같은 다양한 내적요인들에 의해서 결정된다는 사실에 관심을 가지기 시작하였다. 실제로 수학교육에서는 McGilliard(1983)가 기하에 대한 교사들의 개념적 시스템과 그들의 교수행동에 대한 연관성을 연구하였으며, Thompson(1984)은 교사들이 가지고 있는 수학에 대한 신념과 그들의 교수활동과의 상관관계를 분석, 보고한 바 있다.

1980년대 교사의 내적요인과 교수활동과의 관계에 대한 관심이 고조되는 가운데에서도 여

3) 교육관련 문헌에서는 ‘교수(敎授)’와 ‘수업(授業)’이라는 용어가 영어의 ‘teaching’을 의미하는 단어로 자주 혼용되고 있다. 우리나라에서는 교수라는 용어가 사람을 일컫는 용어로도 사용되기 때문에 혼동을 피하기 위해 수업이라는 용어를 사용하는 문헌들이 많은 것으로 추측된다. 본 연구자는 교실상황에서 교사가 주로 행하는 행위, 즉 영어의 ‘teaching’을 ‘교수’로 표기하겠다.

전혀 소홀히 여겨졌던 내적요인으로 Shulman(1986)은 교사의 내용학적 지식(content knowledge)을 지목하였다. 그는 중등학교 영어, 생물, 수학, 사회 교과목의 초임 교사들을 대상으로 교수자료에 대한 질문, 수업 관찰, 인터뷰 등과 같은 질적 연구방법을 이용하여 그들의 내용학적 지식에 대해 조사하였다. 이 연구에서 Shulman은 학교 교사들은 내용학적 지식과 교육학적(pedagogical) 지식이 함께 어울려 만들어지는 새로운 지식 형태, 즉 '교육학적 내용지식(pedagogical content knowledge:PCK)'을 가지고 있음을 주장하였다. PCK는 내용학적 지식(content knowledge)의 다른 형태로, 교사가 어떤 특정 교과내용을 가르칠 때 자신의 학생들에게 가장 적절한 형태로 표현(presenting)하고 구성(forming)하여 제시하는 능력을 일컫는다.

Shulman이 명명한 교사지식인 PCK는 교사가 가지고 있는 거의 모든 지식들이 유기적으로 녹아있는 결합체로써 그만큼 복잡하고 구체적인 형성 과정을 설명하란 극히 어렵다. 이 새로운 지식은 단기간의 학습에 의해서 습득되기 보다는 교수 활동의 오랜 경험과 시행착오를 거쳐서 획득되는 지식으로 보는 것이 바람직하며, 교사의 충분한 교과 내용학적 지식이 바탕이 되지 않고서는 획득될 수 없는 지식이다(Ma, 1999).

Shulman의 PCK 소개는 1980년대 후반부터 1990년대 전반에 걸쳐 일반교육학 영역뿐만 아니라 세부 교과교육 영역에서도 교사의 내용학적 지식과 관련된 두 가지 연구 동향을 가속화시켰다. 첫 연구 동향은 PCK와 같이 교사들만의 고유한 교과내용학적 지식이 존재한다는 주장과 이를 증명하기 위한 연구였으며, 두 번째 유형의 연구 동향은 PCK와 내용학적 지식과의 밀접한 연관성 인식으로부터 교사의 내용학적 지식의 중요성과 그 구체적 모습을 제시하기 위한 연구가 진행되었다.

수학교육에서도 수학 교사들의 내용학적 지식이 일반 수학자들이 가지고 있는 내용학적 지식과 구별됨을 주장하는 근거자료로서 PCK가 자주 연구문헌에서 인용되었다. 하지만 수학교육에서는 PCK 자체에 대한 심도 깊은 연구는 거의 이루어지지 않았으며, 오히려 여러 수학교육자들은(Ball, 1990a, 1990b; Ball & Bass, 2000; Ma, 1999) 교사의 수학적 지식이 효과적인 교수활동을 위한 핵심적 지식 기반임을 증명하기 위해 수학교사 및 현장 수학교사들의 수학적 지식을 측정하여 효율적인 교수활동과의 관계를 조사, 보고하는데 더 많은 관심을 기울였다. 예를 들어 미국 수학교사들의 수학적 지식 부족을 보고한 Ball(1988)과 Ma(1999)의 연구는 미국학생들의 낮은 수학적취도의 주된 원인이 미국 수학교사들의 불충분한 수학적 지식에 근거한다는 교육 행정가들의 주장을 뒷받침하는데 널리 사용되었으며, 외국의 여러 수학교육학자들이 교사의 수학적 지식수준과 교수활동과의 관계를 탐구하도록 한 큰 자극제가 되기도 했다.

지금까지 교사 다면평가제도라는 교육계 이슈를 계기로 교수 효과성(teaching effectiveness)이 교사 평가의 주요 대상이 되며, 교수(teaching)와 관련된 일반 및 수학교육 관련 연구동향을 살펴봄으로써 교수의 효과성을 결정짓는 핵심적 요인이 교사의 수학적 지식이라는 것에 대해 학자들이 동의해 왔음을 알 수 있었다. 이에 본 연구의 목적은 교사가 지녀야 할 수학적 지식이란 과연 무엇인지에 대한 이해를 돕고자, 우선 교사의 핵심 지식 기반 영역들을 설명한 일반학자 및 수학교육학자들의 이론들을 통해 수학적 지식에 대한 명확한 정의를 알아보는 것이다. 또한 수학적 지식의 본질인 수학적 구조에 대한 여러 학자들의 견해를 요약·정리하여 보고하는 가운데 그 이론들의 한계점을 분석, 보고하고자 한다.

본 연구는 앞으로 수학적 지식의 본질을 더욱 구체화하거나 교사의 수학적 지식 정도를 측정할 수 있는 도구를 개발하고자 하는 연구자들에게 수학적 지식에 대한 이론적 통찰을

제공해 줄 수 있을 것이며, 현장 수학 교사들에게는 자신들이 갖추어야 할 지식영역들에 대한 이해를 바탕으로 수학적 지식의 본질에 대한 토론을 이끌어 낼 수 있을 것으로 기대된다.

II. 본 론

1. 교사 지식기반 영역

학자들은 교과를 가르치기 위해 필수적으로 교사들이 갖추어야 할 지식들을 서로 다른 형태로 정의해 왔다. 일반 교육학자인 Shulman(1986)은 PCK를 처음 소개한 그의 논문에서 교과를 가르치기 위해 교사에게 필요한 내용학적 지식(content knowledge)으로서 교과내용지식(subject matter content knowledge), 교육학적내용지식 (pedagogical content knowledge), 교육과정지식(curriculum knowledge)을 소개하였다.

교과내용지식이란 교과내의 사실이나 개념에 대한 지식을 넘어서서 그 교과의 구조를 이해하는 것이다. Shulman은 교과의 구조를 설명하는데 있어서 학문의 실질적 구조와(substantive structure)⁴⁾와 통사적 구조(syntactic structure)를 구분한 Schwab(1978)의 개념적 모델을 사용하였다. 실질적 구조는 교과와 관련된 기본 개념 및 원리들이 서로 편제되고 합체되어 그 교과내의 사실들을 이루고 있는 것을 나타내며, 통사론적 구조는 그 교과내에서 사실로 받아들여지고 있는 어떤 대상에 대하여 어떻게 그 대상이 참인지 설명할 수 있는, 왜 그 사실을 알 필요가 있는지, 그 사실이 교과 내 다른 사실들과 어떻게 연관되어 있는지를 학문으로든 응용분야로든 설명할 수 있는 능력들을 말한다.

내용교수지식(PCK)은 교사가 교과내용을 가르칠 때 자신의 학생들이 그 내용을 가장 잘 이해할 수 있도록 적절한 형태로 표현(presenting)하고 구성(forming)할 수 있는 지식, 즉 구어 형태의 가장 강력한 유추(analogies), 묘사(illustration), 예(examples), 설명(explanations)을 제시할 수 있고 실현(demonstrations)할 수 있는 지식이다. 교육학적내용지식은Shulman(1986)이 구체적으로 명명하기 이전에 이미 여러 교육학자들에 의해 언급되어 왔던 교사지식 영역으로서 Bromme(1994)는 “subject-matter -specific pedagogical knowledge”라고 지칭했으며 Bruner(1960/1977)는 교과구조중심 교육을 강조하는 가운데 아래와 같이 PCK에 해당하는 지식 영역이 교사에게 필수적임을 간접적으로 이미 설명하고 있다.

어떤 특정한 연령의 아동에게 어떤 교과목을 가르친다는 문제는 그 아동이 사물을 바라보는 방법으로 그 교과목의 구조를 표현하는 문제이다. 말하자면 교과의 구조를 아동의 지각방식에 맞도록 번역(translation)하는 문제라고 할 수 있다. 방금 기술한 일반적 가설(어떤 교과든지 지적으로 올바른 형식으로 표현하면 어떤 발달단계에 있는 아동에게도 효과적으로 가르칠 수 있다)은 하나의 신중한 판단을 전제로 하는 것이다. 그 판단이란 곧 어

4) 본 연구자는 수학교육학에서 의미하는 ‘substantive structure’ 와 ‘syntactical structure’에 부합되는 우리말 용어를 찾기 위해 고민한 결과, ‘실질적 구조’와 ‘통사적 구조’라고 번역하였다. 하지만 더 적절한 용어가 있을 것이라고 기대하며, 독자들에게는 뒤에 따라 나오는 설명을 통해 앞의 두 용어에 대한 이해를 가지기 바란다.

면(교과목) 아이디어 일지라도 학령기 아동의 사고의 형태로 정직하고 유용하게 표현될 수 있다는 사실과, 아동들은 차차 학습해 나감에 따라 자신이 최초의 학습에서 익힌 표현 방식을 더욱더 강력하고 정확하게 만들어 갈 수 있다는 것을 전제로 한다. (Bruner, 1977, p. 33)

Bruner의 교수-학습관을 가장 잘 대변해 주는 문장인 “모든 교과 내용은 아동의 발달단계에 상관없이 지적으로 “정직한 형태(in some intellectually honest form)로 주어진다면 효과적으로 가르칠 수 있다”(p. 33)에서 ‘지적으로 정직한 형태’라는 것은 앞의 인용문에서 설명한 것처럼 ‘그 아동의 사고에 적합한’ 형태로 교과 내용을 전달함을 뜻한다. 따라서 PCK는 어떤 교과 영역의 일반 전문가들이 가진 내용학적 지식과 학교 교사들이 가지고 있는 내용학적 지식에 차이가 있음을 보여주는 근거로써 수학교육학자들에 의해 널리 언급되었다.

마지막으로 교육과정지식은 “어떤 특별한 상황에서 사용되는 교육과정이나 프로그램 자료에 지적을 가하거나 금지 사항이 무엇인지를 인식하고 있는 것이다. 예를 들어 학생들에게 적절한 방법으로 교과를 구성하고 표현하여 전달하기 위해서는 그 학생들이 이미 학습한 내용과 앞으로 학습할 내용이 무엇인지 꽤 뚫어 볼 수 있는 능력이 필요하다. 그러한 교육과정에 대한 통찰이 있는 교사가 수업시간에 적절한 교수자료나 예들을 선택하고 제시할 수 있기 때문이다.

Shulman(2004b)은 앞의 세 교과내용 영역 지식을 포함하여 ‘교수를 위한 지식 기반(the knowledge base for teaching)’이라는 용어로 7가지 교사의 지식 영역을 다시 소개하였다: (1) 내용지식(content knowledge or subject matter knowledge), (2) 교육학적 내용지식(pedagogical content knowledge), (3) 교육과정 지식(curriculum knowledge), (4)일반 교육학적 지식, (5) 학습자와 학습자들의 특징에 대한 지식(knowledge of learners and their characteristics), (6) 교육적 배경에 대한 지식(knowledge of educational contexts), (7) 교육목적, 교육목표, 교육의 가치들과 이와 관련된 철학적, 역사적 배경(knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical ground)을 제시하였다. 이들 일곱 가지 지식 영역들은 엄격하게 분리되어 설명될 수 있는 것이 아니라, 서로 교차하는 부분들이 있지만 가장 먼저 나온 세 지식 영역들은 교사의 수학적 이해도와 가장 밀접한 연관성을 가지는 지식들이다.

한편 수학교육에서 Leinhardt와 Smith(1985)는 초등학교 교사 4명이 분수를 학생들에게 가르치는지 교수활동을 분석함으로써 전문적인 교수를 위한 필수 교사지식 영역 두 가지를 제시하였다. 첫 번째 지식은 ‘교과지식(subject matter knowledge)’으로 이것은 수학적 개념, 계산공식, 계산 절차간의 관계, 수 체계, 학생의 오류에 대한 이해, 교육과정 제시 등과 같은 지식요소를 포함한다. 두 번째 지식 영역인 ‘수업구조지식(lesson structure knowledge)’은 수업을 설계하고 그 수업을 순조롭게 잘 진행할 수 있는 능력, 어느 한 수학적 주제에서 다른 주제로 쉽게 연결시킬 수 있는 능력, 그리고 명확하게 교수자료 내용을 잘 설명할 수 있는 능력들을 포함한다. Leinhardt와 Smith는 이 개념적 구조를 바탕으로 수학 교사들의 수업 내용을 관찰, 분석하거나 교수 활동 과정에서 발견되는 교사들의 지식 흐름을 플로 차트(flow charts)와 같은 기법을 이용하여 가시적으로 표현하기도 했다.

미국의 국가연구심의회(National Research Council : NRC, 2001)는 학교 수학을 가르치기 위한 교사의 핵심 지식 영역을 (1) 수학적 지식(knowledge of mathematics), (2) 학생에 관한⁵⁾ 지식(knowledge of students), (3) 교수활동에 관한 지식(knowledge of instructional

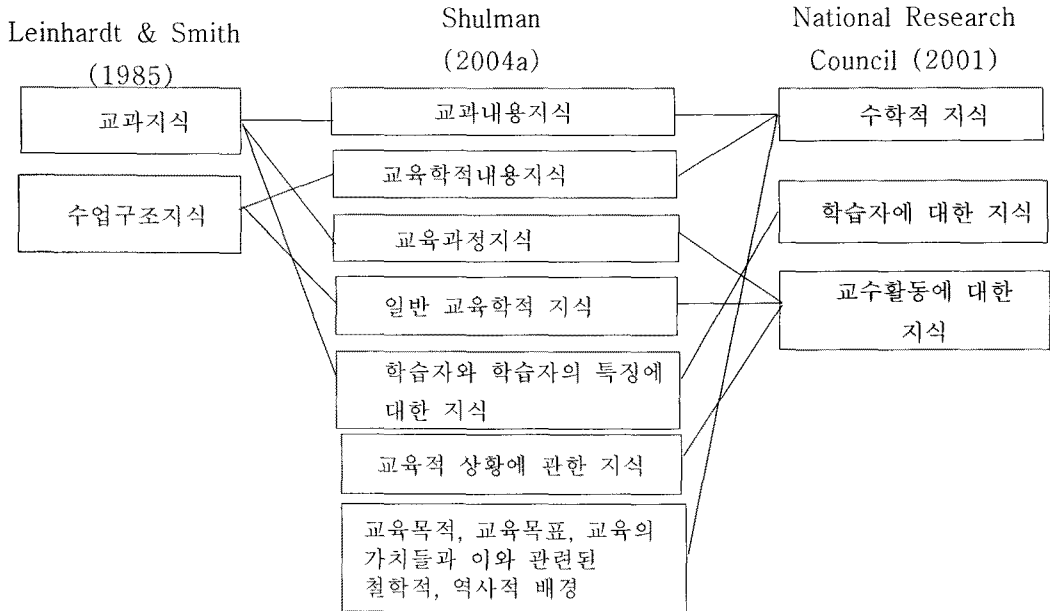
practice)으로 정의하였다. 수학에 관한 지식은 수학적 개념과 개념들 간의 관계를 아는 것을 넘어서, 수학적 지식을 가진 교사는 그들 자신이 이해한 수학을 설명하고 표현할 수 있다. 이 지식은 교사가 학생들의 수학적 노력에 대한 해석을 정확하게 할 수 있도록 인도하는 어떤 민감성(sensibilities)을 제공한다. 두 번째 지식 영역인 학생에 관한 지식은 교사가 가르치고 있는 학생에 대한 지식과 일반적인 차원에서 알고 있는 학습자와 학습에 관한 지식을 포함한다. 교사는 자신의 학생에 대한 개인적 배경과 교육적 배경에 대해 알고 있을 필요가 있으며, 특히 그 학생들의 수학적 능력, 기술, 태도 등을 알고 있어야 한다. 이러한 지식은 교사로 하여금 어떤 특정한 수학적 개념과 절차(procedure) 학습에 있어서 학생들이 보이는 공통적인 어려움과 오개념을 잘 이해할 수 있게 한다. 세 번째, 교수활동에 관한 지식은 교육과정에 관한 지식, 효과적인 수업을 평가할 수 있는 지식, 어떤 과제(tasks)와 교육적 도구(tools)들이 효과적이며 중요한 수학적 개념들을 가르치는데 있어서 그것들을 어떻게 이용해야 하는지 아는 지식, 교실 담화(classroom discourse)를 설계하고 운영하는 지식, 그리고 교실 규범(classroom norms)등에 관한 지식을 포함한다. 이 교수활동에 관한 지식은 교실에서의 경험과 교사 자신과 다른 교사들의 교수활동을 반성하고 분석함으로써 획득되는 지식 영역이다.

이상과 같이 교과를 가르치기 위한 핵심 교사지식 영역들에 대한 세 가지 개념적 모델을 소개했다. 여기서 중요한 사실은 각 모델들을 구성하는 주요 구성 성분, 즉 지식 영역들의 종류는 다르지만, 각 지식 영역들에 대한 설명을 살펴보면 아래 [그림 I-1]과 같이 세 모델들의 연관성을 알 수 있다.

2. 수학적 지식 구조

지금까지 수학 교사에게 필요한 핵심 지식기반 영역 중에서 수학적 지식이 가장 필수적이라는 사실과 함께, 수학적 지식에 대한 여러 정의들을 확인해 왔다. 그렇다면 수학적 지식에 대한 정의를 확보하는 것만으로 효과적인 교수를 위한 교사의 수학적 지식이 어떤 것인지 설명할 수 있을까? 수학교육계에서 통용되는 신념 중 하나가 우수한 수학교사는 풍부한 수학적 지식을 가지고 있다는 것이다. 하지만 정작 우수한 수학교사가 그렇지 못한 교사와 수학적 지식 측면에서 어떤 차이가 있는지 보고한 연구는 1990년대 이전까지는 거의 이루어지지 않았다. 그전까지는 수학교사들의 수학적 지식 정도를 주로 이수한 전공과목 수, 교사경력, 전공 연수 횟수 등과 같은 간접적 요인들을 정량적 방법으로 측정함으로써 추측해 왔을 뿐, 교사가 실제로 가지고 있는 수학적 지식 정도를 측정하기란 거의 불가능 하였다. 이런 측정의 어려움은 외부사람에게 자신의 수업을 공개하는 것을 꺼려하는 교실문화와 교사들의 태도가 원인이 될 수 있겠지만, 더 근본적인 이유는 교사의 수학적 지식 정도를 측정할 수 있는 도구자체가 거의 개발되지 않았기 때문이었다.

5) 수학적 구조에 관한 이론에서 Ball(1988)이 'knowledge of mathematics'와 'knowledge about mathematics'를 구분하여 사용함으로써 우리말 번역도 '~의(of)'와 '~관한 혹은 ~대한(about)'을 구분하는 것이 좋을 듯하다. 하지만 미국 NCR은 이러한 구분 없이 사용하였기 때문에 본 연구자는 NCR의 'of'를 Ball의 두 의미 모두를 포함하는 뜻에서 문맥상 자연스럽도록 '관한'으로 번역하였다.



[그림 I-1] 교과를 가르치기 위한 핵심 지식기반 영역

교사의 수학적 지식 정도를 측정하는 도구를 개발하기 위해서는 가장 먼저 수학적 지식 자체에 대한 충분한 이해가 형성되어야 한다. 수학적 지식 본질에 대한 질문은 ‘수학이란 무엇인가?’라는 질문으로 이어지며, 이런 수학 자체에 대한 본질적 질문들은 수리철학적인 측면에서 다루어져 왔다. 하지만 수학을 가르치는 교사나 수학을 배우는 학습자에게 더 구체적인 정보가 될 수 있는 ‘수학은 어떤 것으로 이루어져 있으며, 수학을 이해한다는 것은 무엇을 뜻하는가?’에 대한 논의는 수학교육학자들의 이론보다 일반교육학자들의 이론에 기초해서 탐구되어져왔다. 수학교육학자들의 수학적 지식 본질에 대한 탐구에 영향력을 미친 대표적인 일반교육학자로는 교과의 지식 구조를 이론화한 Bruner(1960/1977)와 Schwab(1978)을 들 수 있다.

1) 교과 구조에 대한 Bruner(1960/1977)의 견해

Bruner는 교과를 학습하는 것이 미래에 두 가지 전이(transfer)를 가능하게 하는데, 그 첫 번째 전이는 어떤 특정한 과제(tasks)를 수행하기 위한 기술(skills)을 전이하여 다음에도 그와 아주 유사한 과제에 대하여 적용 가능한 것이다. 두 번째 전이는 어떤 구체적이고 특수한 기술을 전달하는 것이 아니라, 학습에서 경험한 원리(principles)와 태도(attitudes)를 전달하여 다음에도 그와 상관이 있는 과제에 대하여 더 효과적으로 적용할 수 있도록 하는 것이다.

교과에서 원리는 ‘근본적인’, ‘기본적인’, ‘일반적인’ 아이디어(개념)들을 지칭하는 것으로서, 더 근본적인 아이디어는 새로운 문제에 대해서 더 폭넓은 응용력을 가진다. Bruner는 이런 전이가 가능한 교육과정으로 ‘나선형 교육과정(spiral curriculum)’ - “교육의 과정은 기본적인(basic)이고 일반적(general)인 아이디어들의 연속적인 확장과 심화의 과정이다”(p.18)- 을 제시하기도 했다. 교과에서 원리가 무엇인지 구체적으로 설명하기 위해 Bruner는 수학을 언

급했으며, 대수영역의 세 가지 기본 성질인 교환법칙, 분배법칙, 결합법칙을 그 예로 들었다. 태도는 학습과 연구(inquiry)에 관한 태도, 문제해결의 가능성을 위해 추측하고 예감하는 태도를 일컫는다. 학생들이 이런 태도를 습득하도록 하는 것은 교과외의 기본적인 아이디어들을 단순히 제시하는 것으로서는 불가능하며, 그 기본 아이디어들을 학생들 스스로 발견하게 하는 '발견(discover)' 활동을 통해 가능해진다.

Bruner는 교과외의 구조가 앞의 원리와 태도로써 구성된다고 보았다. 그는 교과외를 이해한다는 것은 그 교과외의 구조를 이해하는 것이며, 구조를 이해한다는 것은 그 교과 내 개념(concepts)들과 원리(principles)들이 어떻게 서로 연관되어 있는지 이해하는 것으로 설명한다. 여기에 덧붙여, 교과외의 구조는 개념과 원리 외에 그 교과외를 학습하고 탐구하는데 필요한 어떤 일반적인 태도(attitudes)와 접근법(approaches)들이 있어서, 저학년에서 배운 이런 태도와 접근법들은 고학년의 학습에도 유의미하게 영향을 미친다고 주장함으로써 교과외와 관련된 태도도 그 교과외의 구조를 이루는 핵심 요소임을 주장한다.

2) 학문적 구조에 대한 Schwab(1978)의 견해

Schwab은 학문(disciplinary)의 구조를 “어떤 특정한 문제와 상황에 따라서 계속적으로 채택(adapted)되고 수정(modified)되는 유연한 패턴”(p 239)으로 개념화 하였다. 이런 학문 구조의 다양성은 학문 구조를 탐구하는데 있어서 안정성을 확보하기 어렵기 때문에 Schwab은 학문 구조를 탐구하기 위한 두 가지 접근 방법을 제시함으로써 안정성을 확보하려고 하였다. 그 첫 번째는 교과외의 구조를 ‘실질적으로(substantively)’ 접근 하는 것으로, 그 교과외를 정의하고(defining), 한계지우며(bounding), 분석(analyzing)하기 위해 사용되는 개념적 장치(conceptual devices)들을 나타낸다. 두 번째 방법은 ‘통사적으로(syntactically)’ 접근하는 것으로, 그 교과외가 나타내는 논리적 구조를 살피는 것이다. 예를 들어, 수학에서 어떤 수학적 사실이 있을 때 그것을 정당화하고 증명하는 여러 다른 방법들이 있는데, 바로 그런 정당화와 증명을 위한 방법들 중심으로 수학의 구조를 살피는 것이다.

비록 Schwab이 학문의 구조가 다양하게 존재하는 것으로 개념화 하기는 하였으나, 그런 다양한 학문의 구조를 앞의 두 가지 접근 방법으로 탐구할 수 있다고 봄으로써, 실질적으로는 모든 교과외가 크게 실질적 구조(substantive structure)와 통사적 구조(syntactical structure)를 가진다고 볼 수 있다. 이 견해에 기초해서 교과 지식 구조를 연구한 학자로는 Shulman (1986)과 Ball(1988, 1989)이다.

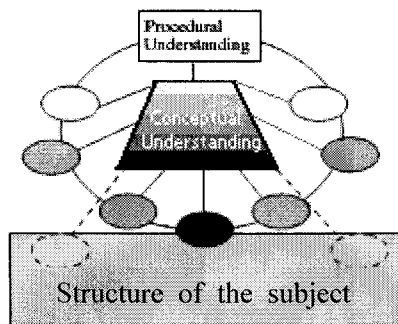
Shulman은 앞의 교사지식 영역에서도 설명한 바와 같이, 교과외의 지식을 획득하는 것은 그 교과외의 구조를 파악하는 것이며, 교과외의 구조는 Schwab이 설명한 실질적 구조와 통사적 구조로 이루어져 있다고 보았다. Ball(1988b, 1989)은 교사의 수학에 대한 이해를 수학적 지식(knowledge of mathematics)과 수학에 관한 지식(knowledge about mathematics)들 간의 상호활동에 의한 것으로 개념화 하였다. 수학적 지식은 특정한 수학적 주제와 절차 그리고 개념들을 터득하는 것과 동시에, 그것들 간의 상호관계를 이해하는 것으로 설명한다. 수학에 관한 지식은 통사적 지식으로서 수학의 본질(nature)과 담화(discourse)에 관한 지식 획득을 말한다.

3) 수학적 구조에 대한 Ma(1996/1999)의 견해

Schwab의 학문적(disciplinary) 구조에 대한 관심은 Bruner의 교과(a subject)에 대한 관

심과 조금 다른 차이점을 보인다(Ma, 1996). Schwab은 학문적 구조의 속성에 깊은 관심을 가진 반면에, Bruner는 교수·학습과 관련해서 교과 구조를 이해한다는 것이 무슨 의미인지를 설명하는데 더 많은 관심이 있었다. Schwab은 어떤 한 학문이 한 개의 구조만을 가지는 것이 아니라 수많은 구조를 가질 수 있다고 보았다. 반면에, Bruner는 교과 구조의 유일성에 대해서 직접적으로 언급하지는 않았지만 그의 저서, 「교육의 과정(The Process of Education)」을 전체적으로 살펴볼 때, 그는 교과 구조를 어느 정도 안정적이고 일정한 것으로 보았음을 알 수 있다.

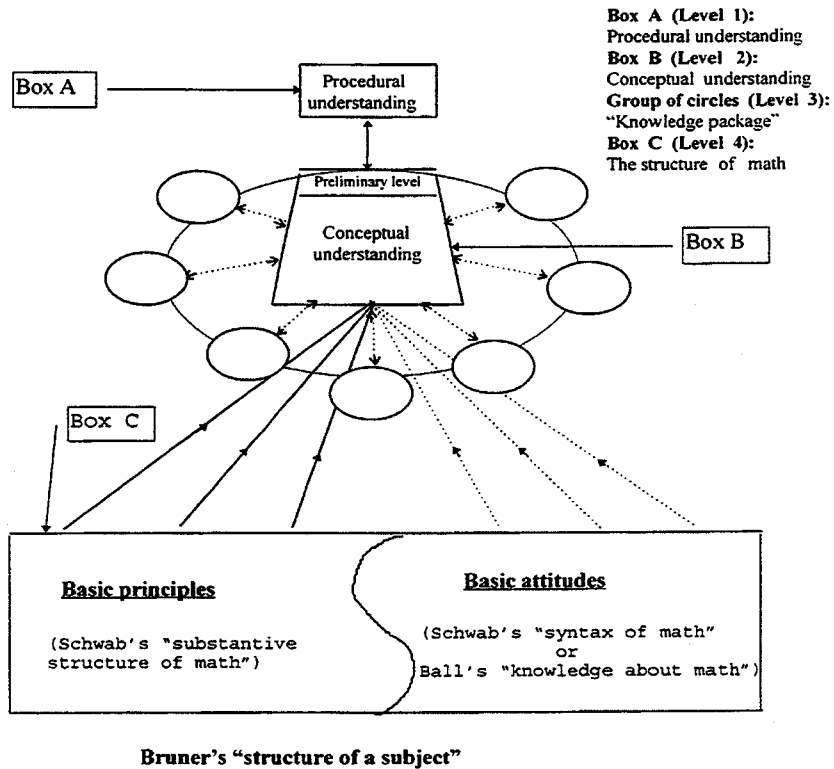
1999년도에 출판된 Liping Ma의 책, 「Knowing and Teaching Elementary Mathematics」에는 수학적 주제(topic)에 대한 교사들의 개념적 이해도를 나타내는 모델[그림 II-1]을 소개하고 있다.



[그림 II-1] Conceptual understanding of a topic (Ma, 1999, p. 25)

Ma(1999)는 [그림 II-1]의 바닥에 놓여 있는 상자로 표현된 '교과 구조(structure of the subject)'를 Bruner의 견해인, 교과의 가장 기본적인 아이디어, 즉 원리와 태도로 구성되어 있다고 설명하였다. 이것은 모델 [그림 II-1]의 원래 버전인 [그림 II-2]로부터 더 구체적으로 알 수 있는데, 아래 모델[그림 II-2]은 「Knowing and Teaching Elementary Mathematics」의 원문인 Ma(1996)의 박사학위 논문에서 발췌한 것이다.

Ma는 Bruner와 같이 교과의 구조를 단일하고 안정적인 것으로 보는 것이 교과를 이해하는데 더 효율적(efficient)이라고 생각하였으며, Schwab이 생각하는 '학문적 구조의 유일성과 다양성을 강조하는 것은 교과를 학습하는 학습자와 초보자들에게는 혼동을 초래할 수 있다'라고 보았다 (Ma, 1996, p.29). 그런 이유로 Ma는 자신이 생각하는 교과 구조를 Bruner의 모델과 같이 안정적이면서 '기본적 원리(basic principles)'와 '기본적 태도(basic attitudes)'로 구성되었다고 본 것이다. Ma는 이 두 핵심 하위 구조가 Schwab의 '실질적 구조'와 '통사적 구조'에 각각 대응 된다고 보았다.



[그림 II-2] The framework of teachers' understanding of a school mathematics topic (Ma, 1996, p. 33).

III. 요약 및 토론

위에서 살펴본 수학적 지식에 대한 정의와 구조에 대한 설명을 통해 우리는 수학적 구조가 Ball(1988)이 정리한 것과 같이 크게 수학적 지식 (knowledge of mathematics)과 수학에 관한 지식(knowledge about mathematics)으로 구성된다고 볼 수 있다. 수학적 지식은 특정한 수학적 주제와 절차 그리고 개념들을 터득하는 것과 동시에, 그것들 간의 상호관계를 이해하는 것이며, 수학에 관한 지식은 수학의 본질(nature)과 담화(discourse)에 관한 지식을 말한다. 이 두 종류의 지식 영역은 Schwab(1978)과 Shulman(1986)이 언급한 수학적 구조의 본질적 구조(substantive structure)와 통사적 구조(syntactical structure)를 이루는 요소로 볼 수 있다.

수학적 구조가 수학의 기본 원리들과 기본 태도들로 이루어져 있다는 Bruner(1960/1977)의 모델에 기초해서 미국의 초등 교사들의 수학적 지식 수준을 나타내는 모델을 개발한 Ma(1996/1999)는 Bruner의 기본원리와 기본태도가 Schwab(1978)의 본질적 구조와 통사적 구조, 그리고 Ball의 '수학적 지식'과 '수학에 관한 지식'에 각각 대응되는 것으로 개념화 하

였다.

하지만 앞에서 언급한 모든 학자들이 수학적 구조를 이루는 차원들을 개념화 할 수 있는 이론적 틀은 제공하였으나, 그 차원들을 이루는 요소들이 실질적으로 수학에서 어떤 것들을 지칭하는지 그 구체적인 예를 제시한 사람은 Bruner(1977)와 Ma(1996)로 좁혀진다. Bruner는 수학적 구조의 핵심적 요소인 기본원리는 거의 정의(definition)에 가까운 것이며, 대수의 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 그 예가 될 수 있음을 언급하였다 (p.18). 그러나 Bruner도 '원리(principle)'를 '개념(concept)' 혹은 '아이디어(idea)'라는 표현과 함께 혼용하여 사용함으로써, 그 정확한 의미를 파악하는데 혼선을 준다. 이런 불분명한 기술은 Bruner의 관심이 수학의 지식 구조를 설명하는데 있었던 것이 아니라, 교과 구조에 대한 일반적인 개념적 틀을 제공하고, 교수·학습 상황에서의 교과 구조 학습을 강조하는데 있었기 때문이다. Bruner는 기본원리 혹은 기본개념에 대한 더 깊은 연구를 각 교과 전문가들의 몫으로 넘겼다.

Ma(1996)는 Bruner보다는 좀 더 직접적이고 구체적으로 수학의 기본원리와 기본태도를 설명하였다. 그녀는 Bruner가 언급한 대수의 세 가지 기본 성질과 함께 '수 체계 구성 (composition of the number system)', '기본연산들 간의 관계(relation among basic operations)', '주장의 조건(conditionality of claim)' 등과 같은 다른 예들도 덧붙였다 (p.231), 수학적 태도에 대한 구체적 설명으로는 아래와 같은 교사의 태도를 제시하였다(p.233).

- 수학적 논증 형태의 주장을 정당화 하기
(to justify a claim with a mathematical argument)
- 방법과 이유를 아는것(to know how as well as to know why)
- 다른 주제와의 관계 파악하기
(to reveal the connections of a topic with other topic)
- 다양한 문맥에서도 어떤 아이디어의 일관성을 유지하기
(to keep consistency of an idea in various contexts)
- 용의한 설명을 위해 수학적 용어 사용하기
(to use mathematical terminology to make a conventional explanation)
- 수학적 접근을 수행하는 것에 대한 관심과 확신
(Interest and confidence in conducting mathematics approach)

이상과 같이 수학적 구조에 대한 이론적 모델들을 비교·분석함으로써 우리는 수학적 구조에 대한 전체적인 윤곽은 잡을 수 있었다. 하지만 여전히 만족스럽지 못한 것은 수학적 구조를 이루는 하위 차원들(예: 실질적 구조, 통사적 구조)에 대한 구분과 설명은 주어졌으나, 그 하위 구조를 채우는 세부 지식 요소들에 대한 자세한 설명과 예들이 극히 부족하다는 것이다. 이러한 한계점은 앞의[그림 II-2]와 같이 교사의 수학적 이해 수준을 나타내는 개념적 모델도 구체적이지 못하게 하여 그러한 모델들이 실제로 학교 현장 교사들의 수학적 이해 수준을 측정하는 도구로 사용되는데 어려움을 초래하고 있다.

교사의 수학적 이해 수준 혹은 지식수준을 어느 정도 구체적으로 측정할 수 있는 개념적 모델을 개발하기 위해서는 학교수학과 관련된 순수수학의 전 영역에 대한 세밀한 내용학적 그리고 교수학적 분석이 전제되어야만 하며, 일반 교육학자들의 눈이 아닌 순수 수학자들과

수학교육학자들의 협력에 의해서 수학적 구조가 다시 심도 있게 연구되어야만 한다. 예를 들어 김남희 외 3명 (2007)이 저술한 「수학교육과정과 교재연구」와 같은 책은 학교수학과 관련된 순수 수학의 큰 영역들에 대한 수학적 조명과 함께 그 내용 영역들과 관련된 내용학적 분석 및 교수-학습론적 분석이 함께 어울려져 있다. 바로 이런 유형의 노력을 반복함으로써 학문으로서의 수학 구조(the structure of mathematics)가 아닌, 좀 더 구체적이고 실제적인 의미에서 ‘학교수학의 구조(the structure of school mathematics)’를 설명할 수 있을 것이라 믿는다.

교사들의 수학적 이해 정도를 측정하는데 필요한 학교수학의 구조 모델은 수학자와 수학교육학자들에 의한 학문적, 이론적 조사(inquiry)와 함께 현장 수학 교사들의 교수활동을 통해 표출되는 수학적 지식 형태와 태도를 관찰, 분석함으로써 더 구체화될 수 있을 것이다. 이렇게 이론과 실재를 접목한 학교수학의 구조 모델은 높은 신뢰성과 타당성을 확보할 수 있어, 앞으로 교사 다면평가제도와 같은 교사 평가에서 수학 교사의 수학적 지식 정도를 평가하는데 유용한 도구로 사용 될 수 있을 것이다.

참고문헌

- 김남희 외 3명 (2007). 수학교육과정과 교재연구. 경문사.
- 이병환, 김순남 (2004). 교사 다면평가제 적용 방안 탐색. *The Journal of Educational Administration*. 22(2), 163-186
- 임정원 (2002). 중등학교에서의 학생에 의한 교사평가 가능성 연구. 부경대학교 석사학위논문.
- Ball, D. L. (1988). Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education. Unpublished doctoral dissertation. Michigan State University, East Lansing.
- Ball, D. L. (1990a). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Ball, D. L. (1990b). The mathematical understanding that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90(4), 450-466.
- Ball, D. L. & Bass, H.(2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: knowing and using mathematics. In Jo Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 83-104). Westport, Conn.: Ablex Publishing.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strasser, & B. Winkelmann (Eds.), *didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Brophy, J. E. & Evertson, C. M.(1976). *Learning from teaching: A developmental perspective*. Boston: Allyn and Bacon.
- Bruner, J. (1960/1977). *The process of education*. Cambridge. MA: Harvard University Press.

- Bruner, J. (1996). *The Culture of Education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Evertson, C. M., Anderson, C. W., Anderson, L. M., & Brophy, J. E. (1980). Relationships between classroom behaviors and student outcomes in junior high mathematics and English classes. *American Educational Research Journal*, 17(1), 43-60.
- Evertson, C. M., Emmer, E. T. & Brophy, J. E. (1980). Predictors of effective teaching in junior high mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11(3), 167-178.
- Good, T. L. & Grouws, D. A. (1979). The Missouri mathematics effectiveness project: An experimental study in fourth-grade classrooms. *Journal for Educational Psychology*, 71(3). 355-362.
- Leinhardt, G. & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: subject matter knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 77(3), 247-271.
- Ma, L. (1996). *Profound understanding of fundamental mathematics: what is it, why is it important, and how is it attained?* Unpublished doctoral dissertation. Stanford University.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- McGilliard, W. A. (1983). Selected factors in the conceptual systems of geometry teachers: Four case studies. (Doctoral dissertation, University of Georgia, Athens, Georgia 1983.) *Dissertation Abstracts International*, 44A:1364.
- National Research Council (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Science and Education. Washington, DC: National Academy Press.
- Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. In I. Westbury & N. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum, and liberal education* (pp. 229-274). The University of Chicago Press, Chicago.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (2004a). Research on teaching: a historical and personal perspective. In S. M. Wilson (Ed.), *The wisdom of practice: Essays on teaching, learning, and learning to teach*/Lee S. Shulman (pp. 364-381). San Francisco: Jossey-Bass.
- Shulman, L. S. (2004b). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. In S. M. Wilson (Ed.), *The wisdom of practice: Essays on teaching, learning, and learning to teach*/Lee S. Shulman (pp. 219-248). San Francisco: Jossey-Bass.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.

김영옥

Teachers' Knowledge Base and The Structure of Mathematical Knowledge for Effective Mathematics Teaching

Kim, Young-Ok⁶⁾

Abstract

The purpose of this study is to address the teachers' knowledge bases for effective mathematics teaching and especially to provide the various definitions and the structures of mathematics knowledge which is the most important one of the knowledge bases. The conceptual understanding about teachers' knowledge bases for effective mathematics teaching and the structure of mathematics knowledge may be used in evaluating effective mathematics teaching and teachers as well as in developing a new conceptual framework for the structure of mathematical knowledge.

Key Words : Effective mathematics teaching, Teachers' knowledge base, Subject matter knowledge of mathematics, Structure of mathematics

6) Kyungnam University (youokim@kyunnam.ac.kr)