대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.4, 573-581. Dec. 2008

교과지식으로서의 유클리드 기하와 벡터기하의 연결성

이 지 현* · 홍 갑 주**

학교기하에서는 논증기하, 해석기하, 벡터기하 등의 다양한 접근을 다루고 있는데, 특히 이러한 유클리드 기하에 대한 다양한 접근 사이의 연결성은 기하학적 방법과 대수적 방법의 연결성으로 볼 수 있다. 본 연구는 교과지식의 측면에서, 논증기하증명에서 벡터와 내적의 대수적 성질의 의미를 분석함으로서 학교 수학에서 기하학적 증명과 벡터와 내적을 이용한 대수적 증명의 연결성에 대하여 고찰하였다.

Ⅰ. 서 론

NCTM(1989)은 '수학적 연결성(Mathematical Connections)'을 수학 교육과정과 평가의 규준 중 하나로 제시하면서, 다양한 수학적 개념들이 어떻게 서로 연관되어 하나의 일관된 전체를 형성하게 되는지에 대한 학생들의 이해와 활용의 중요성을 강조하고 있다. 학교수학의 기하 영역은 논증기하뿐만 아니라 해석기하, 벡터기하 등의 다양한 접근들을 다루고 있다. NCTM(1989)에서는 학생들이 기하를 논증기하, 해석기하, 벡터기하에서 각각 독립적으로 배우더라도 이들 기하 체계를 서로 연결하여 비교, 대조, 번역할 수 있는 기회를 충분히 가져야 한다고 지적하고 있다. 해석기하와 벡터기하는 기하학적 공리로부터의 연역에 의존하는 논증기하와는 달리 실수체계와 대수적 연산이 그 바탕이라는 점에서, 유클리드 기하에 대한 다양한 접근 사이의 연결성은 기하학적 방법과 대수적 방법의 연결성으로 볼 수 있다.

예를 들어 피타고라스 정리에 대한 대표적인 증명은 유클리드 원론 I 권에 있는 길고 복잡한 분해 합동에 의한 증명이라고 할 수 있다. 반면 수직인 두 변을 각각 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 두고 내적의 성질을 이용하면, 다음과 같이 단 몇 줄의 계산으로 간단하게 증명할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2.
\end{aligned}
$$

이러한 사실에서 벡터와 내적으로 기하증명이 위와 같이 간단해질 수 있는 이유는 무엇인지, 또한 벡터와 내적을 이용한 대수적 증명을 기하학적 증명과 대등하게 간주하는 이유는 무엇인지 등의 의문이 생길 수 있다. 이러한 의문은 논증기하를 다루는 중학교 교육과정과 벡터와 내적을 다루는 고등학교 교육과정 사이의 연결성에 관한 것이기도 하다. 고등학교에서

* 서울 중화고(leeji_hyun@hanmail.net)
** 서울대학교 과학영재교육원(gapdol@empal.com), 교신저자.

중학교 기하의 명제를 벡터를 이용하여 대수적으로 다시 증명하면서도 이러한 논의는 거의 다루어지지 않는 까닭에, 학생들은 논증기하증명과 벡터증명 사이의 관계를 발견할 기회를 갖지 못하고 있다. Gagatsis(2001)는 논증기하와 해석기하, 벡터기하를 모두 배운 고등학생들이 기하명제에 대한 증명방법으로 대수적으로 간단한 벡터증명보다 논증기하증명을 선택하는 경향이 있음을 지적하고 있다. 이렇게 학생들이 벡터증명에 대하여 증명의 방법으로서 논증기하증명과 같은 확신을 가지지 못하는 원인 중 하나는 벡터와 내적 계산에 내재된 기하학적 의미에 대한 이해가 부족하다는 점이 될 수 있다.

본 연구에서는 교과지식의 측면에서, 논증기하증명과 관련한 벡터와 내적의 대수적 성질의 의미를 분석하여 벡터증명이 어떠한 의미에서 논증기하증명과 대등한지 살펴보았으며, 이를 통해 기하와 대수사이의 연결성의 지도에 대한 실천적인 논의의 토대 형성에 도움을 주고자 한다.

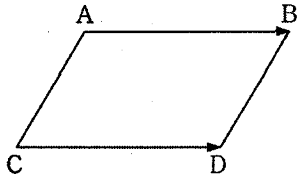
II. 벡터의 기하학적 의미: 아핀기하

대학수학에서는 벡터를 벡터공간의 원소로대수적으로 정의하지만, 학교수학에서는 벡터를 공간 속의 두 점 중 한 점을 시점, 다른 한 점을 종점으로 하는 유향선분이라는 기하학적 대상으로 도입하고, 유향선분의 길이를 벡터의 크기로 정의한 다음, 크기와 방향이 같은 두 벡터는 같다고 정의한다. 더 정확히 말하면, 유향선분이 아닌 유향선분의 동치류가 기하학적 벡터이다. 수학적으로 기하학적 벡터와 합, 실수배의 벡터 연산은 유클리드 원론의 공리 1, 2와 평행공리만을 가지고 있는 아핀기하에서 정의한다(Blumenthal, 1961; Artzy, 1974; Roe 1993)[1].

공리 1. 임의의 두 점을 지나는 직선을 그릴 수 있다.
공리 2. 주어진 직선을 무한히 연장할 수 있다.
평행공리. 임의의 직선 l과 그 위에 있지 않은 점 P가 있을 때, 점 P를 지나 직선 l에 평행한 직선은 유일하게 존재한다.[2]

특히 아핀기하에서는 두 벡터의 상등을 길이 없이 평행성을 이용하여 다음과 같이 정의할 수 있다(Blumenthal, 1961; Artzy, 1974).

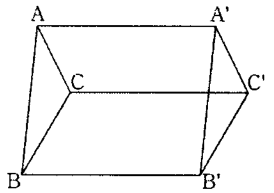
벡터 상등의 정의:
AB $/\!/$ CD이고 AC $/\!/$ BD일 때, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 이다.



[그림 II-1] 벡터의 상등

1) 유클리드 기하에서 거리(metric)와 관련된 공리는 뒤의 III절에서 설명하고 있듯이 공리 3, 4이므로 아핀기하에는 일반적인 거리(길이) 개념이 존재하지 않으며, 벡터공간은 이러한 아핀기하에서 기하학적으로 정의되는 대수적인 구조이다. 특히 아핀기하와 벡터공간이라는 기하와 대수적 구조사이의 연결성은 다음과 같이 수학적으로 진술할 수 있다. 아핀기하 공리계를 만족하는 임의의 모델은 아핀공간이며, 또 역으로 임의의 아핀공간은 아핀기하의 모델이다(Roe, 1993).
2) 이것은 원론의 공리 5와 동치인 플레이페어(Playfair)의 평행공리로서, 유클리드의 공리 5는 아핀기하에서 서술할 수 없지만, 플레이페어의 평행공리는 아핀기하에서도 서술할 수 있다(Artzy, 1974).

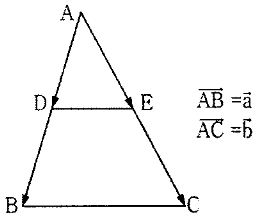
이렇게 정의한 기하학적 벡터의 상등이 수학적인 등호 (=)가 되려면 동치관계를 만족해야 하는데, 그 중 추이율은 정확하게 데자르그 소정리([그림 Ⅱ-2])의 내용이다.[3] 삼각형 법칙 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$으로 정의되는 벡터의 합이 잘 정의된다는 것 역시 데자르그 소정리와 동치이다 (Artzy, 1974)[4].



[그림 Ⅱ-2] (데자르그 소정리) $AA'B'B$와 $BB'C'C$가 평행사변형이면, $AA'C'C$도 평행사변형이다.

또 위치 벡터는 평면상에 임의의 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 임의의 점 O에 대하여, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}$를 만족하는 점 P는 유일하게 존재한다는 사실로부터 정의된다. 그림을 그려보면, 바로 이것은 평행공리의 내용이다. 이러한 사실을 생각하면 벡터의 등호, 합, 위치벡터와 같은 간단한 벡터 연산에 이미 데자르그 소정리, 평행공리라는 기하학적 내용이 함축되어 있음을 알 수 있다.

다음으로 벡터의 스칼라배의 기하학적 정의에 대하여 생각하여 보자. 벡터의 상등의 경우와 같이, 한 직선 혹은 평행한 직선들 위에 있는 두 선분에 대한 길이의 비를 정의하여 벡터의 스칼라배를 정의할 수 있다. 특히 스칼라배의 대수적 성질의 기하학적 의미를 알아보기 위하여, 예를 들어 다음과 같이 삼각형의 중점연결정리를 벡터로 표현하여 보자.



[그림Ⅱ-3] 중점연결정리와 스칼라배의 분배법칙

중점연결정리.
삼각형 두 변의 중점을 연결한 선분 $(\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a})$은, 나머지 변에 평행이고 그 길이는 나머지 변의 길이의 반이다$(\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}))$.
즉 중점연결정리를 벡터로 표현하면,
$\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$이다.

따라서 스칼라배의 분배법칙 $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$은 삼각형과 평행선 사이의 길이 비에 대한 중점연결정리와 같은 기하학적 성질을 포함하고 있으며, 이런 점에서 벡터 연산의 대수적 성질은 동시에 기하학적인 규칙이라고 할 수 있다.

Ⅲ. 내적의 기하학적 의미: 합동

앞 절에서 벡터를 아핀기하에서 기하학적으로 정의할 수 있다는 점을 설명하였다. 이제 원론의 나머지 공리 3, 4에 주목하여 보자.[5]

3) 벡터의 상등에서 추이율은 다음과 같다. $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}$ 일 때, $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$.
4) 벡터의 덧셈이 잘 정의된다는 것은 다음과 같이 서술된다.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}$이고 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'C'}$ 일 때, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$이다.
5) 유클리드 기하에서 평행공리의 역할을 이해하기 위하여, 평행공리와 독립적으로 성립하는 중립기하와 평행공리에 종속되는 유클리드 기하로 나누어 살펴보게 된다(Greenberg, 1990). 앞에서 살펴본 바와 같이 벡터는 합동과 독립적인 공리 1, 2, 평행공리(아핀기하)에서, 내적은 합동에 대한 공리 3, 4에서 정의된다. 따

공리 3. 중심과 반지름이 주어지면 원을 그릴 수 있다.

공리 4. 모든 직각은 같다.

원에 대한 원론의 정의[6]를 고려하면, 공리 3에는 선분의 같음이라는 개념이 전제되어 있음을 알 수 있다. 공리 4의 맥락을 이해하기 위하여 먼저 원론의 직각 정의를 살펴보자. 원론에서는 두 직선이 교차하여 생긴 인접한 두 각이 서로 같을 때, 두 각을 직각이라 정의한다 (Heath, 1956). 즉 유클리드는 90° 라는 각의 크기가 아닌 각의 같음으로 직각을 서술하고 있으므로, 유클리드의 직각 정의는 모든 직각이 같다는 사실을 함의하지 않는다. 공리 4는 바로 임의의 두 직각이 같지 않을 가능성을 배제하는 것이다. 이와 같이 공리 3과 4는 선분과 각에 대한 같음, 현대적인 용어로 합동[7]에 대한 내용이다. 유클리드는 실수 개념에 의존하지 않고 기하학을 전개하려 하였기 때문에, 길이 또는 각의 크기라는 측정 대신 선분과 각의 기하학적인 합동으로 기하를 전개하였다(Moise, 1990). 따라서 원론에서 선분과 각의 합동은 길이와 각의 크기에 대응한다고 할 수 있다.[8] 예를 들어 유클리드는 눈금 없는 자가 아닌 반지름과 합동인 선분을 옮기는 도구인 컴퍼스를 측정의 도구로 생각하였다(Stillwell, 2001).

학교수학에서는 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적을 길이와 각의 크기를 이용하여 다음과 같이 기하학적으로 정의한다[9]. 두 벡터가 이루는 각이 θ일 때, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 $\vec{a}$의 크기와 $\vec{b}$의 $\vec{a}$ 위로의 정사영의 크기를 곱한 $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$이다. 반면 대학수학에서 내적은 두 벡터에 실수를 대응하는, 다음 네 가지의 대수적 성질을 가진 함수이다.

① $a \cdot b = b \cdot a$

② $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

③ $(ka) \cdot b = a \cdot (kb) = k(a \cdot b)$

④ $a \cdot a \geq 0$ (단, $a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = 0$)

기하학적인 내적이 위와 같은 대수적 성질을 만족한다는 것을 학교수학에서는 다음과 같이 설명하고 있다. 두 벡터를 각각 (a_1, b_1), (a_2, b_2)와 같이 성분(좌표)으로 나타낸 다음,

---

라서 평행공리의 경우와 동일한 맥락에서, 벡터와 내적의 두 부분으로 되어있는 전개는 자연스럽게 유클리드 기하에서 합동의 역할을 명확하게 보여준다. 특히 Dieudonnè(1961, 1969)는 벡터기하의 전개가 논증기하에서는 모호한 합동에 의존하지 않는 성질과 합동에 의존하는 거리 성질의 차이를 간단하고 명료하게 드러낼 수 있다는 수학적인 전개 면에서의 장점을 지적하면서, 유클리드 기하를 선형 대수적 접근으로 다루자고 주장하기도 하였다.

6) 유클리드는 선분의 길이가 아닌 선분의 같음을 이용하여 다음과 같이 원을 정의한다.
I 권. 정의 15. 원은 한 점으로부터 도형까지 직선을 그었을 때, 그 도형 안에 놓이는 부분이 서로 같도록 하는 한 선에 의해 둘러싸인 평면도형이다(Heath, 1956).

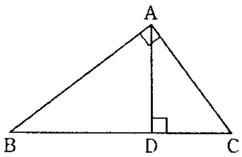
7) 힐베르트(1971)는 유클리드가 공리적으로 이해하였던 선분, 각, 삼각형에 대한 같음을 합동 공리계로 재정립하였다.

8) 기하를 종합적으로 전개한 유클리드와 달리, Birkhoff는 학교기하를 실수를 바탕으로 전개할 수 있다는 생각에서 '자(길이)'와 '각도기(각의 크기)'에 기초한 새로운 평면기하의 공리계를 제시하였다(Birkhoff, 1932). 이후 Birkhoff의 실수체계에 토대한 기하에의 접근과 자와 각도기 공리는 SMSG 기하 프로그램의 기반이 되었다. Euclid-Hilbert와 SMSG의 평면기하 공리계를 비교하여 보면, Euclid-Hilbert 공리계에서 선분, 각, 삼각형에 대한 합동 공리와 아르키메데스 공리, 완비성 공리에 대응하는 SMSG의 공리가 바로 길이와 각의 크기에 대한 측정 공리이다(Crosswhite, 1973).

9) 공리 1, 2와 평행공리로 결정되는 아핀기하가 유클리드 기하가 되기 위해서는 합동에 대한 공리 3, 4가 더 필요하듯이, 아핀공간이 유클리드 공간이 되기 위해서는 내적이라는 대수적 구조가 추가되어야 한다. 각주 3과 같이, 합동 공리계와 내적사이의 연결성을 수학적으로 표현한다면 다음과 같다. 유클리드 기하의 합동 공리계로부터 기하학적인 내적을 정의할 수 있으며, 역으로 내적이 있는 2, 3차원 벡터 공간은 유클리드 기하의 모델이 된다(Roe, 1993).

그 내적의 값은 $a_1a_2+b_1b_2$이 된다는 사실을 이용하여 대수적 성질을 확인한다. 이렇게 내적의 대수적인 성질을 좌표의 계산으로 확인하기 때문에, 내적의 성질에 들어있는 기하학적 내용은 잘 드러나지 않는다. 그러나 이 논문에서는 내적의 기하학적 정의에 주목하여, 기하 증명에서 내적의 대수적 성질의 의미를 살펴보기로 한다.

먼저 서론에서 언급한 피타고라스 정리의 예로 돌아가 보자. 내적의 계산으로 간단하게 증명되는 피타고라스 정리는 다음과 같이 닮음 삼각형의 성질을 이용하여 증명할 수 있는데, 이 증명에서 내적의 성질은 다음과 같이 찾아볼 수 있다.



[그림Ⅲ-1] 닮음을 이용한 피타고라스 정리의 증명

논증기하증명. $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ 이고, 닮은 삼각형에서 대응하는 변의 길이는 비례하므로

$\frac{BA}{CB}=\frac{BD}{BA}$ 이다. 즉 $BA^2=BD\cdot BC$ (①)

마찬가지로 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ 이므로,

$\frac{CA}{BC}=\frac{CD}{CA}$ 이다. 즉 $CA^2=BC\cdot CD$

그러므로 $BA^2+CA^2=BC^2$이다.

내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$에 대한 다음과 같은 기하학적 정의를 생각하자.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$($\vec{a}$의 $\vec{b}$위로의 정사영의 크기)$\cdot$($\vec{b}$의크기)

그림 Ⅲ-1에서 $\overrightarrow{BA}$와 $\overrightarrow{BC}$의 내적을 생각하면,

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=BA^2$ 이고

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BD\cdot BC$ 이므로,

$BA^2=BD\cdot BC \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

즉 내적의 교환 법칙 $a\cdot b=b\cdot a$은 직각삼각형에서 닮음 삼각형의 성질(①)이 된다. 이렇게 내적의 간단한 성질에 닮음 삼각형의 성질이 압축되어 있기 때문에 벡터증명은 논증기하증명보다 간결하게 서술할 수 있음을 알 수 있다.

이번에는 내적의 분배법칙 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$에 주목하여 보자. 이 성질을 이용하여 '평면 α위에 있는 두 직선의 교점 O를 지나며, 두 직선 각각에 수직인 직선은 평면 α에 수직이다'라는, 공간기하의 첫 부분에 등장하는 원론 XI권 명제 4를 쉽게 증명할 수 있다. 여기서 합동인 삼각형들을 따라가야 하는 원론의 기하증명과 내적의 분배법칙이 어떻게 연결될 수 있는지 찾아보자. 특히 평행사변형법칙[10]을 만족하는 노름공간에서 내적 $a\cdot b$는 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 만들어지는 평행사변형의 두 대각선의 길이를 이용하여

$$a\cdot b=\frac{1}{4}(|a+b|^2-|a-b|^2)$$

으로 정의할 수 있는데, 이렇게 정의한 내적이 분배법칙을 만족한다는 사실은 바로 원론 XI권 명제 4에 대한 기하학적 논증을 일반화하여 증명할 수 있다(Falkner,1993; 부록참조).

위와 같이 내적의 교환법칙과 분배법칙의 예에서, 논증기하증명과 내적의 대수적 성질이

10) 평행사변형 법칙이란 평행사변형의 두 대각선의 길이 제곱의 합이 평행사변형의 두 변의 길이 제곱 합의 두 배와 같다는 것이다($|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)$). 일반적으로 모든 노름공간이 내적공간이 되는 것은 아니다. 그러나 평행사변형법칙을 만족하는 노름에서는 항상 위와 같이 내적을 정의할 수 있으며, 또 이 내적으로 정의되는 노름은 다시 원래 노름과 일치함이 증명되어 있다(Jordan & Neumann, 1935).

어떻게 연결되는가에 대하여 분석하였다. 기하 증명에서 벡터와 내적의 대수적 성질의 의미를 생각해본다면, 벡터와 내적의 계산은 기하학적 증명 방법과 별개의 알고리즘이 아니며 대등한 기하학적 내용을 가지고 있음을 알 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

수학자 Goheen은 힐베르트의 《기하학 기초론》 (Hilbert, 1971)의 서문에서 논증 기하가 아닌 다른 방법으로 처음 기하를 접하였을 때 느꼈던 당혹감을 다음과 같이 술회하고 있다.

> 이러한 구조를 만든 이들에 대한 존경을 표하면서, 완전하고(complete) 무모순(consistent)인 기하공리체계의 구성과, 또 실수체계 안에서 이러한 공리체계를 종합하고자 하는 시도가 얼마나 중요한 것인가에 대하여 강조하고 싶다. 아마 우리 중의 많은 사람은 종합기하학을 배운 후 고등학교에서 처음 해석기하학을 접했을 때 경이로움을 느꼈을 것이다. 그러나 나에게는 종합기하학과 해석기하학의 연결성에 대하여 그 후 몇 년 동안이나 계속 혼란스러워했던 기억이 남아 있다. 하지만 힐베르트는 내가 고등학교 시절 가졌던 혼란과 의문보다 한 발 앞서 나가 있었다. 그는 실수와 실수의 연산 하에서 세 실수의 순서쌍이 자신이 개조한 유클리드 기하 공리계를 만족하는 모델이며, 더 나아가 이 모델이 유일하다는 것을 증명하였다. ...<중략>

Goheen의 고백처럼 논증기하를 배웠던 학생들이 좌표나 벡터를 새롭게 접할 때 느낄 수 있는 당혹감의 근본에는 바로 공리적 유클리드 기하의 기하학적 방법과 해석기하 혹은 벡터기하라는 대수적 방법 사이의 수학적 연결성에 대한 의문이 자리 잡고 있다고 할 수 있다.

17세기에 데카르트는 좌표와 좌표축이라는 개념을 기하에 도입하면 기하 문제가 기하학적 방법만이 아닌 산술과 대수적 방법에 의하여 쉽게 해결될 수 있다는 것을 발견하였다. 하지만 데카르트는 실수 좌표와 대수가 왜 기하학의 명제를 증명할 수 있는가는 설명하지 못하였다. 결국 이 문제는 19세기 데데킨트, 바이어슈트라스, 칸토르 등에 의하여 실수가 수학적으로 엄밀하게 정의된 이후에 힐베르트에 이르러서야 비로소 수학적으로 완전하게 해결되었다(Gardiner,1982). 이렇게 수학사에서도 알 수 있는 바와 같이, 유클리드 기하에 대한 기하학적 접근과 해석기하적 접근이 수학적으로 동등하다는 것을 이해하기 위해서는 학교수학의 범위를 훨씬 벗어나는 수학 지식을 필요로 한다.

본 연구에서는 중점연결정리와 스칼라배의 성질, 피타고라스 정리에서 닮은 삼각형의 성질과 내적의 교환법칙과 같은 예에서 기하증명에서 벡터와 내적의 대수적 성질의 의미를 분석하였다. 이와 같이 벡터와 내적의 연산은 실수 좌표를 다루는 해석기하보다 직접적인 기하학적 해석을 가지고 있으므로, 벡터와 내적의 대수적 성질을 중학교 기하증명의 맥락과 연결하여 제시함으로서 학교수학의 범위에서 기하학적 방법과 대수적 방법의 연결성을 보여줄 수 있다. 또한 학생들에게 이에 대한 이해는 하나의 기하문제에 대해 논증기하, 해석기하, 벡터기하 등의 접근방법을 자유롭게 사용하도록 하는 계기가 될 수 있을 것이라고 생각된다. 본 연구를 바탕으로 학교수학에서 중학교 논증기하와 고등학교의 '기하와 벡터'의 연결성을 어떻게 구현할 수 있으며, 학생들이 이러한 연결성을 형성하도록 어떻게 지도할 것인가 등에 대한 실천적 경험 연구가 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

Artzy, R. (1974). *Linear Geometry.* Massachusetts: Addison-Wesley.

Birkhoff, G. D. (1932). A Set of Postulates for Plane Geometry Based on Scale and Protractor. *The Annals of Mathematics 33*(2), pp. 329-345.

Blumenthal, L. M. (1961). *A modern view of Geometry.* San Francisco : W. H. Freeman.

Crosswhite, F. J. (1973) The Education of Secondary School Teachers in Geometry, In K. B. Henderson(Ed.), *Geometry in the Mathematics Curriculum* (36th-year book pp.446-462), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dieudonnė, J. (1961). *New thinking in School Mathematics,* In H. Fehr(Ed), New thinking in School Mathematics (pp. 31-46), Paris: Organization for European Economic Cooperation.

Dieudonnė, J. (1969). *Linear Algebra and Geometry.* Paris: Hermann.

Falker, N. (1993). A Characterization of Inner Product Spaces. *The American mathematical Monthly 100*(3), pp. 246-249.

Gagatsis, A. & Demetriadou, H. (2001). Classical versus vector geometry in problem solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 32*(1), pp. 105-125.

Gardiner,A.(1982). *Infinite Process background to analysis.* New York: Springer-Verlag.

Greenberg, M. J. (1990). **Euclid 기하학과 비 Euclid 기하학,** (이우영, 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1974년 출판).

Heath, T. L. (1956) T*he Thirteen Books of Euclid's Elements with Introduction and Commentary.* New York: Dover Publications.

Hilbert, D. (1971). *Foundations of Geometry.* (P. Bernays,역). 독어 원작인 Grundlagen der Geometrie은 1899년 출판. Illinois: Open Court

Jordan, J. ,& Neumann, J. V. (1935). On Inner Products in Linear Metric Spaces. *The Annals of Mathematics 36*(3), pp. 719-723.

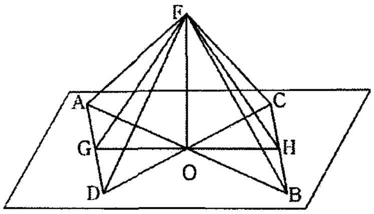
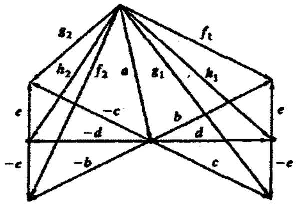
Moise, E. E. (1990). *Elementary geometry from an advanced standpoint.* Massachusetts: Addison-Wesley

NCTM(1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Roe, J.(1993). *Elementary Geometry.* New-York: Oxford University Press.

Stillwell, J. (2000). *Four Pillars of Geometry.* New-York: Springer.

<부록> 기하학적 증명과 내적의 성질의 연결성

원론 XI권 명제 4.	내적의 분배법칙
평면 α위에 있는 두 직선의 교점 O를 지나고, 두 직선 각각에 수직인 직선은 평면 α에 수직이다.	평행사변형법칙을 만족하는 노름공간에서 내적을 $a \cdot b = \frac{1}{4}(\mid a+b \mid^2 - \mid a-b \mid^2)$으로 정의하면, 일차독립인 세 벡터 a, b, c에 대하여 $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
증명.  평면 α위의 두 직선 b과 c가 점 O 에서 만난다고 하자. 점 A, B는 직선 b위의 $OA = OB$인 점이고, 점 C, D는 직선 c위의 $OC = OD$인 점이다. 이때, O를 지나는 임의의 직선이 AD, BC와 각각 만나는 교점을 각각 G, H 라 하자.	*증명.*  먼저 위의 그림에서 $d = \frac{(b+c)}{2}$, $e = \frac{(b-c)}{2}$ 으로 두면, $d + e = b, d - e = c$이다.
$\triangle AOD \cong \triangle BOC$ 이므로, $\triangle AGO \cong \triangle BHO$ 이다....① 또 $\triangle FOC \cong \triangle FOD$ 이고, $\triangle FOB \cong \triangle FOA$ 이다.	$4(a \cdot b) + 4(a \cdot c)$ $= (\mid f_1 \mid^2 - \mid f_2 \mid^2) + (\mid g_1 \mid^2 - \mid g_2 \mid^2)$
따라서 $\triangle FCB \cong \triangle FDA$ 이다....②	$= (\mid f_1 \mid^2 + \mid g_1 \mid^2) - (\mid f_2 \mid^2 + \mid g_2 \mid^2)$
$BH = AG$ (by ①), $\angle FBH = \angle FAG$, $FB = FA$ (by ②) 이다. 따라서 $\triangle FHB \cong \triangle FGA$ 이다....③	$= 2(\mid h_1 \mid^2 + \mid e \mid^2) - 2(\mid h_2 \mid^2 + \mid e \mid^2)$ (평행사변형법칙)
$HF = GF$ (by ③), OF 공통이고 $OH = OG$ (by ①)이므로, $\triangle FOH \cong \triangle FOG$이다. 그러므로 $\angle FOH = \angle FOG$. (Heath, 1956)	$= 2(\mid h_1 \mid^2 - \mid h_2 \mid^2) = 8(a \cdot \frac{b+c}{2})$ $= 4\ a \cdot (b+c)$ (Falkner, 1993)

Mathematical Connections Between Classical Euclidean Geometry and Vector Geometry from the Viewpoint of Teacher's Subject-Matter Knowledge

Lee, Ji Hyun (Junghwa High School)
Hong, Gap Ju (Seoul National University Science-Gifted Education Center)

School geometry takes various approaches such as deductive, analytic, and vector methods. Especially, the mathematical connections between these methods are closely related to the mathematical connections between geometry and algebra.

This article analysed the geometric consequences of vector algebra from the viewpoint of teacher's subject-matter knowledge and investigated the connections between the geometric proof and the algebraic proof with vector and inner product.

* key words : Mathematical Connections(수학적 연결성), Classical Euclidean Geometry(유클리드 논증기하), Vector Geometry(벡터기하), Vector and Inner Product(벡터와 내적).

논문접수 : 2008. 11. 1
논문수정 : 2008. 11. 28
심사완료 : 2008. 12. 6