대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 18 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 18, No. 4, 469-482. Nov 2008

무한 개념의 이해에 관하여[1)]

홍 진 곤*

본 연구에서는 무한 개념을 실무한적으로 파악하는 경우와 가무한적으로 파악하는 경우에 각각 부딪히게 되는 문제점들을 분석하였다. 또, 우리나라의 초등학교와 중학교 수학 교육과정에서 신중하지 못하게 실무한적 개념을 사용하고 있는 사례도 고찰하였다. 현대 수학에서 요구하는 실무한적 무한 개념의 학습을 위해서는 가무한적인 직관은 결국 단절해야 하는 인식론적 장애라고 할 수 있지만, 초기의 학교 수학에서부터 그러한 단절을 요구하기에는 실무한 개념이 너무 비직관적이고 많은 패러독스를 유도하며 적절한 은유를 제공하지 못한다는 점이 문제가 된다.

I. 들어가는 글

자연수를 1, 2, 3, 4, …와 같이 세어 나가면 '끝없이 계속된다'는 것을 짐작하는 것은 어린 아동에게도 그렇게 어려운 일이 아닌 것처럼, 수학에서 '무한'을 상상하는 것은 흔히 만나게 되는 자연스러운 상황 중의 하나이다. 그러나 다른 한편으로 무한 개념은, 추상화되고 형식화된 개념을 다루는 수학이나 철학에서만 사유의 대상이 될 뿐 사회과학이나 자연과학과 같은 경험과학에서는 문제를 삼을 일이 없는 개념이기도 하다. 즉, 무한은 누구나 쉽게 상상할 수 있는 것 같지만 막상 그 실체의 존재성은 받아들이기 힘든, 미묘한 개념이라는 것이다.

이와 같은 맥락은 어떻게 보면, 무한 개념이 수학에서 핵심적인 위치를 차지하면서 동시에 직관적으로 간파하여 이해하기 어려운 개념이 되는 상황을 암시하는 것일 수도 있다. 이미 국내외의 많은 연구(예를 들면, Fischbein, 1987; 박임숙, 2000; 이대현, 박배훈, 2003 등)가 학교 수학에서 무한 개념의 학습 및 지도와 관련한 여러 가지 문제를 지적하고 있는 바, 이는 인간의 경험적인 현실에서는 직접적으로 대면할 수 없는 무한이라는 개념을 대상화하여 다루는 수학의 학문적 특성에 원천적으로 기인하고 있는 문제일지도 모른다.

실제로 우리에게 잘 알려져 있는 아킬레스와 거북이 문제, 길이가 다른 선분 위의 점들이 일대 일 대응하는 문제, 0.999…=1임을 받아 들여야 하는 문제 등은 무한 개념을 학습하는 과정에서 필연적으로 거쳐 가야 할 난관이라고 해야 할 것이다. 그리고 이러한 학습상의 어려움을 해석하고 의미를 부여하는 데에도 여러 가지 관점이 있을 수 있다. 앞에서 언급한 무한 개념의 학습 과정에서 만나게 되는 어려움들은 관점이나 상황에 따라, 학습자에게 패러독스(paradox)가 될 수도 있고, 극복해야

* 건국대학교, kataphysin@naver.com
1) 이 논문은 2008학년도 건국대학교의 지원에 의하여 연구되었음

할 인식론적 장애(epistemological obstacle)가 될 수도 있다. 또는 적절한 2차 직관(Fischbein, 1987)이 형성되지 못한 까닭으로 해석할 수도 있다.

본 연구에서 살펴보고자 하는 것은, 이와 같은 패러독스나 인식론적 장애를 발생하게 하는, 무한 개념 자체에 내재된 모순적 본성에 관한 것이다. 무한 개념을 형식적 개념으로 확립하는 데 있어서 필연적으로 부딪힐 수밖에 없는 어려움이 개념 자체에 본유적인 것이라면, 이를 충분하게 이해하는 것은 그 어려움을 '학습자가 극복해야만 하는' 인지적 장애라고 순응하는 교수학적 판단에 선행되어야 할 문제일 것이며, 나아가 이러한 반성적 연구는 무한 개념의 지도를 위한 일종의 교수학적 현상학으로서도 필요한 사유이다.

II. 무한은 실재하는가

우리가 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$ 이라고 말할 때에는 끝없이 계속되는 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,⋯, 즉, 무한히 많은 대상을 모두 더한 '결과'를 상상하기도 한다. 또, 정사각형 모양의 종이를 절반으로 자르고, 그 절반을 다시 절반으로 자르고,⋯하는 과정을 반복하는 상황을 생각해서, 자르는 과정이 아무리 반복되어도 항상 절반이 남기 때문에 그 과정은 끝이 나지 않으며, 무한히 생겨나는 종이 조각들의 넓이의 합은 처음 종이 한 장의 넓이를 넘지 않는다는 사실로부터 우리는 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$ 임을 이해하기도 한다.

그러나 $\frac{1}{2}$ 에 $\frac{1}{4}$ 을 더하고, $\frac{1}{8}$ 을 더하고, 다시 $\frac{1}{16}$ 을 더하고,⋯ 계속하는 작업을 아무리 반복해도 그 합은 결코 1이 되지 않는다. 또한 종이를 자르는 것과 같은 작업은, 현실적으로는 아무리 날카로운 칼을 사용한다 하더라도 더 이상 자를 수 없는 상태에 금방 이르게 되며, 분자 수준에 도달해서 더 이상 자를 수 없게 되는 데까지도 유한 번의 단계에서 이루어진다. 결국 우리가 상상하는 '무한 번의' 과정이란 물리적인 세계에서는 불가능한, 상상에서만 가능할 수 있는 사유의 대상이다.

무한 개념의 이와 같은 특성은, Aristoteles로 하여금 무한을 '현실적인 형태로 존재하는 것(energeia)'이 아니라 '가능적으로 존재하는 것(dynamis)'[2]이라고 설명하게 하는 근거였을 것이다(김용운, 1988 참조). '무한'을 의미하는 희랍어의 '아페이론(apeiron)'은 '유한(peras, 한정된 것)'의 부정을 의미하며[3], 일정하지 않거나 분명하지 않다는 부정적인 뉘앙스를 가지고 있는 단어이다.

그러나 "거북이를 좇아가는 아킬레스가 통과해야 하는 지점이 무한히 많다면 아킬레스는 거북이를 따라잡을 수 없다"는 Zenon의 패러독스에 대한 답변은, 무한히 분할된 구간의 길이를 '모두' 더할 수 있다는 무한한 과정의 '대상화'[4]를 통하여 대개 설명된다. (예컨대, 아킬레

2) Platon이 이데아계와 현상계를 분리해서 생각한 것과는 달리, Aristoteles는 존재의 본질인 형상(이데아)이 질료 안에 내재해 있는 것으로 설명하였다. 이 때, 형상이 실현되지 않은 질료의 상태가 가능태(dynamis)이며, 형상이 질료 안에서 실현된 상태가 현실태(energeia)이다. 예를 들면, 집을 짓는 재료가 되는 돌, 나무 등에는 '집'이 가능적인 형태로 존재하지만, 이 가능적인 재료에 '집'의 형체와 목적이 결합되었을 때 '집'은 현실적인 형태로 존재하게 된다.
3) 영어에서도 infinite, endless 등의 단어는 모두 한계나 끝이 있는 상태(finite, end)를 부정하는 의미로 만들어진다.
4) 이 '대상화'의 의미는 어떤 과정을 '사고의 대상'으로 삼는다는 의미와, 무한히 분할된 구간을 '존재하는 대상'으로 생각한다는 의미를 모두 포함한다.

스의 속력이 거북이의 속력의 2배라면, 아킬레스가 거북이를 따라잡는 데 걸리는 시간은 수렴하는 무한급수의 합 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$으로 설명하는 것이다.) 이러한 관점은 유한한 구간을 계속해서 분할할 수 있고, 그 분할을 언제까지나 계속할 수 있다는 가능성이 있다는 것만으로 무한을 이해하는 것이 아니라, 무한한 소구간이 유한한 구간 안에 이미 존재하고 있다고 생각하는 것이다. 이와 같이 무한을 (현실적인 형태로) 존재하는 실체로 여기는 입장에서 포착한 무한을 현실적 무한(actual infinity), 또는 실무한(實無限)이라고 부르고, 존재하는 실체가 아니라 가능성으로만 생각할 수 있는 무한을 가능적 무한(potential infinity)[5], 또는 가무한(假無限)이라고 부른다. 실무한과 가무한이라는 명칭을 만들어낸 것은 Thomas Aquinas를 비롯한 중세의 스콜라 철학자들이지만, 이는 분명 Aristoteles의 현실태와 가능태의 개념에 각각 대응하는 것이다.

Aristoteles를 비롯한 고대 희랍의 철학자들에게 실무한이 받아들이기 힘든 개념이었던 것은, 무한이 현실 세계에 존재하는 대상이 아니라는 사실을 넘어서, 우주와 그 안에 존재하는 삼라만상의 고유한 위치가 정해져 있다고 생각하는 일종의 유한주의를 그 배경으로 한다. 그들의 생각에 우주는 '중심'과 '끝'이 있고 일정한 형태가 있는 유한의 질서를 가지고 있었다. 이러한 유한주의에 비추어 볼 때 무한은 한계가 없는 것, 질서를 갖추지 못한 것으로 여겨질 수 있는 것이다. 이러한 무한이 중세 시대에 와서 유한 이상의, 유한보다 우월한 것으로 간주되기 시작한 것은 기독교 사상의 영향이라고 할 수 있다. 고대 희랍의 철학자들이 주로 다룬 주제가 유일하고 완전한 신의 개념 보다는 우주의 질서(cosmos)에 관한 것이었던 반면, 중세의 헤브라이즘은 전지, 전능한 신의 속성으로서 무한을 이해하였기 때문에 오히려 세계의 유한함이 초월적이고 신적인 무한을 통해서 이해되는 것이었다. 실무한의 관념을 적극적으로 수용한 대표적인 신학자는 독일의 Nicolaus Cusanus(1401~1464)로, 예를 들면 그는 정사각형, 정오각형, 정육각형, …을 아무리 원에 가깝게 만들어도 원과 일치하지는 않지만 변의 수가 무한히 늘어난 '무한의 세계'에서는 다각형이 원과 일치하며, 이는 신의 무한성을 유한의 사물로부터 인식하게 되는 과정을 비유한다고 설명하였다(Cusanus, 1440). 이와 같은 비유를 단순히 신학자의 궤변으로만 보아 넘길 수 없는 것은, Klein이 지적한 바와 같이 "신이 겨우 한 시간 안에 이 무한한 세계를 어떻게 창조할 수 있었는가 하는 의문과 현대의 수학자가 단위 선분 상의 무한한 점집합에 대해 갖는 문제의식은 동일(김용운, 1988에서 재인용)"한 본질을 갖고 있기 때문이며 그런 점에서 스콜라 철학의 실무한에 대한 아이디어는 현대적인 실무한 개념의 일종의 맹아라고 할 수 있다.

그렇지만 수학 분야에서는 Cantor가 1872년에 실수의 비가산성을 발견하고 1874년에 초한수의 체계를 확립하게 될 때까지 오랜 시간동안 실무한을 자연스러운 것으로 받아들이지 못하고 인간이 파악할 수 있는 것은 오직 가무한뿐이라는 관념이 지배적으로 자리하고 있었으며, 미적분학과 같은 '무한의 수학'에서도 가무한의 개념만으로 극한이나 미분계수를 구하는 것이 이루어지고 있었다.

5) 'Potential infinity'를 흔히 '잠재적 무한'이라고 번역하기도 하는데, '드러나지 않고 숨어 있다'는 뜻인 '잠재(潛在)'라는 단어는 실체로서의 무한이 '존재한다는 것을 부정'하는 의미로는 다소 어울리지 않는 느낌이다.

Cantor의 집합론 이전에 실무한을 어느 정도 주목한 사례는 Galileo Galilei에게서 찾아볼 수 있다. Galilei는 1638년에 출판된 저서 '신과학 대화'[6]에서 자연수의 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$과 제곱수의 집합 $\{1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots\}$이 일대일 대응을 한다는 사실을 설명한 바 있다(김용운, 1988). 그러나 제곱수 전체의 집합이 자연수의 집합의 진부분집합이고, 심지어 제곱수는 커질수록 자연수 내에서의 분포 상태가 희박해 짐에도 두 집합 사이에 일대 일 대응이 가능하다는 이러한 사실을 두 집합의 원소의 개수가 같다는 것으로 이해하게 될 경우, 이는 '전체는 부분보다 크다'는 Euclid 원론의 공리와 모순되는 것이었다. 이 때 Galilei는 '같다', '크다', '작다' 등의 성질이 유한의 세계에서만 의미가 있는 것일 뿐 무한의 세계에서는 적용할 수 없는 것이라는 정도의 결론에 머무르고 말았다.

결국 실무한의 관점에서 본격적으로 무한집합의 농도를 초한수로서 다룰 수 있게 된 것은 Cantor와 Dedekind에 이르러서였으며, Dedekind는 '수란 무엇이며, 무엇이어야 하는가?(1888)'[7]에서 무한집합을 '진부분집합과 일대 일 대응이 가능한 집합'으로 처음 정의하였다. 현대 수학에서 실무한의 관점이 보편적인 지위를 얻게 된 것은 이와 같은 집합론적인 토대 위에 수학의 기초를 세웠기 때문이라고 할 수 있을 것이다.

우리의 학교수학에서도 Zenon의 패러독스를 해결하는 방법이나 $0.999\cdots=1$임을 설명하는 방법 등은 모두 이러한 실무한적 관점을 근거로 하고 있는데, 문제는 이러한 설명들이 형식적인 체계로서는 훌륭할지 몰라도 직관적으로는 여전히 받아들이기가 매우 어렵다는 점이다. 이 장에서 지금까지 실무한 개념이 체계를 갖추게 되는 힘들고 오랜 역사를 살펴보았다면, 다음 장에서는 가무한적 관점과 비교할 때 실무한적 관점이 가지게 되는 본질적인 어려움을 검토해 보고자 한다.

III. 실무한의 난점

아킬레스는 거북이를 따라잡을 수 없지 않느냐는 도발적인 Zenon의 질문에 어떻게 답을 할 수 있는가 하는 문제부터 생각해 보자. 앞에서도 잠깐 언급되었지만, 이에 대한 통상적인 대답은 아킬레스가 거북이를 따라잡는데 걸리는 '시간'이 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=1$ 이므로 '유한'하다는 것이다. 그런데 이와 같은 답변은 Zenon의 질문이 갖고 있는 논지를 약간 비껴난 것이라고 할 수 있다. 여전히 해결되고 있지 않은 문제는, 아킬레스가 지나가야 하는 '점'이 무한히 많다는 것, 다시 말하면 아킬레스가 해야 하는 '실행'이 무한히 많아서 그 무한의 계열을 '종결'시킬 수 없지 않은가 하는 문제이다.

부연하자면, 아킬레스가 해야 하는 '실행'은 다음과 같다.

① 출발점 a_0에서 거북의 출발점 a_1까지 간다 → ② a_1에 도착하면 다시 그 때 거북의 위치 a_2까지 간다 → ③ a_2에 도착하면 다시 그 때 거북의 위치 a_3까지 간다 → …

이와 같은 실행의 계열은 끝없이 계속되는 것이기 때문에 모든 실행을 완수한다는 것은 불가능할 수밖에 없는 것이다. 무한의 시간이

6) 정식 서명은 '역학과 지상 운동에 관한 두 신과학에 대해서의 대화와 수학적 증명(Discorsi e Dimostrazioni Mathematiche, intorno a due nuove scienze Attenenti alla Mecanica & Movimenti Locali)'이다.

7) Dedekind, R.(1888). Was sind und was sollen die Zahlen? (What are numbers and what should they be?)

소요되기 때문에 문제가 되는 것이 아니라, 무한 번의 행위가 완결되어야 한다는 것이 문제가 되는 이러한 상황을, 野矢茂樹(1998)는 '초작업법(超作業法)의 역설'[8]이라고 명명하고 있다. 이러한 관점에서 볼 때 Zenon의 질문은 결국, 아킬레스가 거북이를 따라잡게 될 때까지의 거리와 같은 유한한 구간이 '무한개의 점, 또는 미립자'를 포함할 수 있는가 하는 문제라고 할 수 있다.

그런데 이는, 아킬레스의 운동 자체가 불가능하다고 주장하는 것과는 다른 문제이다. 왜냐하면, 아킬레스가 무한개의 점을 통과해야 하기 때문에 운동이 불가능하지 않느냐고 묻는 Zenon의 논지에서 핵심적인 출발점이라고 할 수 있는 "유한한 길이의 선분에 무한개의 점이 이미 존재하고 있다"는 가정, 즉 "선분은 점들이 모여서 만들어진다"는 가정을 받아들이지 않고도 운동을 생각할 수 있기 때문이다. 역사적으로 보더라도 수학에서 직선이나 선분을 개념화하기 위하여 사용해 온 은유는 크게 두 가지가 있다(Lakoff & Núñez, 2000). 한 가지는 직선을 자연적인 연속체, 곧 이산적이지 않고 절대적으로 연속인 것으로 생각하며 점은 직선 위에서의 위치로 생각하는 것이다. 그리고 다른 한 가지는 직선을 점의 집합으로 보는 것으로, 이 은유에 따르면 점은 직선을 구성하는 실체가 된다. Cantor의 집합론이나 Weierstrass의 미적분학의 산술화는 직선이나 곡선을 점의 집합으로 개념화할 것을 요구하였기 때문에 직선을 점이 모여서 만들어지는 것으로 생각하는 은유는 오늘날 우리에게 매우 자연스러운 것이 되었다. 그런데 Zenon의 패러독스가 전제하고 있는 것이 바로 이 '점이 모여서 만들어지는 선분'이라는 아이디어이며, 만약 이를 전제하지 않는다면 Zenon의 패러독스를 피할 수 있는 대안적 설명이 가능하게 된다.

무한히 많은 점이 모여서 선분이 만들어진 것이라면, 즉 선분 위에 이미 무한개의 점이 존재하고 있다면 아킬레스는 그 무한히 많은 점을 통과해 가야 하지만, 점이 모여서 만들어지는 것이 아닌, 선분이 먼저 존재하고 있고, 그 선분의 이등분점, 사등분점, 팔등분점…을 끝없이 생각하는 것만 가능하다면, 아킬레스는 그 선분 위를 운동하기만 하면 되고, '무한한 과정'은 아킬레스의 운동을 '해석하는 주체'가 끝없이 해 볼 수 있는 과정일 뿐이라고 할 수 있는 것이다. 말하자면 이것은, 그려져 있는 어떤 그림의 절반에 대해서 설명하고, 남은 부분의 절반에 대해서 설명하고, 또 남은 부분의 절반을 설명하고…하는 것과 같은 계열의 행위는 언제까지나 계속할 수 있고 아무리 계속해도 끝나지 않는 행위이지만, 이와 같은 설명의 행위가 가능하다는 것이 그림 한 장을 그리는 것의 불가능함을 의미하지 않는 것과 마찬가지라고 할 수 있다(野矢茂樹, 1998).

이와 같은 분석에서 "무한개의 점이 모여서 선분이 만들어진다"고 생각하는 관점은 선분 위에 처음부터 무한개의 점이 존재하고 있다고 생각하는 실무한적 관점이고, "연속체로서의 선분만이 먼저 존재하고 있으며 그 선분 위의 '위치'로서의 점만을 끝없이 생각할 수 있을 뿐"이라고 보는 관점은 가무한적 관점이라는 점에 주목할 필요가 있다.[9] 김용운(1988)에 따르면 이는 공간의 무한성을 이해하는 두 가지 관점, 즉 공간은 더 이상 분할할 수 없는 최종 원소(점)들이 무한히 많이 모여서 구성된 것이

8) 아킬레스가 ①, ②, ③, …의 실행을 할 때마다 자연수를 1, 2, 3, … 세어 나간다면, 이 무한한 계열의 실행을 완수한다는 것은 '모든 자연수를 다 세었다'는 것을 의미하게 된다. 그것이 가능한가?

9) 실무한적 관점이 '점으로 선이 만들어진다'고 보는 관점이라면 가무한적 관점은 '선에서 점이 만들어진다'고 보는 관점이라고 생각해도 좋을 것 같다.

라는 '원자론'과, 공간은 그 자체가 하나의 연속체로서 그 공간의 분할만큼은 무한히 계속할 수 있다는 '연속론'이라는 두 가지 관점의 대립이라고 할 수 있는데, Zenon의 패러독스는 바로 이 원자론, 또는 실무한적 관점에 기인한 문제인 것이다.

생각하기에 따라서는, 무한개의 점이 선분 위에 이미 존재하고 있는 것이 아니라면 선분을 무한히 분할할 수 있는 가능성도 없는 것이 아닌가 하고 질문할 수도 있다. 그러나 이는 현실태(형상이 실현된 존재)와 가능태(가능성으로서의 존재)를 구별한 Aristoteles의 존재론으로 충분히 설명 가능하다. 즉, 직선 위의 '점'은 마치 옥수수의 알갱이처럼 이미 존재하고 있는 것이 아니라 대리석을 조각해서 가능성으로만 존재하던 어떤 작품을 만들어내는 것처럼 직선을 분할하는 것을 통하여 '만들어내는' 존재라고 해석하면 되는 것이다. 그리고 이렇게 해석하는 관점이 바로 가무한적 관점이다.

사실, 직선을 구성하는 점의 은유와 같은 수학적인 '원자'를 가정하게 되면 여러 가지의 논리적인 모순이 생겨나게 되는데, 대표적인 것이 원뿔과 관련된 'Democritos의 패러독스'이다. 원뿔을 밑면과 평행한 평면으로 자른 절단면들이 무한히 많이 모여서 이루어진 것으로 생각하면, 서로 이웃한 두 절단면은 같은가, 같지 않은가? 만약 같지 않다고 하면 원뿔의 모선은 계단 모양이어야 하고, 같다고 하면 원뿔이 아니라 원기둥이어야 한다. 어떻게 보면, 더 이상 나눌 수 없는 무한소 크기의 원자 개념이란, 그 정의 자체가 모순을 내포하고 있다고 할 수 있다. 무한소가 존재한다면 크기를 지녀야 하고, 일정한 크기를 지닌다면 무한소가 아니라 유한이 되기 때문이다.

무한소의 원자론, 또는 실무한적 관점은 도형의 넓이나 부피를 계산하기 위한 구분구적의 아이디어에 매우 유용하게 사용되었기 때문에 고대 그리스에서부터 암암리에 활용된 개념이지만, 그럼에도 실무한 개념을 거부하고 가무한적인 관점만을 받아들이는 Aristoteles의 입장은 위와 같은 모순이 파생되는 까닭에 기인했다고도 할 수 있을 것이다. 앞에서도 언급했지만 Zenon의 역설은 가무한적인 관점을 취한다면 피할 수 있는 것이었다.

그렇다면 현대 수학의 입장에서 Zenon의 패러독스나 Democritos의 패러독스는 어떻게 해석될 수 있는가? 현대 수학은 물론 실무한의 개념을 받아들이고 직선을 점의 집합으로 간주하고 있지만, 직선을 단순히 점이 모인 것만으로 이루어지는 것이라고는 생각하지 않는다. 직선을 이루는 점 사이의 연결 상태(topology)가 정의되어 있어야 할 것을 요구하며, '연속'이라는 위상적 구조에 근거하여 직선 위의 한 점에 대한 바로 그 다음 점을 생각하거나 원뿔에서 바로 이웃하는 절단면을 생각하는 것이 불가능하다는 것을 설명한다.[10] 이는 단순히 원자론과 연속론으로만 귀결되었던 고전적인 실무한과 가무한의 개념과는 다소 차이가 있으며, 실무한적인 점의 집합을 생각하면서도 연속성을 이해하는 관점이다. 또 한편으로는 순서(order) 구조와 위상적 구조를 분리해서 이해함으로써 이루어진 관점의 발전[11]이라고 할 수도 있을 것이다.

---

10) 실무한을 수용하면서 Zenon이나 Democritos의 패러독스에 답하려면 연속체로서의 직선이나 평면 개념을, '운동' 개념과 함께, '정의'해야만 한다.

11) 관점의 발전이라고 표현한 것은, 고전적인 패러독스를 해결하기 위한 순서 구조, 위상 구조 등의 개념이 다듬어졌다는 것을 의미한다. 그러나 이와 같은 구조를 갖추어 가는 과정은 결국 이 복잡해진 개념을 단일한 은유로 설명할 수 없게 만들며, 학습의 상황과 같이 '정의'로만 설명 가능한 '형식'과 '은유'를 필요로 하는 '직관'을 모두 고려해야 하는 경우에 그 양립하는 모순적 본성은 명시적으로 드러나게 된다.

그런데 문제는 이와 같은 현대 수학의 구조적 관점을 받아들이는 학습자의 관점이다. 학습이나 이해를 위하여 어떤 형태로든 직선 개념을 나타내는 '은유'가 필요하다면, 점의 집합이면서 순서 구조와 위상적 구조를 모두 포함하는 직선 개념의 훌륭한 은유는 무엇일까, 또는 가능할까. 앞서 Lakoff와 Núñez(2000)가 설명한 '점의 집합'과 '연속체'라는 두 은유는 양립 가능한 것인가, 또는 하나를 선택해야 한다면 어떻게 선택해야 하는 것인가. 수학 교수의 상황에서 만약 이와 같은 문제가 중요하게 다가온다면, 완전히 구조화된 현대 수학의 개념 체계에서가 아니라 소박한 실무한과 가무한의 관점 사이에서 생겨나는 패러독스들을 헤쳐 나갔던 역사적인 과정 속에서 그 해답의 실마리를 발견할 수 있을 것이다.

Ⅳ. 가무한의 난점

실무한의 개념을 받아들일 경우 파생되는 여러 가지 패러독스들을 피하기 위해서, 가무한의 개념만을 인정하고 실무한 개념을 강하게 거부하는 입장이 있다. Brouwer로 대표되는 직관주의 수학 철학이 그러한 경우라고 할 수 있는데, 이러한 입장은 주류의 현대 수학에서 인정하는 많은 개념과 양립할 수 없기 때문에 폭넓은 지지를 받지 못하고 있는 것이 사실이다. 그러나 앞에서 살펴본 바와 같이 무한집합과 관련된 여러 가지 패러독스가 가무한의 개념만을 인정하는 입장에서 보면 피할 수 있는 것이라는 점은, 무한 개념의 발생적, 현상학적 분석과 그 교수학적 함의를 탐구하기 위해서 이와 같은 가무한적 관점을 검토할 필요가 있음을 시사한다.

실무한이 완성된 상태의 무한을 인정하는 개념이라면, 가무한은 모든 실재하는 단계에서는 유한만 가능하며 그것이 끝없이 전개될 수 있다는 가능성으로서만 무한을 인정하는 개념이다. 그렇기 때문에 '끝없이 전개될 수 있는 가능성'은 1, 2, 3, …과 같이 매 단계를 셀 수 있는 것이어야 하고, 이와 같은 가무한적 관점에서는 가산 무한(countable infinity)만을 인정할 수밖에 없게 된다. 그렇다면 실무한을 인정하지 않는 관점에서는 비가산(uncountable)인 실수의 집합은 어떻게 받아들여야 할까? 이 지점이 현격한 입장의 차이가 시작되는 지점이다.

Cantor의 집합론에서 실수의 집합과 같은 비가산 집합이 나타나게 되는 것은 멱집합(power set)의 개념에 의해서라고 할 수 있다. Cantor의 정리라고 불리는 이 내용은 다음과 같이 요약된다.

> 임의의 집합 X에 대하여, card X $\lneq$ card P(X). (증명 및 자세한 내용은 Lin & Lin(1974, pp.96-97) 참조)

이 정리는 자연수의 집합 N의 농도보다 N의 멱집합 P(N)의 농도가 더 크다는 것을 의미하므로, P(N)과 실수의 집합이 일대 일 대응[12]이라는 사실을 여기에 적용하면 실수의 집합은 비가산이라는 결론을 이끌어낼 수 있다.

그런데 이러한 Cantor의 정리는 또 곧바로 Cantor의 패러독스라고 불리는 다음의 패러독스를 만들어낸다. 즉, 집합과 집합이 아닌 것을 구별할 수 있다면 집합이라고 할 수 있는 것을 모두 모은 '모든 집합의 집합' A를 생각할 수 있다. 그러면 A의 멱집합은 A보다 농도가 커야 하는데, 모든 집합의 집합보다 농도가 큰 집합이

---

12) 개구간 (0, 1)의 실수 x를 이진법으로 소수 전개한 것이 $0.x_1x_2x_3\cdots$라 할 때, $\{n \mid x_n=1\}$을 x에 대응시키면 이 대응은 (0, 1)과 P(N) 사이의 일대 일 대응이다.

있다는 것은 논리적으로 모순이다. Cantor는 '모든 집합의 집합이라는 것은 생각할 수 없다'는 식으로 이 패러독스를 피해 가려 했지만, 직관주의자들에게 이는 받아들이기 힘든 설명이었다.

사실 Cantor 정리의 증명 또한, 실수의 집합이 완결된 형태로 주어져서 그 농도를 보여주는 것이 아니라, 실수의 수열을 임의로 구성하면 (즉, 실수와 자연수를 어떻게 대응시키더라도) 그 수열에 없는 새로운 실수를 항상 구성할 수 있다는 사실만을 보이고 있을 뿐이라는 점에 주목할 필요가 있다. 이와 같이 귀류법에 근거한 소위 '대각선 논법'으로 Cantor가 사실상 증명한 것은 자연수의 집합과 실수의 집합이 같은 농도를 가진다는 것을 '증명하지 못한다'는 것일 뿐, 자연수의 집합과 실수의 집합이 각기 서로 다른 농도의 집합으로서 실재한다는 것을 증명한 것은 아니라는 것이 직관주의의 설명이다.[13)]

가무한만을 인정하는 입장에서 보면, 자연수의 집합 N의 멱집합 P(N)을 생각하는 것부터 받아들이기 힘든 일이라고 할 수 있다. 가무한적 무한관을 따르면 무한집합이란 그 자체가 실재하는 대상이 아니라 그 집합의 원소를 '계속해서 만들어나가는 방법, 또는 규칙'일 뿐이다. 예를 들어 무한집합으로서의 '자연수의 집합'을 가무한적 관점에서 생각할 수 있는 것은, 그것이 실재하는 대상으로서가 아니라 '1을 계속 더해 나간다'는 규칙에 의한 '끝없이 자연수를 만들어낼 수 있는 가능성'으로서의 무한을 생각하는 것이다. 그런데 '자연수의 집합 N의 모든 부분집합'을 체계적으로 만들어낼 수 있는 규칙을 생각할 수 있는가? 그러한 규칙을 생각해낼 수 없다면 N의 멱집합 P(N)이라는 것을 생각하는 것 자체가 의미를 갖지 않는다는 것이 가무한적 무한관이라고 할 수 있다.[14)]

무리수의 경우에도 마찬가지 주장을 할 수 있다. 예컨대 '제곱해서 2가 되는 수'인 $\sqrt{2}$는 $1.4^2<2<1.5^2$, $1.41^2<2<1.42^2$, …의 과정을 계속해서 1.414…와 같은 비순환소수를 만드는 '규칙'을 생각할 수 있고, $\pi=3.14159\cdots$와 같은 무리수도 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ 등과 같은 '규칙'을 통해 만들어낼 수는 있지만, 이 각각의 '규칙'인 무리수 전체를 체계적으로 만들 수 있는 '규칙'은 생각할 수 없기 때문에 '무리수의 집합'도 생각할 수 없다는 것이다. 실수의 집합도 마찬가지이고, 결국에는 모든 비가산 무한집합은 받아들일 수 없다는 것이 가무한적 입장의 결론이 된다.[15)]

더 심각한 것은, 3.14159…와 같은 π의 '순환하지 않는' 소수 전개가 어떤 규칙으로 이루어지는지 알 수 없기 때문에, 'π의 소수 전개에서 7이 100번 연속해서 나타나는 곳이 있다'와 같은 명제는 참과 거짓을 알 수 없고, 이와 같은 사례는 '무한과 관련한 영역에서'[16)] 배중률을 받아들일 수 없게 만든다는 것이다.

Brouwer와 Weyl 등에 의해 제기된 이와 같은 주장에 대해 "수학에서 배중률을 빼앗는 것은 권투선수에게 주먹을 쓰지 말라는 것과 같다", "어느 누구도 Cantor의 낙원에서 우리를 추방할 수 없다"와 같은 말로 답한 Hilbert는

13) 어떤 명제를 증명할 수 없다는 것과 그 명제가 참이라는 것이 양립할 수 있음을 보여준 것이 Gödel의 불완전성 정리이다.

14) 가무한적인 입장을 좀 더 강하게 말하면 'P(N)이라는 집합은 존재하지 않는다'고 해야 할 것이다.

15) Kronecker는 다음과 같이 말하였다. "정수는 신이 창조한 것이지만 그 밖의 다른 것들은 모두 인간이 만든 것이다(Ewald, 1996)."

16) 가무한적 입장에서도 '유한집합에 관한' 배중률은 인정한다. 배중률을 받아들일 수 없다고 생각하는 것은 그것이 '무한'과 관련될 때뿐이다.

그렇게 수학이 '훼손'되는 것을 용납할 수 없었다(Reid, 1996; Hilbert, 1926). 결국 직관주의자들은 '수학이 실질적인 의미가 있다고 주장할 수 없는 명제까지 취급하는 것'에 대해 이의를 제기했지만 Hilbert는 오히려 수학적 명제의 '의미'를 아예 포기해 버리는 형식주의로 맞선 것이다.

그러나 Hilbert 또한 Brouwer의 문제의식을 어느 정도는 인정하였기 때문에 'Hilbert 프로그램'으로 불리는 형식체계의 무모순성에 대한 증명을 소위 '유한적 방법(finitary method)'을 통해서 이루려고 시도하였다. 즉, 공리계에서의 증명은 공리와 추론규칙을 사용해서 수식을 '유한 번 또는 기껏해야 가무한적으로' 변형하는 것만으로 이루어져야 한다는 것이다. 이와 같은 Hilbert의 프로그램이 Gödel의 불완전성 정리[17]에 의해 결국 실패한 것인지 아닌지의 여부는 아직도 분명하게 말할 수 있는 문제가 아니며, 이 논문이 다루는 범위를 넘으므로 여기에서 자세하게 논의하지는 않겠다.

그렇지만 직관주의와 같은 가무한적 무한관은 현대 수학의 빛나는 성취들 중 많은 것을 포기해야 할 만큼[18] 소극적인 관점이라는 것, 따라서 수학자들에게 폭넓게 수용되기는 어려운 관점이라는 것은, 그 자체로 가무한적 입장이 갖는 난점이 된다는 점에 주목할 필요가 있다.

V. 교과서에서의 무한

앞서 살펴본 바와 같이, 실무한의 개념은 직관적인 모델이나 은유로 설명하려 하면 이해하기 어려운 많은 패러독스들을 낳지만, 한편으로 현대 수학의 발전은 이 실무한의 개념을 받아들이지 않고서는 생각하기 어려운 것도 사실이다. 그런데 이와 관련하여 우리가 수학교육의 맥락에서 생각해 보아야 할 것은, 가무한이 아닌 실무한의 개념을 '학교수학에서' 언제, 어떻게 도입해야 할 것인가의 문제이다. 현재 우리의 교과서에서 실무한의 개념은 중학교, 심지어 초등학교 과정에서도 그다지 신중하지 않게 사용되고 있는 실정이며, 그 학습의 과정에서 나타나는 학생들의 오개념은 다각도로 검토되고 연구되고 있기는 하지만 관심의 초점은 '무한 개념 자체'가 아니라 학생들이 극복해야 하는 '인지적 장애'에 놓이는 경우가 많다.

중학교에서 만나게 되는 실무한 개념의 대표적인 사례는 다음과 같은 것이다.

> $0.\dot{9}$를 x로 놓으면 $x=0.999999\cdots$ …㉠
> ㉠의 양변에 10을 곱하면 $10x=9.999999\cdots$ …㉡
> 이므로, ㉡에서 ㉠을 변끼리 빼면 $9x=9$
> 이다. 따라서, $x=\frac{9}{9}=1$ 이다.
>
> (강옥기 외(2002). 중학교 수학 8-가)

분수를 소수로 표현하는 과정에서 '분자를 분모로 나눌 때 끝나지 않는 나눗셈'으로부터 순환소수를 만나게 되는 중학교 수학의 수준에서 $0.999\cdots$가 실무한적인 의미의 극한값으

17) Gödel의 제 2 불완전성 정리는 공리계의 무모순성을 그 공리계에서 증명할 수 없다는, 즉 유한적 입장의 메타수학으로는 자연수론의 무모순성을 증명할 수 없다는 것을 말한다.

18) Hilbert는 직관주의를 받아들임으로써 수학자들이 잃게 되는 '보물'을 다음과 같이 열거하였다. 무리수에 대한 일반적 개념, 함수, 초월수, 정수의 무한집합에 최소원이 존재한다는 정리, 논리학의 배중률(Reid, 1996).

로 이해되기는 어렵다. 그럼에도 우리나라의 교과서는 '순환소수를 분수로 바꾸는 방법'에 대한 설명을 위의 인용문과 같이 도입하고 있다. 그러나 $10\times0.999\cdots=9.999\cdots$와 같은 서술이 중학교 수준의 학생들에게 사실상 무리한 설명이라는 것은, 무한합에서 분배법칙이나 결합법칙을 함부로 쓸 경우 야기되는 다음과 같은 오류를 설명할 방법이 없기 때문이기도 하다.

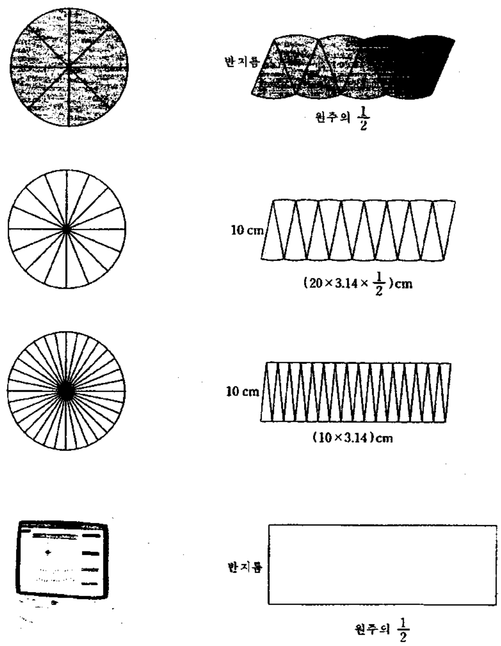
$x=1+2+2^2+\cdots$이면
$x=1+2(1+2+2^2+\cdots)=1+2x$이므로 $x=-1$

$0=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$
$=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1$

$0.999\cdots=1$이 성립한다는 것은 고등학교 과정에서 $0.999\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right)$로 '정의'해야만 설명할 수 있는 것으로, '직관'이나 가무한적인 무한 개념으로는 받아들이기 힘든 것이 사실이다. $0.999\cdots=1$이 '정의'의 문제임을 이미 지적한 조한혁, 최영기(1999)는 대부분의 중학생들이 $\frac{1}{3}=0.333\cdots$는 믿을 수 있지만 $1=0.999\cdots$는 믿지 않는다고 보고하고 있는 바, 이는 극한 개념이 학습되지 않은 중학생에게는 가무한적인 무한 개념밖에 기대할 수 없는 것으로 충분히 설명이 된다.

그런데 이렇게 직관적으로 받아들이기 어려운 실무한적 관점은 현재 초등학교 교과서에도 나타나고 있다.

반지름이 10 cm인 원을 그린 후, 그림과 같이 잘라 모눈종이에 붙여서 알아보시오.



(교육부(2002). 초등학교 수학 6-나)

원의 넓이 공식을 설명하는 6학년 2학기 과정에서 원을 작은 부채꼴 모양으로 나누어 이어붙일 때 그 모양이 직사각형에 가까워진다는 것을 보여주는데, 이 때 부채꼴을 아주 작게 만드는 것이 현실적으로 어려우므로 그림과 같이 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하도록 권하고 있는 것이다. 그런데 교과서에 있는 마지막 단계의 그림은 사실상 '완성된' 직사각형의 그림으로 극한의 결과, 즉 실무한을 표현하고 있다는 점이 문제가 된다. 류현아, 홍진곤(2006)은 컴퓨터로 이와 같은 시뮬레이션을 보여 주었을 때 오히려 학생들은 300조각, 10000조각 정도로 부채꼴을 오려 붙이면 직사각형이 '된다'고 착각하는 문제[19]가 발견

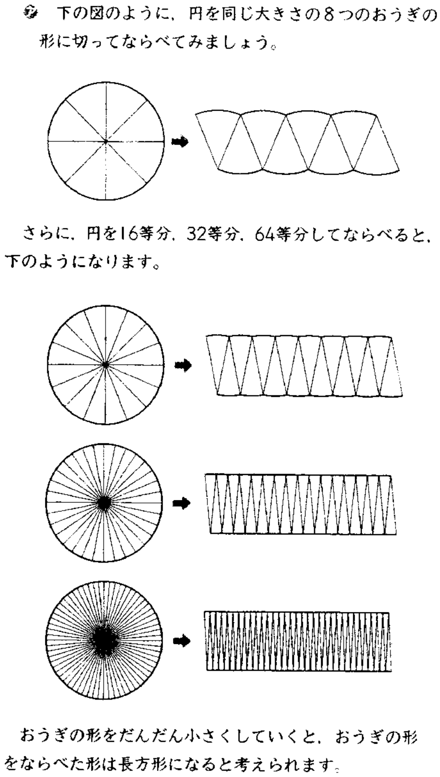
19) 컴퓨터 시뮬레이션을 보지 못한 비교반 학생들은 그 중 60%가 부채꼴을 오려 붙인 것이 직사각형에 '가까워진다'고 대답하였지만 오히려 컴퓨터로 수업한 실험반 학생들은 그 중 75%가 실제로 직사각형이 '된다'고 대답하였다.

되었음을 보고한 바 있다. 이는 컴퓨터 환경에서 구현할 수 있는 한계[20]에 기인하는 문제이기도 하지만, 한편으로는 초등학교 수준에서 성급하게 실무한적인 극한 개념을 제시하는 것이 얼마나 무리한 일인가를 보여주는 것이기도 하다.

한편 같은 내용을 설명하고 있는 일본의 교과서는 우리의 교과서와 좋은 비교가 된다.

일본의 경우에는 초등학교 5학년에서 원의 넓이 공식을 다루는데, 그림과 같이 원을 작은 부채꼴로 나누어 직사각형에 가깝게 오려 붙이는 것은 우리와 거의 같은 방식의 설명이다. 그러나 마지막 단계에서 완전한 직사각형을 보여 주지는 않으며, 이 그림이 제시된 다음 페이지에서 넓이 공식을 유도할 때에도 '장방형으로 보이는 도형(長方形とみられる図形)'이라는 표현을 사용하는 정도에 그치고 있다는 점은 주목할 필요가 있을 것이다.

원의 넓이를 직사각형의 넓이에 '근사'시키는 활동 자체가 초등학생들에게 시도하기 어려울 정도까지는 아니라고 생각되지만, 그 넓이는 '근사값'으로서만[21] 도입해도 충분하지 않을까? 가무한적 직관에서 벗어나지 못한 상태에서 극한 개념의 학습, 특히 '극한값' 자체를 명시적으로 도입하는 것은 오히려 전술한 연구에서 보고한 것과 같이 '유한 번의 단계에서 도달해버리는 극한값'과 같은 오개념의 습득 기회로 작용할 수 있음을 경계할 필요가 있다.



(일본 초등학교 5학년 교과서, 2004)

Ⅵ. 맺는 글

인간의 상상력은 현실적으로 마주할 수 없는 '끝없는 가능성'이라는 것을 생각해 내었고 반성적 지성은 다시 그 가능성을 대상화하여 '무한' 그 자체를 실재하는 대상처럼 사고하기에 이르렀다. 그리고 이와 같은 무한의 개념은 수학적 사유에서 핵심적인 부분을 차지하고 있지만 그 개념을 수학 교과에서 처음 학습하는 입장에서는 완전한 대상화의 단계에 이르는 것이 결코 쉬운 일은 아니다.

20) 이는 줌(zoom) 기능 등으로 해결될 수 있는 문제가 아니며, 컴퓨터 화면이 유한개의 화소로 이루어져 있는 이상 극복하기 힘든 문제이다.
21) 원주율도 3.14라는 근사값만 사용할 뿐이다.

본 연구에서는 무한 개념을 실무한적으로 파악하거나 가무한적으로 파악하는 각각의 경우 부딪힐 수밖에 없는 문제점들을 우선 분석하였다. 가무한적 관점은 끝없이 전개될 수 있는 '가능성'만 인정하며 그 무한의 과정을 대상화하지 않은 단계로, 직관적으로 납득할 수 없는 패러독스는 만들지 않는다. 그러나 무한한 과정의 가능성이 대상화되는 것은 여타의 수학적 사고가 확장되는 방식과 크게 다르지 않게 자연스러운 것으로, 현대의 고급 수학에서 실무한의 개념, 특히 '실수의 집합'과 같은 비가산 집합을 고려할 수 없는 수학이란 상상하기 어려운 지경이 되었다. 한편 그럼에도 이러한 실무한적 개념이 가무한적 개념을 변증법적으로 지양(aufheben)한 개념이라고는 하기 어려운 것은, 선을 점의 집합으로 보는 것과 같은 은유 등이 가무한의 직관으로는 납득될 수 없는, 형식적 '정의'로만 설명 가능한 개념이기 때문이다. 이와 같이 모순적인 본성이 통합되지 못한 무한 개념에 대한 실무한적 관점과 가무한적 관점은 직관주의자들의 문제제기와 Hilbert 프로그램, 그리고 Gödel의 불완전성 정리에 이르는 논쟁을 거쳐 왔지만 아직까지도 철학적인 '관점'의 문제로는[22] 두 관점이 어느 정도 양립해 오고 있는 것이 사실이다. 그러할 정도로, '직관적이지 않은' 무한의 개념은 학습자에게 다양한 어려움의 원천이 된다. 특히 학교수학의 초기 단계에서부터 현대적인 실무한의 관점을 제시하는 것은 수많은 인식론적 장애를 야기할 수밖에 없음을 인식할 필요가 있다.

인식론적 장애는, 어떤 단계에서 인식론적 단절을 통한 개념의 발달을 방해하는 요소를 의미한다. 이 논문에서 논의되고 있는 무한 개념의 학습 상황과 관련하여 말하자면 '단절'을 통해 학습자에게 형성되어야 하는 개념은 '실무한'이고 그 '단절'을 방해하는 '장애'는 '가무한적 직관'이다. 우리가 교수학적 맥락에서 이 문제를 이야기할 때, 초등학생이나 중학생에게 조차도 가무한의 직관은 실무한 개념 형성에 '장애'가 되는 것이니 한시바삐 그 장애로부터 탈피할 것을 요구하는 것이 과연 옳은 일인가? 그렇지 않으면 학생들에게 제시되는 교육과정에서 정신 혹은 개념의 발달 단계에 적절하지 않은 인식론적 단절의 요구를 먼저 반성할 필요는 있지 않은가? 무한 개념 자체에 내재되어 있는 비직관적이고 형식적이며 역설적인 본성을 세심하게 탐구하는 것은 이와 같은 질문에 대답하기 전에 필히 선행되어야 할 작업이라고 할 수 있을 것이다.

참고문헌

강옥기 · 정순영 · 이환철(2002). **중학교 수학 8-가.** (주)두산.

교육부(2002). 수학 6-나. (주)천재교육.

김용운(1988). 집합론 성립의 배경으로서의 무한론에 관해서, **한국수학사학회지** **5**(1), 5-37.

류현아 · 홍진곤(2006). 초등학교에서 컴퓨터를 활용한 수학 수업이 극복해야 할 문제들, **수학교육학논총** **29**, 65-81.

박임숙(2000). 교사의 무한개념 이해도 조사 연구, **수학교육** **39**(1), 37-47.

野矢茂樹(1998). 無限論の教室, 東京: 講談社.

이대현 · 박배훈(2003). 무한 개념에 대한 수학교육학적 고찰, **한국수학사학회지** **16**(3), 57-68.

22) 수학적으로는, 형식적인 '정의'의 문제로 귀결시킴으로서 무한 개념의 모순을 덮을 수 있지만, '존재하지도 않는' 대상을 '정의'하는 것이 의미가 있느냐는 질문을 하게 되면 철학적인 이슈가 된다.

조한혁 · 최영기(1999). 정적 동적 관점에서의 순환소수, **학교수학** 1(2), 605-615.

清水静海, 船越俊介(2004). **わくわく算数 5下**, 大阪: 啓林館.

Cusanus, N.(1440). *De docta ignorantia (The Legacy of Learned Ignorance*; Casarella, P. J. (Edt), 2006). Catholic Univ of Amer Pr.

Dedekind, R.(1888). *Was sind und was sollen die Zahlen? (What Are Numbers and What Should They Be?*; Pogorzelski, H. A.(Trans), 1995). Research Institute for Mathematics.

Ewald, W.(1996). *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

Fischbein, E.(1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*, Dordrecht: D. Reidel Publisching Company.

Hilbert, D.(1926). Über das Unendliche, *Mathematische Annalen 95.*

Lakoff, G. & Núñez, R. E.(2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books.

Lin, S. T. & Lin, Y.(1974). *Set Theory: An Intuitive Approach*, Boston: Houghton Mifflin Company.

Reid, C.(1996). *Hilbert*, New York: Springer.

On the Understanding of Infinity

Hong, Jin Kon (Konkuk University)

This study analysed difficult points on the understanding of infinity when the concept is considered as actual infinity or as potential infinity. And I consider examples that the concept of actual infinity is used in texts of elementary and middle school mathematics.

For understanding of modern mathematics, the concept of actual infinity is required necessarily, and the intuition of potential infinity is an epistemological obstacle to get over. Even so, it might be an excessive requirement to make such epistemological rupture from the early school mathematics, since the concept of actual infinity is not intuitive, derives many paradoxes, and cannot offer any proper metaphor.

* **Key Words** : actual infinity(실무한), potential infinity(가무한), epistemological rupture(인식론적 단절), epistemological obstacle(인식론적 장애)

논문접수: 2008. 9. 23
논문수정: 2008. 11. 10
심사완료: 2008. 11. 17