

근사모델 및 성공확률을 이용한 강건설계

송병철*, 이권희#

A Robust Design Using Approximation Model and Probability of Success

Byoung-Cheol Song*, Kwon-Hee Lee#

ABSTRACT

Robust design pioneered by Dr. G. Taguchi has been applied to versatile engineering problems for improving quality. Since 1980s, the Taguchi method has been introduced to numerical optimization, complementing the deficiencies of deterministic optimization, which is often called the robust optimization. In this study, the robust optimization strategy is proposed by considering the robustness of objective and constraint functions. The statistics of responses in the functions are surrogated by kriging models. In addition, objective and/or constraint function is represented by the probability of success, thus facilitating robust optimization. The mathematical problem and the two-bar design problem are investigated to show the validity of the proposed method.

Key Words : Robust design(강건설계), Robust optimization (강건최적설계), Probability of success(성공확률), Kriging(크리깅)

1. 서 론

강건설계(robust design)의 개념은 1980년대 후반 다구찌와 Phadke 등에 의해 미국 현장 기술자들에게 소개.전파되면서 널리 알려지기 시작하였다. 특히 다구찌의 강건설계 기법은 자동차, 전기.전자, 품질 공학 분야 등의 현장에 널리 적용되었다. 뿐만 아니라, 다구찌의 강건설계의 개념은 수치적 최적설계 분야에서도 설계 시 존재하는 불확실성을 고려하기 위해 강건최적설계(robust optimization)란 주제로 많은 연구가

진행되어 오고 있다^[1].

강건최적설계의 연구분야에서 가장 해결하기 힘든 것은 강건성을 정의하는 지표에 대한 수치적인 계산이다. 강건성 지표로 사용될 수 있는 성능함수의 변동계산은 주로 다음의 세 가지 방법으로 수행된다. 첫째, 성능함수의 테일러급수를 1차까지 전개하여 분산 근사식을 사용하는 경우이다. 이는 민감도를 구하기 쉬운 문제에는 효율적이지만 민감도기반(gradient-based) 최적설계 알고리즘과 연계할 경우 이계미분의 정보가 필요하다. 또한 이 방법은 국부적인 강건해를 찾을 수 밖에 없는 단점이 있다. 따라서 국부해를 많이 가지고 있는 비선형성(nonlinearity)이 큰 함수에서는 전역적 강건해를 찾을 수가 없다.

두 번째는 몬테칼로 시뮬레이션을 이용하는 방법인

* 동아대학교 대학원 기계공학과
교신저자 : 동아대학교 기계공학부
E-mail : leekh@donga.ac.kr

데 이는 매우 정확하지만 함수계산이 고가인 문제에는 적용하기 어렵다. 따라서 성능의 변동을 구하기 위해 몬테칼로 시뮬레이션 방법을 최적화 알고리즘과 연계하기는 불가능하다. 마지막으로 직교배열표 등의 실험계획법을 이용하는 경우이다. 이는 몬테칼로 시뮬레이션보다 덜 정확한 반면 함수계산 횟수는 훨씬 줄일 수 있다. 그러나 이 방법 역시 설계프로그램과 연계시키기가 어렵다.

그 이외의 연구들은 고유한 강건성 지수를 개발하여 강건해를 찾고자 하였다. 그러나 이들 역시 강건해를 구하는 과정에 이계미분이 필요하거나 실제 통계량과 비교적 큰 오차를 수반할 수 밖에 없는 한계가 있다. 또한 기존의 강건최적설계에 대한 연구들에서는 국부강건해를 찾을 수밖에 없는 단점이 있다^[2].

본 연구에서는 기존 연구의 한계를 극복하기 위해 근사모델과 성공확률을 가지고 강건설계를 위한 정식화를 정의하고자 한다. 여기서 근사모델이라 함은 임의 반응치의 평균과 분산의 통계량에 대한 크리깅 근사모델을 의미한다. 성공확률은 반응치가 정규분포를 따른다는 가정 하에서 계산된다. 즉 성공확률은 정규분포의 확률밀도함수를 설계영역구간에서 적분한 값이다. 따라서 성공확률을 계산하기 위해서는 반응치의 평균 및 분산의 통계량 정보를 알아야 하는데, 이 역시 크리깅 근사모델^[3-5]을 이용하여 구해진다. 이때 반응치의 통계량에 대한 근사모델은 순차적 크리깅 모델에 의해 구성된다^[2].

순차적 크리깅 모델이란 초기의 크리깅 근사모델에서 정칙점(stationary point)과 평균제곱오차(mean squared error)가 최대로 되는 점들을 찾아 기존의 표본점에 추가하여 구해진 근사모델을 의미한다. 여기서 함수의 극점은 강건성이 크고, 평균제곱오차의 최대점은 초기의 크리깅 모델을 개선시킬 가능성이 큰 설계점이기 때문에 표본점에 추가함으로써 보다 신뢰성 있는 함수를 예측하기 위해서이다.

대부분의 강건설계 문제는 반응치의 평균 및 분산으로 구성되는 다중목적함수로 정의된다. 그러나 다중목적함수의 이용은 반응치의 평균 및 분산의 트레이드오프를 통해서 해를 산출하는 것으로서 강건성을 직접적으로 대표하지는 못한다. 본 연구에서는 설계 성공확률을 정의함으로써 강건성을 직접 측정하였다. 이 최적화문제는 DOT에 내재된 순차이차계

획법(SQP) 및 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘을 이용하여 해결하고, 전 설계영역에서 국부강건해를 찾기 위해 초기치를 변경하여 반복 수행하였다.

제시된 방법의 검증을 위하여 수확함수 및 이부제(2-bar) 설계문제^[2]에 적용하여 그 결과를 검토하였다.

2. 강건성의 정의 및 통계량의 산출

2.1 강건성의 정의^[2]

반응치 함수 $f(\mathbf{x})$ 가 설계변수 \mathbf{b} 의 불확실성 및 파라미터 \mathbf{p} 의 불확실성으로 인해 분포를 갖는다고 가정해 보자. 즉 $\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 또는 $\mathbf{x}=[\mathbf{b} \ \mathbf{p}]$ 이다. 이 때, 강건성은 반응치 함수 $f(\mathbf{x})$ 의 평균 μ 및 분산 σ^2 의 통계량으로 측정할 수 있다. 최적설계의 관점에서는 다음과 같은 다중목적함수로 표현 할 수 있다.

$$\text{Minimize } [(\mu - m_r)^2, \sigma_r^2] \quad (1)$$

$$\text{Subject to } \mathbf{b}_L - \Delta \mathbf{b} / 2 \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{b}_U + \Delta \mathbf{b} / 2 \quad (2)$$

여기서 m_r 는 반응치의 목표값, \mathbf{b}_L 은 설계하한값, \mathbf{b}_U 는 설계상한값, $\Delta \mathbf{b}$ 는 공차를 표시한다. 식 (1)의 m_r 는 망대특성(larger-the-better type characteristics)에서는 ∞ , 망소특성(smaller-the-better type characteristics)에서는 $-\infty$ 에 해당한다.

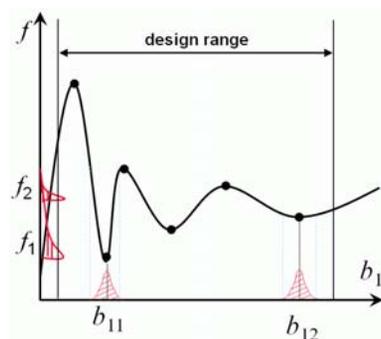


Fig. 1 Distribution of multi-modal function

기존의 연구는 식 (1)-(2)로 구성되는 다중목적함수를 해결하려는 시도였다. 이때 강건해를 구하기 위해 민감도기반 최적화 알고리즘을 이용하면 국부해를

찾을 수밖에 없게 된다. 반응치 함수가 단조함수 (monotonic function)인 문제에서는 원하는 강건해를 찾을 수 있지만 Fig. 1과 같이 비선형성이 큰 비단조 함수에서는 전역적 강건해(global robust optimum)를 찾는 것을 보장할 수 없다. 즉, 분산을 최소화하기 위해 식 (3)과 같은 근사 분산식을 이용한다고 가정하자.

$$\sigma_f^2 \cong \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (3)$$

여기서 n 은 변수의 수, $\bar{\mathbf{x}}$ 은 변수벡터의 평균, $\sigma_{x_i}^2$ 은 변수 x_i 의 분산을 표시한다.

Fig. 1에서 점으로 표시된 모든 설계점은 식 (3)에 의하면 모두 0의 분산을 갖는다. 그러나 b_{12} 이 Fig. 1과 같은 분포를 갖는다면 실제로는 b_{12} 가 가장 작은 분산 σ_f^2 을 갖고 있다. 따라서 식 (3)을 이용할 때는 반응치 함수의 비선형성이 크지 않고 $\sigma_{x_i}^2$ 가 작다는 가정 하에서만 타당하다. 그러나 이런 경우는 강건설계가 필요하지 않은 문제이므로 강건설계를 위해 식 (3)을 사용한다는 것은 모순이 될 수 있다. 본 연구에서는 제안한 방법을 통하여 목표값 주위에서 b_{12} 를 구하고자 하는 것이다.

2.2 성공확률

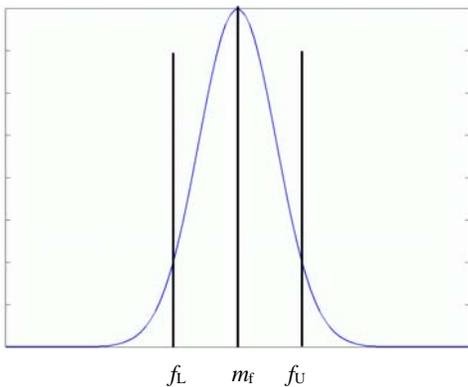


Fig. 2 Probability of success

본 연구에서는 설계 성공확률을 정의함으로써 강건성을 직접 측정하고자 하였다. 성능함수가 정규분

포라고 가정하였을 경우, 성공확률은 Fig. 2와 같이 표시할 수 있다. 이를 수식으로 표시하면 다음과 같다.

$$P_s = \int_{f_L}^{f_U} \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(f - \mu_f)^2}{2\sigma_f^2} \right] df \quad (4)$$

여기서 f_L 및 f_U 는 각각 반응치의 허용하한값 및 허용상한값을 표시한다. 따라서 망대특성에서는 f_U 는 ∞ , 망소특성에서는 f_L 이 $-\infty$ 가 된다. 반면에 반응치의 목표값이 있는 문제에서 f_U - f_L 는 설계 허용범위에 해당된다. 확률밀도함수에서 평균 μ_f 및 분산 σ_f^2 은 크리깅 근사모델로 대체될 것이다.

또한 식 (4)는 오차함수로 표시하면 식 (5)와 같다.

$$P_s = \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{f_U - \mu_f}{\sigma_f \sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{f_L - \mu_f}{\sigma_f \sqrt{2}} \right) \quad (5)$$

본 연구에서는 식 (5)를 이용하여 성공확률을 계산하였다. 즉, 식 (1)의 다중목적함수 대신에 식 (3) 또는 식 (4)로 표시되는 성공확률을 최대화함으로써 강건설계를 구현할 수 있다.

2.3 통계량의 산출

식 (4) 또는 식 (5)에 포함된 μ_f 및 σ_f^2 를 직접 구하는 것은 일반적으로 불가능하므로 반응함수 f 의 근사모델을 가지고 산출한다. 통계량 μ_f 및 σ_f^2 에 대한 근사식은 테일러급수의 2차항 까지를 고려하면 다음과 같다^[2].

$$\mu_f \cong f(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right)_{\bar{\mathbf{x}}} \sigma_{x_j}^2 \quad (6)$$

$$\sigma_f^2 \cong \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\bar{\mathbf{x}}}^2 \sigma_{x_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\bar{\mathbf{x}}}^2 (\sigma_{x_i}^2)(\sigma_{x_j}^2) \quad (7)$$

여기서 성능함수 $f(\mathbf{x})$ 가 신뢰도 있는 크리깅모델로 대체된다면, 식 (6), (7)의 계산은 큰 부담이 되지 않는다.

크리깅 내삽법에 관한 내용은 참고문헌 [2-5]에 자세히 수록되어 있다. 반응함수 $f(\mathbf{x})$ 의 크리깅 근사모델은 다음과 같이 표시된다.

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \hat{\beta} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \hat{\beta}\mathbf{q}) \quad (8)$$

여기서 \mathbf{y} 는 n_s 개의 표본점에서의 $f(\mathbf{x})$ 값이고, \mathbf{q} 는 단위벡터, $\hat{\beta}$ 는 상수, \wedge 는 추정치를 의미한다. 그리고 상관행렬 \mathbf{R} 및 상관벡터 \mathbf{r} 은 다음과 같이 정의된다.

$$R(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k) = \text{Exp}\left[-\sum_{i=1}^n \theta_i |x_i^j - x_i^k|^2\right] \quad (9)$$

($j=1, \dots, n_s, k=1, \dots, n_s$)

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = [R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}), R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(2)}), \dots, R(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(n_s)})]^T \quad (10)$$

식 (9)의 파라미터 θ_i 는 다음으로부터 구해진다.

$$\text{maximize } -\frac{[n_s \ln(\hat{\sigma}^2) + \ln|\mathbf{R}|]}{2}, (\theta_i > 0) \quad (11)$$

본 연구에서는 식 (11)을 풀기 위해 DOT의 순차이차계획법을 이용하였다. 식 (8)에서 \mathbf{R} 은 n_s 가 증가함에 따라 수치적으로 불안정(ill-conditioning)하여 역행렬이 구해지지 않을 때가 있다. 이때는 변수 \mathbf{x} 의 설계영역을 스케일링 하여 해결할 수 있다.

식 (8)로 구해진 근사모형을 평가하기 위해서 다음 세 개의 평가지수를 계산하였다.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} (f_i - \hat{f}_i)^2} \quad (12)$$

$$MAXERR = \text{MAX}[|f_i - \hat{f}_i|, i=1, 2, \dots, n_t] \quad (13)$$

$$\text{Ave. \% error} = \frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} \left| \frac{\hat{f}_i - f_i}{f_i} \right| \times 100 \quad (14)$$

여기서 n_t 는 실험점의 수이다.

반응함수의 일계미분 및 이계미분 값은 크리깅 근사모형에 대해 다음과 같이 결정된다^[2].

$$\frac{\partial \hat{f}(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{r}^T(\mathbf{x})}{\partial x_i} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{f} - \hat{\beta}\mathbf{q}), \quad i=1, \dots, m \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{f}(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}^T(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{f} - \hat{\beta}\mathbf{q}), \quad i, j=1, \dots, m \quad (16)$$

여기서

$$\frac{\partial \mathbf{r}^T(\mathbf{x})}{\partial x_i} = [-2\theta_i(x_i - x_i^1)A^1, -2\theta_i(x_i - x_i^2)A^2, \dots, -2\theta_i(x_i - x_i^{n_s})A^{n_s}] \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}^T(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} = [(-2\theta_i(x_i - x_i^1))(-2\theta_j(x_j - x_j^1))A^1, \dots, (-2\theta_i(x_i - x_i^{n_s}))(-2\theta_j(x_j - x_j^{n_s}))A^{n_s}] \quad (i \neq j) \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}^T(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} = [-2\theta_i A^1(1 + 2\theta_i(x_i - x_i^1)^2), -2\theta_i A^2(1 + 2\theta_i(x_i - x_i^2)^2), \dots, -2\theta_i A^{n_s}(1 + 2\theta_i(x_i - x_i^{n_s})^2)] \quad (i = j) \quad (19)$$

$$A^k = \text{Exp}[-\theta_1((x_1 - x_1^k)^2) - \dots - \theta_m((x_m - x_m^k)^2)] \quad (20)$$

따라서 크리깅 근사모형을 기초로 하여 식 (6), (7)의 통계량을 계산할 수 있고 이 값들에 의해 설계성공률을 식 (5)를 구할 수 있다.

2.4 순차적 크리깅 모델

본 연구에서는 초기 크리깅 모델의 개선을 위하여 초기 표본점에 두 가지 방법으로 표본점을 추가함으로써 보다 신뢰도 높은 메타 모델을 구성하였다. 먼저 식 (21)–(22)와 같이 평균제곱오차(mean squared error)를 최대화하는 설계점을 추가하였다^[6].

$$\text{Maximize}_{\mathbf{x}} \quad t^2 = s^2 \left[1 - \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} + \frac{(1 - \mathbf{q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r})^2}{\mathbf{q}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{q}} \right] \quad (21)$$

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad (22)$$

다음 방법으로는 초기의 크리깅 근사모형에서 모든 정칙점을 찾아 표본점에 추가 시켰다. 이를 위한 정식화는 다음과 같다.

$$\text{Minimize} \quad \left\| \nabla \hat{f}(\mathbf{x}) \right\| \quad (23)$$

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \text{with } \mathbf{x}_o^k \quad (k=1, \dots, n_k) \quad (24)$$

여기서 \mathbf{x}_o^k 는 초기 설계점이고 n_k 는 부여된 초기 설계 점의 수이다. 크리깅 모델에서 표본점의 함수값은 오차가 영이므로 그 근방에서 또한 오차가 매우 작다. 단, 다음 조건을 만족해야 표본점에 추가된다.

$$\|\mathbf{x}^{new_i} - \mathbf{x}^j\| \geq \varepsilon', \quad (i=1, \dots, n_n, \quad j=1, \dots, n_s) \quad (25)$$

$$\|\mathbf{x}^{new_i} - \mathbf{x}_i^{new_j}\| \geq \varepsilon', \quad (i=1, \dots, n_n, \quad j=1, \dots, n_n) \quad (26)$$

여기서 n_n 은 추가될 표본점의 수이고, \mathbf{x}^{new_j} 는 새로 추가될 표본점, $\mathbf{x}_i^{new_j}$ 는 i 표본점을 제외한 새로 추가될 표본점, ε' 는 임의의 작은 수이다. 즉 기존의 표본점과 식 (21)-(24)에 의해 추가될 표본점이 매우 근접해 있는 경우는 추가될 표본점으로부터 제외된다.

3. 예제 및 검토

3.1 수학적문제

다음과 같은 최적화문제를 생각해 보자.

Minimize

$$f(\mathbf{X})=2+0.01(x_2-x_1)^2+(1-x_1)^2+2(2-x_2)^2+7\sin(0.5x_1)\sin(0.7x_1 \cdot x_2) \quad (27)$$

$$0 \leq x_1, x_2 \leq 3 \quad (28)$$

원함수의 함수 등고선을 Fig. 3(a)에 표시하였다. 이 함수는 2개의 최소점과 1개의 극대점을 가지고 있다.

이것을 Table 1에 표시하였다. Table 2는 라틴하이퍼큐브(Latin hypercube)에 의해 생성된 30개의 표본점으로 구해진 식 (27)의 크리깅모델에 대한 평가를 정리한 것이다. 또한 식 (21)-(26)에 의해 정의된 4개의 표본점을 추가하여 34개의 표본점을 갖고 순차적 크리깅 모델을 구성하였다. 식 (12)-(14)에 의해 오차를 산출한 결과 $n_s=34$ 인 모델이 $n_s=30$ 인 모델에 비해 각 오차가 크게 줄었음을 알 수 있다.

Table 1 Stationary points of Eqs. (27) and (28)

point	x_1, x_2	$f(\mathbf{x})$
A	0.176, 1.972	2.866
B	1.221, 2.377	5.935
C	2.504, 2.578	-1.456

Table 2 Validations of kriging models (math.)

n_s	RMSE	MAXERR	Ave.% error
\hat{f} 30	0.142	0.666	12.145
34	0.078	0.436	3.737

Table 4 Robust optimum of Eqs. (29)-(31)

Case	x_1^*, x_2^*	$\hat{\mu}$	μ	$\hat{\sigma}$	σ
Eq.(29)	0.186, 1.991	2.875	2.872	0.005	0.006
Eq.(30)	2.499, 2.591	-1.438	-1.440	0.019	0.022
Eq.(31)	0.186, 1.991	2.875	2.872	0.005	0.006

식 (27)-(28)에 대한 원함수 $f(\mathbf{x})$ 의 함수등고선을 Fig. 3(a)에, $n_s=34$ 의 크리깅모델을 Fig. 3(b)에 표시하

Table 3 Statistics using the first-order and second-order statistical approximation methods

statistics	local opt. A [0.176 1.972] ^T		local opt. B [1.221 2.377] ^T		local opt. C [2.504 2.578] ^T	
	value	% error	value	% error	value	% error
$\hat{\mu}$ (1 st)	2.8721	0.042	5.9351	0.062	-1.4523	0.771
$\hat{\mu}$ (2 nd)	2.8768	0.206	5.9315	0.002	-1.4373	0.271
$\hat{\sigma}$ (1 st)	0.0041	21.154	0.0016	77.778	0.0063	68.182
$\hat{\sigma}$ (2 nd)	0.0068	30.769	0.0075	0.417	0.0198	0.238
μ (true)	2.8709	-	5.9314	-	-1.4412	-
σ (true)	0.0052	-	0.0072	-	0.0198	-

였다. Fig. 4 및 Fig. 5는 실제함수 및 크리깅함수의 평균 및 분산 함수이다. 실제 함수의 평균 및 분산은 설계영역을 120×120 분할하여 각 설계점에서 20,000회의 몬테칼로 시뮬레이션을 통해 계산되었다. 그리고 크리깅 함수의 평균 및 분산은 식 (6)-(7)을 통해 구해졌다. 크리깅 근사모델의 등고선은 설계변수를 $[-1 \ 1]^2$ 로 스케일링하여 그려진 것이다.

한편 Table 3은 Fig. 3(a)의 설계점 A, B, C에서 평균 및 분산을 실제값과 비교한 것이다. 실제값은 20,000회의 몬테칼로 시뮬레이션을 통해 구해진 값이다. 설계점 B, C에서는 이계미분을 통해 구해진 평균 및 분산이 일계미분을 통해 구해진 값보다 오차가 훨씬 적음을 알 수 있다. 반면에 설계점 A에서는 일계미분에 의해 구해진 평균과 분산이 이계미분에 의해

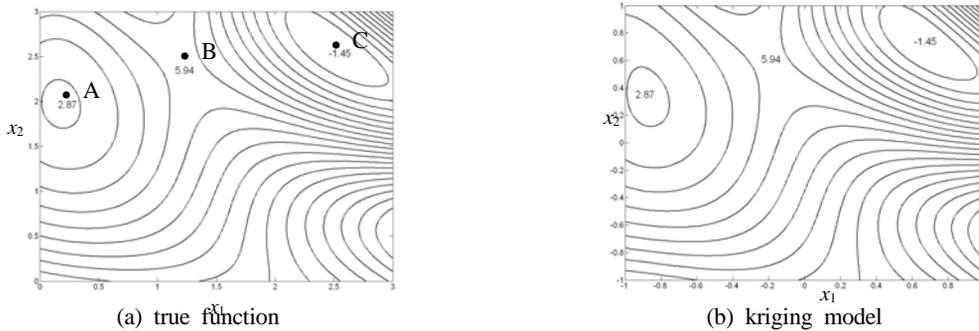


Fig. 3 Response function $f(x)$

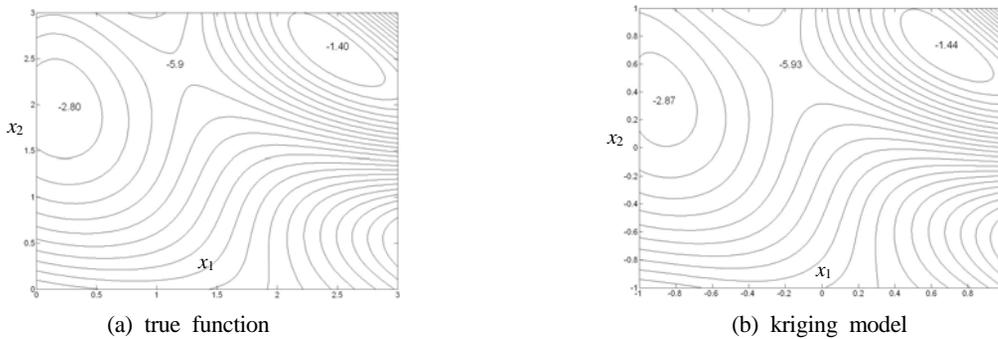


Fig. 4 Mean of $f(x)$

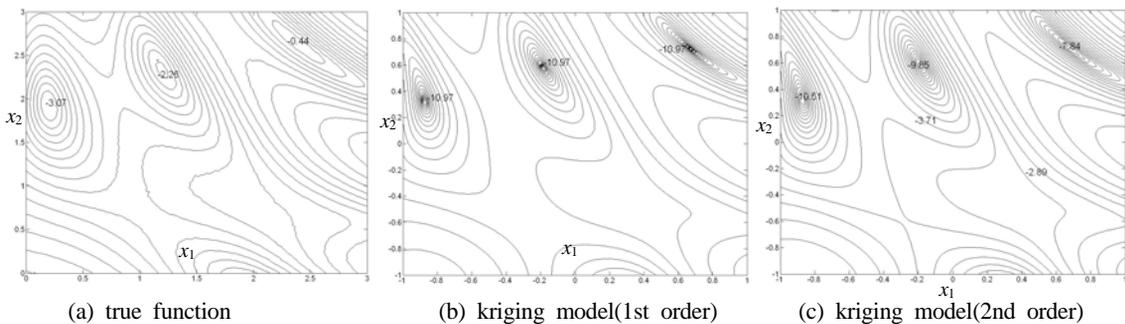


Fig. 5 Log transformed variance of $f(x)$

구해진 값보다 약간 우수함을 알 수 있는데, 이는 크리깅 모델의 오차로부터 기인된 것이라 할 수 있다.

다음은 식 (27)-(28)의 강건설계를 위하여 변형된 정식화를 나타낸다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \hat{\sigma}_f \\ & \text{Subject to } 0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \hat{\sigma}_f \\ & \text{Subject to } \Pr[\mu_f \leq 2.5] \geq 100\% \\ & \quad 0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \hat{\sigma}_f \\ & \text{Subject to } \Pr[\mu_f \leq 3.0] \geq 100\% \\ & \quad 0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 3 \end{aligned} \quad (31)$$

각 정식화로부터 구해진 강건해를 Table 4에 정리하였다. 식 (29)-(31)의 강건해 산출을 위해 시뮬레이터드 어닐링을 이용하였다.

3.2 이부재(2-bar) 설계 문제

이부재 설계문제^[2]는 Fig. 6과 같이 봉 단면의 지름 d , H 를 결정하는 문제이다. 즉 설계변수 $\mathbf{b}=[d \ H]$ 이고 파라미터 $\mathbf{p}=[d \ H \ B]$ 이다. 중량을 최소화하고 강도 및 좌굴을 고려한 최적설계 정식화는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } W \\ & \text{Subject to } S \leq S_{\max} \\ & \quad \quad \quad S \leq S_{\text{crit}} \\ & \quad 20\text{mm} \leq d \leq 80\text{mm}, \\ & \quad 200\text{mm} \leq H \leq 1000\text{mm}, \quad t = 2.5\text{mm} \\ & \quad W = 2\pi d t \rho \sqrt{B^2 + H^2}, \quad \rho = 7850\text{kg/m}^3 \\ & \quad S = \frac{P\sqrt{B^2 + H^2}}{2\pi d t H}, \\ & \quad S_{\text{crit}} = \frac{\pi^2 E d^2}{8(B^2 + H^2)}, \end{aligned} \quad (32)$$

여기서 W 는 중량, S 는 수직응력, S_{\max} 는 400MPa이고 $\Delta\mathbf{x}=[3.0\text{mm} \ 60.0\text{mm} \ 60.0\text{mm}]$, $\Delta x_i=6\sigma_{x_i}$ 라고 가정하였다. 또한 $\mu_B=750\text{mm}$ 이다.

식 (32)의 강건설계를 위한 정식화는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \mu_w \\ & \text{Subject to } \Pr[Y \leq 1] \geq P_0 \\ & \quad \quad \quad \Pr[Z \leq 1] \geq P_0 \end{aligned} \quad (33)$$

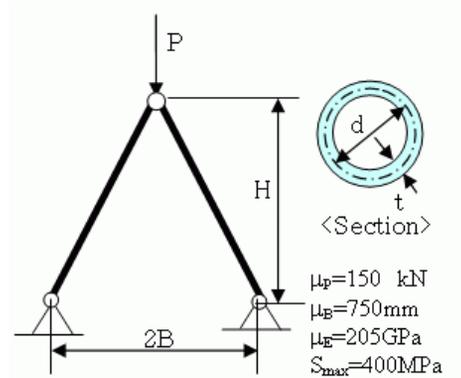


Fig. 6 Two-bar structure

Table 5 Validations of kriging models (2-bar structure)

	n_s	RMSE	MAXERR	Ave.% error
\hat{w}	50	0.007	0.053	0.094
	53	0.004	0.014	0.074
\hat{Y}	50	0.017	0.203	0.422
	53	0.001	0.153	0.390
\hat{Z}	50	0.071	0.964	2.668
	53	0.078	1.061	1.793

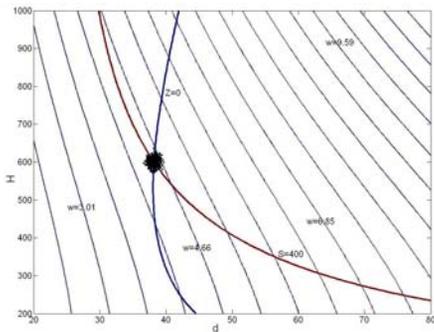
Table 6 Robust optimum of Eq. (33)

P_0	d^*, H^* (mm,mm)	w (kg)	$P.O.S.$ (%)
99.73	39.830, 608.790	4.744	99.6
99.90	39.994, 609.776	4.767	99.8
99.95	40.100, 610.419	4.782	100
100.00	41.554, 617.748	4.979	100

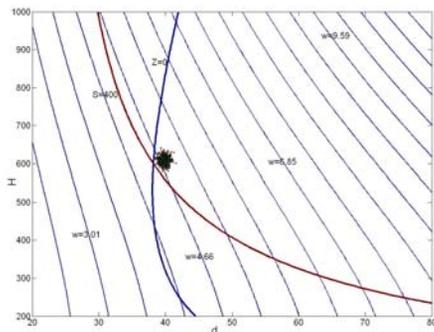
여기서 $Y=S/S_{\max}$, $Z=S/S_{\text{crit}}$ 의 새로운 확률변수이고 p_0 는 허용성공확률로서 본 예제에서는 99.90, 99.95%,

99.97%, 100%로 설정하여 강건해를 검토하였다.

식 (33)에서 치환된 반응치인 확률변수 Y , Z 및 중량 w 에 대한 크리깅 근사모델의 오차를 Table 5에 정리하였다. 각 크리깅 근사모델 평가를 위하여 시험점 500개를 이용하였다. 초기에는 라틴하이퍼큐브 방법에 의해 표본점 50개를 추출하여 크리깅 근사모델을 구성하였다. 그 다음 식 (21)-(22)의 순차표본에 의해 세 개의 반응치에 대해 각각 1개씩의 표본점을 추가하여 총 53개의 표본점을 정의하였다. 이 문제에서는 각 반응치가 설계영역에서 정칙점이 존재하지 않기 때문에 식 (23)-(24)로부터는 표본점이 추가 되지 않았다.



(a) conventional optimum



(b) robust optimum

Fig. 7 Two-bar structure

식 (33)의 강건해를 Table 6에 표시하였다. P_0 가 증가함에 따라 중량도 증가하며, 동시에 식 (33)에 제시된 제한조건을 만족시키는 성공확률(P.O.S.)도 높아짐을 알 수 있다. 여기서 성공확률은 각 강건해에서

500회의 몬테칼로 시뮬레이션에 의한 반응치를 갖고 계산된 값이다. 식 (32)의 일반최적해 및 허용성공확률이 99.73인 경우의 강건해에서의 분포를 Fig. 7에 표시하였다. 여기서 분포는 500회의 몬테칼로 시뮬레이션을 통해 구해졌다.

4. 결 론

본 연구에서는 성능함수의 평균 및 분산으로 구성되는 다중목적함수의 최적화가 가지는 단점을 설계 성공확률을 도입하고 강건설계의 정식화를 통해 해결하였다. 이 연구는 반응치의 분포가 정규분포라는 가정 하에서 전개되었다. 그러나 이 접근방법은 정규분포가 아닌 반응치를 갖는 문제에서도 강건해를 추정하는 데 효율적으로 사용된다. 이는 수학문제를 통하여 증명되었다.

이부재 설계에서는 허용성공확률을 변화시키면서 강건해를 검토하여 보았다. 이 허용성공확률은 안전율 개념을 갖고 있다. 향후과제로는 제시된 방법을 강건설계가 요구되는 MEMS 구조설계분야에 적용하고자 한다.

후 기

이 논문은 동아대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음

참고문헌

1. Lee, K. H. and Bang, I. K., 2006, "Robust Design of an Automobile Front Bumper Using Design of Experiments," *Journal of Automobile Engineering*, Vol. 220, No. 9, pp. 1199 - 1207.
2. Lee, K. H., Kang, D. H., 2006, "A Robust Optimization Using the Statistics Based on Kriging Metamodel," *J. of Mechanical Science and Technology*, Vol. 20, No. 8, pp. 1169-1182.
3. Sacks, J., Welch, W. J., Mitchell, T. J. and Wynn,

- H. P., 1989, "Design and Analysis of Computer Experiments," *Statistical Science*, Vol.4, No.4, pp. 409-435.
4. Guinta, A. and Watson, L., 1998, "A Comparison of Approximation Modeling Techniques: Polynomial Versus Interpolating Models," *Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMOSymposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, St. Louis, MO, AIAA, Vol.2, Sept.2-4, pp.392-440(AIAA-98-4758).
 5. Fang, Kai-Tai, Li, Runze and Sudjianto, Agus, 2006, *Design and Modeling for Computer Experiments*, Computer Science and Data Analysis Series
 6. Jin, R., Chen, W. and Sudjianto, A., 2002, "On Sequential Sampling for Global Metamodeling in Engineering Design," DAC-34092, *Proceedings of the 2002 ASME/IDETC Conferences*, Montreal, Quebec, Canada, Sep.29-Oct.2.