

후위순회 피보나치 원형군

김 용 석[†] · 유 명 기^{**}

요 약

본 논문에서는 새로운 병렬 컴퓨터의 위상인 후위순회 피보나치 원형군을 제안하고 그 성질들을 분석한다. 후위순회 피보나치 원형군은 같은 크기의 노드 개수를 갖는 피보나치 큐브와 비교해서 지름은 $n-2$ 에서 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 으로 개선되었고 비대칭적인 위상에서 노드 대칭적인 위상이 되었다. 그리고 피보나치 큐브를 스페닝 그래프로 갖는다.

키워드 : 상호 연결망, 지름, 피보나치 수, 원형군, 피보나치 큐브

Postorder Fibonacci Circulants

Yong-Seok Kim[†] · Myung-Gi Roo^{**}

ABSTRACT

In this paper, We propose a new parallel computer topology, called the Postorder Fibonacci Circulants and analyze its properties. It is compared with Fibonacci cubes, when its number of nodes is kept the same of comparable one. Its diameter is improved from $n-2$ to $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ and its topology is changed from asymmetric to symmetric. It includes Fibonacci cube as a spanning graph.

Keyword : Interconnection Networks, Diameter, Fibonacci Number, Circulants, Fibonacci Cubes

1. 서 론

최근 컴퓨터 제조 기술의 눈부신 발전과 더불어 보다 높은 성능을 요구하는 응용분야에 적합한 컴퓨터 개발의 필요성이 날로 증대하고 있으며, 이러한 필요성은 여러개의 프로세서들을 상호 연결하여 처리하는 병렬컴퓨터로 발전하고 있다. 특히 대규모 프로세서들을 사용하여 구성이 가능한 메시지 전달 방식의 다중 컴퓨터가 선호되고 있다[1]. 이러한 다중 컴퓨터에서 각 프로세서들을 연결하기 위해 상호 연결망이 사용되고 있는데 이는 전체 시스템의 성능을 결정하는데 중요한 역할을 한다. 따라서 지금까지 다수의 상호 연결망이 제안되고 연구되어져 왔다. 이들 중 가장 널리 알려져 있고 사용되고 있는 것 중의 하나가 하이퍼큐브이다. 그리고 이러한 하이퍼큐브의 대안들 중 하나인 피보나치큐브는 피보나치 수에서 영감을 얻은 새로운 상호 연결망으로서 계층적 구조와 배열, 특정 형태의 메쉬와 트리 그리고 하이퍼큐브를 직접 임베딩할 수 있고 지름과 연결도가 하이퍼큐브와 비슷한 복잡도를 갖는다[2].

본 논문에서는 대칭적이고 최대 연결도를 갖는 원형군 그래프에서 그래프 임베딩과 관련하여 같은 노드 개수를 갖는 피보나치 트리에 후위순회 방법으로 각 노드에 번호매김하여 얻어진 에지번호들의 집합을 점프열로 이용한 후위순회 피보나치 원형군을 제안한다. 여기에서 원형군 그래프는 Harary가 신뢰성이 높은 통신망을 설계하는 최적화 문제인 “ n 개의 노드와 e 개의 에지를 가지면서 연결도가 최대인 그래프를 구성하라”하는 문제를 원형군 그래프에 속하는 그래프를 제시함으로써 해결하였는데, 그가 제시한 그래프를 Harary 그래프라고 부른다[3]. 원형군 그래프는 상당히 대칭적인 구조를 가지고 있어서 여러 분야에서 많이 응용되고 있다. $C_n(j_1, j_2, \dots, j_k)$ 로 표기하는 원형군 그래프는 N 개의 노드 $\{0, 1, \dots, N-1\}$ 를 가지고 있으며, 임의의 두 노드 v, w 에 대해서 $v + j_i \equiv w \pmod{N}$, $1 \leq i \leq k$ 를 만족하는 j_i 가 존재할 때 v, w 를 잇는 에지가 있다. 이때 각각의 j_i 를 점프라고 하고 이러한 점프들의 집합을 점프열이라고 한다.

또한 방송은 상호 연결망을 위한 가장 기본적인 데이터 통신기법이며 병렬 알고리즘을 설계하는데 있어서 가장 기본이 되는 작업으로 한 프로세서에 있는 메시지를 네트워크에 있는 다른 모든 프로세서들에게 보내는 과정을 말한다.

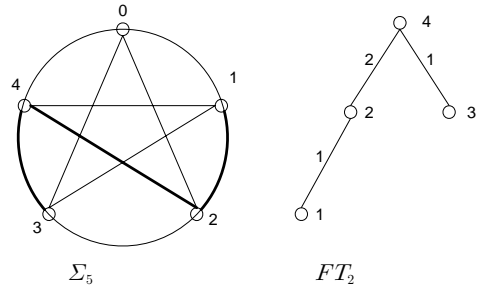
[†] 정 회 원 : 서남대학교 컴퓨터정보통신학과 교수
^{**} 정 회 원 : 서남대학교 컴퓨터정보통신학과 박사수로
 논문접수 : 2007년 3월 2일, 심사완료 : 2007년 7월 2일

그리고 방송전략의 효율성은 적용되는 통신모델에 달려있고 프로세서가 동시에 사용 가능한 통신링크의 수에 따라서 단일포트 모델과 다중포트 모델로 나눌 수가 있다. 첫 번째로 단일포트 모델에서는 한 프로세서가 단위 시간에 인접한 하나의 프로세서에게 메시지 한 개를 전송할 수가 있다. 그리고 그래프 G 의 노드 v 에서 방송시간은 $b(v)$ 로 표기하고, 이는 노드 v 에서 시작한 방송을 완료하는데 필요한 최소 단위시간이라고 하면, 각 단위시간 동안 메시지를 가지고 있는 노드의 수는 많아야 두배씩 증가하므로, N 개의 노드를 가지는 그래프 G 의 임의의 노드 v 에서의 방송시간 $b(v) \geq \lceil \log_2 N \rceil$ 이다. N 개의 노드를 가지는 그래프 G 의 임의의 노드 v 에서의 방송시간 $b(v)$ 가 $\lceil \log_2 N \rceil$ 이면 이는 단일포트 모델에서 최소방송시간이며 최소방송시간을 갖는 방송을 최적방송이라고 한다. 또한 루트에서 시작하여 최적방송이 가능한 트리를 최적방송트리라 한다. 두 번째로 하드웨어 기술이 발전함에 따라 도입되는 다중포트 모델에서는 한 프로세서가 단위시간에 인접한 여러개의 프로세서에게 메시지들을 동시에 전송할 수 있다. 즉, 한 프로세서가 인접한 $\alpha-1$ 개의 프로세서에게 메시지를 동시에 전송한다고 가정하는 $(\alpha-1)$ -포트 통신모델에서 각 단위시간동안 메시지를 가지고 있는 노드의 수는 많아야 α 배씩 증가하므로, N 개의 노드를 가지는 그래프 G 의 임의의 노드 v 에서의 방송시간 $b(v) \geq \lceil \log_\alpha N \rceil$ 이다. N 개의 노드를 가지는 그래프 G 의 임의의 노드 v 에서의 방송시간 $b(v)$ 가 $\lceil \log_\alpha N \rceil$ 이면 이는 $(\alpha-1)$ -포트 모델에서 최소방송시간이며 최소방송시간을 갖는 방송을 최적방송이라고 한다. 또한 루트에서 시작하여 최적방송이 가능한 트리를 최적방송트리라 한다[3-5].

그리고 그래프 임베딩문제는 병렬 컴퓨터 네트워크들 사이에 있어서의 시뮬레이션하는 등의 응용분야에서 제기되는 문제이다. 일반적인 그래프들 사이의 임베딩 문제는 매우 어려운 문제이고 임베딩 방법들은 임베딩하려는 그래프의 특성에 따라 여러가지 기법들을 동원하고 있는데 그 중 어떤 그래프가 다른 그래프의 부분 그래프인지를 확인해 보는 번호매김에 의한 방법도 하나의 전형적인 방법으로 주어진 제약조건을 만족하도록 그래프의 정점이나 에지에 번호를 할당하는 문제로 표현하는 것이다[6-7]. 현재까지는 대부분 응용 분야와 관련되어 잘 알려진 특별한 그래프들 사이의 임베딩이 주로 다루어져 왔다. 임베딩 문제가 다루어진 그래프들로서는 하이퍼큐브, 메쉬, 이진트리, 이항트리, 피보나치 트리 등 병렬 컴퓨터의 위상으로 제시된 그래프들과 자료구조에서 자주 쓰이는 그래프 등이 있다. 예를 들면 하이퍼큐브와 채귀원형군에 대한 임베딩 문제가 있고 완전 이진트리와 이항트리는 4-에지번호매김이 가능함이 밝혀졌다[9,12,13].

그러므로 그래프 임베딩 문제와 관련된 후위순회 에지 번호매김 방법은 최적방송트리인 피보나치 트리에 후위순회 에지번호 매김을 하여생긴 에지번호들을 대칭적이면서 최대 연결도를 갖는 상호 연결망의 일종인 원형군 그래프의 점프

열로 사용하면 스페닝 트리로 피보나치 트리를 갖는 새로운 상호연결망을 설계할 수 있다. 임의의 피보나치 트리에 대한 후위순회 에지번호 매김은 피보나치 트리의 노드에 1에서 노드의 개수까지의 서로 다른 정수를 부여하는데 에지번호가 모두 $f_0=0, f_1=1$ 그리고 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, n \geq 2$ 이 된다는 조건을 만족하는 것이다. 여기에 에지번호는 에지에 인접한 두 정점에 할당된 정수의 차로 정의된다. 이러한 예가 (그림 1)에 있다. 본 논문에서 제안한 n 차원 후위순회 피보나치 원형군은 n 차원 후위순회 피보나치 여큐브와 n 차원 후위순회 피보나치 부분군의 집합으로 이루어졌고 이때 n 차원 후위순회 피보나치 부분군은 두개의 $n-2$ 차원 후위순회 피보나치 부분군과 한 개의 $n-3$ 차원 후위순회 피보나치 부분군으로 이루어졌다. 0차원 후위순회 피보나치 원형군은 공집합이고 1차원 후위순회 피보나치 원형군은 하나의 노드를 갖는다[8,10,11].



(그림 1) f -에지번호 매김의 예

본 논문에서는 후위순회 피보나치 원형군을 병렬 컴퓨터의 위상으로 이용하기 위한 연구를 하였다. 먼저 2장에서는 후위순회 피보나치 원형군의 정의 및 성질, 3장에서는 지름, 4장에서는 방송 그리고 5장에서는 결론 및 차후 연구과제에 대해 기술한다.

2. 후위순회 피보나치 원형군의 정의 및 성질

임의의 자연수는 피보나치 수들의 합으로 유일하게 표현할 수 있다.[Zeckendorf의 정리]. $\alpha \cdot \beta$ 를 문자열 α 와 문자열 β 의 집합에 의한 스트링이라고 가정하고 λ 를 공백문자열이라고 하면 $\lambda \cdot \alpha = \alpha \cdot \lambda = \alpha$ 라고 정의한다. 이를 일반화하여 만약 F 가 문자열들의 집합이라고 하면 $\alpha \cdot F = \{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in F\}$ 이다. 그리고 $F_n, n \geq 2$ 을 n 차원 후위순회 피보나치 코드들의 집합이라고 하고 $|F_n|$ 을 집합 F_n 의 전체 원소의 개수라고 하면 $|F_n| = f_n, n \geq 2$ 이다. 그러므로 F_n 은 $\{a_1, a_2, \dots, a_f\}$ 이고 이들 원소들 중에서 a_f 을 제외한 나머지 원소들로 이루어진 n 차원 후위순회 피보나치 코드들의 집합은 \overline{F}_n 으로 표현한다.

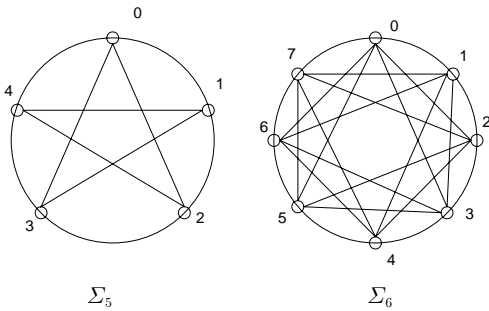
정의 1 (n 차원 후위순회 피보나치 코드): F_n 을 $n-2$ 개의

비트를 갖는 n 차원 후위순회 피보나치 코드들의 집합이라고 가정하면 $F_2=\{\lambda\}$, $F_3=\{0,1\}$ 과 $F_n=(00 \cdot F_{n-2}) \cup (01 \cdot \overline{F_{n-2}}) \cup (10 \cdot F_{n-2})$, $n \geq 4$ 이다.

(예1) 5차원과 6차원의 후위순회 피보나치 코드들의 집합:
 $F_5=(00 \cdot F_3) \cup (01 \cdot \overline{F_3}) \cup (10 \cdot F_3)=(000,001) \cup (010) \cup (100,101)$
 $F_6=(00 \cdot F_4) \cup (01 \cdot \overline{F_4}) \cup (10 \cdot F_4)=(0000,0001,0010) \cup (0100,0101) \cup (1000,1010)$

정의 2 (n 차원 후위순회 피보나치 원형군): Σ_n 을 그래프 $G=(V,E)$ 이라고 하면 $V_n = \{0, 1, \dots, f_n - 1\}$ 과 $E_n = \{(v,w) \mid v + f_i \equiv w \pmod{f_n}, 2 \leq i \leq n - 2\}$ 이다.

앞의 정의들을 임의의 정수인 $N \geq 1$ 에 적용할 수 있지만 그래프의 크기를 피보나치 수라고 하면 Σ_n 은 재귀적인 구조를 가지고 알고리즘을 설계할 때 더욱 유용할 수 있다. 그리고 (그림 2)에 Σ_n 의 예가 있다.

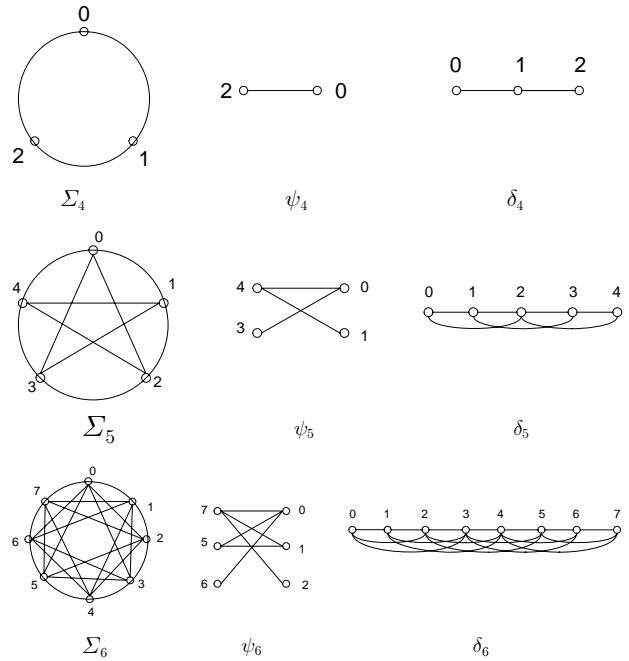


(그림 2) Σ_n 의 예

Σ_n 은 전체 노드의 개수가 f_n 이므로 피보나치 수의 성질 $f_n=2 \cdot f_{n-2}+f_{n-3}$ 을 이용하여 각 노드들을 f_{n-2} 개의 노드를 갖는 2 개의 $n-2$ 차원의 후위순회 피보나치 부분군과 f_{n-3} 개의 노드를 갖는 1 개의 $n-3$ 차원의 후위순회 피보나치 부분군으로 분리할 수 있고 n 차원 후위순회 피보나치 여큐브와 n 차원 후위순회 피보나치 부분군의 합집합이 Σ_n 이 된다. 이러한 예가 (그림 3)에 있다.

정의 3 (n 차원 후위순회 피보나치 여큐브): $\psi_n, n \geq 4$ 을 그래프 $G=(V_n', E_n')$ 이면 $V_n' = V_{n_1} \cup V_{n_2} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \cup \{c_1, c_2, \dots, c_n\} = \{0, 1, \dots, f_{n-2} - 1\} \cup \{f_{n-1}, f_{n-1} + 1, \dots, f_n - 1\}$ 이고 $E_n' = \{(b_i, c_j) \mid b_i + a_k \equiv c_j, 1 \leq i \leq n - 3, 1 \leq k \leq n - (i + 2)\}$, $a_n = c_n = \{f_{n-1}, f_{n-1} + 1, \dots, f_n - 1\}$ 이다.

정의 4 (n 차원 후위순회 피보나치 부분군): $\delta_n, n \geq 4$ 을 그래프 $G=(V_n, E_n)$ 이면 $V_n = \{0, 1, \dots, f_n - 1\}$ 이고 $E_n = \{(i, j) \mid i + f_k \equiv j \pmod{f_n}, 2 \leq k \leq n - 2\} = E_n - E_n'$ 이다.



(그림 3) Σ_n, ψ_n 과 δ_n 의 예

소정리 1 $\delta_n = (V_n, E_n')$, $n \geq 4$ 에서 $LOW(n)$ 은 $\{0, 1, \dots, f_{n-2} - 1\}$, $MID(n)$ 은 $\{f_{n-2}, f_{n-2} + 1, \dots, f_{n-1} - 1\}$ 그리고 $HIGH(n)$ 은 $\{f_{n-1}, f_{n-1} + 1, \dots, f_n - 1\}$ 의 노드들의 집합으로 이루어진 부그래프이고 1) $LOW(n) \cong \delta_{n-2}$, 2) $MID(n) \cong \delta_{n-3}$ 와 3) $HIGH(n) \cong \delta_{n-2}$ 이다.

증명) $n=4$ 인 경우에 후위순회 피보나치 코드들의 집합은 정의 1에 의해 $LOW(4)=(00 \cdot F_2)=\{00\}$, $MID(4)=(01 \cdot \overline{F_2})=\{01\}$ 과 $HIGH(4)=(10 \cdot F_2)=\{10\}$ 이다. 그러므로 $LOW(4) \cong \delta_2$, $MID(4) \cong \delta_1$ 과 $HIGH(4) \cong \delta_2$ 이다. $n \leq k$ 인 경우에 $LOW(k) \cong \delta_{k-2}$, $MID(k) \cong \delta_{k-3}$ 과 $HIGH(k) \cong \delta_{k-2}$ 가 성립한다고 가정하면 $n = k + 1$ 인 경우에는 $00 \cdot F_{k-1}$ 는 $LOW(k+1)$ 에서의 노드 번호들의 집합, $01 \cdot \overline{F_{k-1}}$ 은 $MID(k+1)$ 에서의 노드 번호들의 집합이고 $10 \cdot F_{k-1}$ 는 $HIGH(k+1)$ 에서의 노드 번호들의 집합이다. 그리고 임의의 두 노드 번호 i, j 사이의 에지를 (i, j) 라고 하면 $(i, j) \in \delta_{k-1}$ 는 $(i, j) \in LOW(k+1)$ 의 필요충분조건이다. 그 이유는 $(i, j) \in \delta_{k-1}$ 이라고 한다면 i, j 는 F_{k-1} 의 원소이고 $(i, j) \in LOW(k+1)$ 인 경우에는 $LOW(k+1)$ 는 F_{k-1} 에 접두사 '00'을 가지므로 $(i, j) \in \delta_{k-1}$ 이면 $(i, j) \in LOW(k+1)$ 이고 $(i, j) \in LOW(k+1)$ 이면 $(i, j) \in \delta_{k-1}$ 이다. 그러므로 $LOW(k+1) \cong \delta_{k-1}$ 이다. 마찬가지로 $(i, j) \in \delta_{k-2}$ 는 $(i, j) \in MID(k+1)$ 의 필요충분조건이다. 왜냐하면 $(i, j) \in \delta_{k-1}$ 이라고 한다면 i, j 는 $\overline{F_{k-2}}$ 의 원소이고 $(i, j) \in MID(k+1)$ 에서 $MID(k+1)$ 는 $\overline{F_{k-2}}$ 에 접두사 '01'을 가지므로 $(i, j) \in \delta_{k-2}$ 이면 $(i, j) \in$

MID(k+1)이고 $(i, j) \in \text{MID}(k+1)$ 이면 $(i, j) \in \delta_{k-2}$ 이다. 그러므로 $\text{MID}(k+1) \cong \delta_{k-2}$ 이다. 그리고 $(i, j) \in \delta_{k-1}$ 는 $(i, j) \in \text{HIGH}(k+1)$ 의 필요충분조건이다. 그 이유는 $(i, j) \in \delta_{k-1}$ 이라고 한다면 i, j 는 F_{k-1} 의 원소이고 $(i, j) \in \text{HIGH}(k+1)$ 인 경우에는 $\text{HIGH}(k+1)$ 는 F_{k-1} 에 접두사 '10'을 가지므로 $(i, j) \in \delta_{k-1}$ 이면 $(i, j) \in \text{HIGH}(k+1)$ 이고 $(i, j) \in \text{HIGH}(k+1)$ 이면 $(i, j) \in \delta_{k-1}$ 이다. 그러므로 $\text{HIGH}(k+1) \cong \delta_{k-1}$ 이다. ■

δ_n 은 두 개의 δ_{n-2} 와 한 개의 δ_{n-3} 으로 분할할 수 있다. 이와 같은 분할은 재귀적으로 이루어지고 이러한 성질들은 다른 형태의 그래프들이나 부분구조를 유도해 내는데 유용하며 분할정복 알고리즘의 형식적인 기반이 되기도 한다. 본 논문에서는 두 가지의 분할 소정리를 제안하고 서로 공유하는 부분이 없는 직교분할을 \cup 라고 표현한다.

소정리 2 $\delta_n, 3 \leq k \leq n$ 은 다음과 같은 분할을 갖는다.

- a) $\delta_n \cong (f_k \cdot \delta_{n-k+1} \cup f_{k-1} \cdot \delta_{n-k})$
- b) $\delta_n \cong (f_{n-k+1} \cdot \delta_k \cup f_{n-k} \cdot \delta_{k-1})$

증명) a) (n, k) 의 귀납법에 의해서 $k=3$ 일 경우 $\delta_n \cong (f_3 \cdot \delta_{n-2} \cup f_2 \cdot \delta_{n-3})$ 이므로 소정리 1에 의해서 두 개의 δ_{n-2} 와 하나의 δ_{n-3} 으로 분할되므로 성립한다. $n \leq N, k \leq K, 3 \leq K \leq N$ 일 때 참이라고 가정하면 $n=N+1$ 이고 $k=K+1$ 일 경우는 δ_{N+1} 은 두 개의 δ_{N-1} 과 하나의 δ_{N-2} 로 분할된다. 가정에 의해서 δ_{N-1} 은 f_{K-1} 개의 $\delta_{(N-1)-(K-1)+1}$ 과 $f_{(K-1)-1}$ 개의 $\delta_{(N-1)-(K-1)}$ 로 분할된다. δ_{N-2} 은 f_{K-2} 개의 $\delta_{(N-2)-(K-2)+1}$ 과 $f_{(K-2)-1}$ 개의 $\delta_{(N-2)-(K-2)}$ 로 분할된다. 그러므로 $2 \cdot \delta_{N-1} \cup \delta_{N-2}$ 는 $(2 \cdot \delta_{K-1} + f_{K-2})\delta_{N-K+1} \cup (2 \cdot f_{K-2} + f_{K-3})\delta_{N-K}$ 이므로 $f_{K+1} \cdot \delta_{N-K+1} \cup f_K \cdot \delta_{N-K}$ 가 된다.

b)의 경우도 같은 방법으로 증명된다. ■

(그림 4)에서와 같이 δ_6 의 예를 들면 $8=f_6 = f_3 \cdot f_4 + f_2 \cdot f_3 = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2$ 이고 δ_6 은 2개의 δ_4 와 1개

의 δ_3 으로 분할된다. 2 개의 δ_4 에서는 두 개의 노드들의 집합 $\{0, 1, 2\}$ 와 $\{5, 6, 7\}$ 로 이루어지고 이들은 3 개의 δ_3 로 나눌 수 있는데 여기에서 각 δ_3 는 두 개의 δ_4 각각으로 부터 하나의 노드를 취하여 만들어진다. 즉 $\{0, 7\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}$ 로 분할된다. 이때 각 부분군들은 첫 번째 부분군과 두 번째 부분군으로부터 하나 이상의 노드를 공유하지 않는 직교 분할이 된다. 마찬가지로 1 개의 δ_3 를 2 개의 δ_2 로 재분할할 수 있다. 그리고 두 개의 δ_4 의 각각과 하나의 δ_3 를 하나의 슈퍼노드(또는 동등집합)이라고 하고 이들을 서로 연결하여 에지를 추가하면 $\delta_6/3 = \delta_4$ 가 된다.

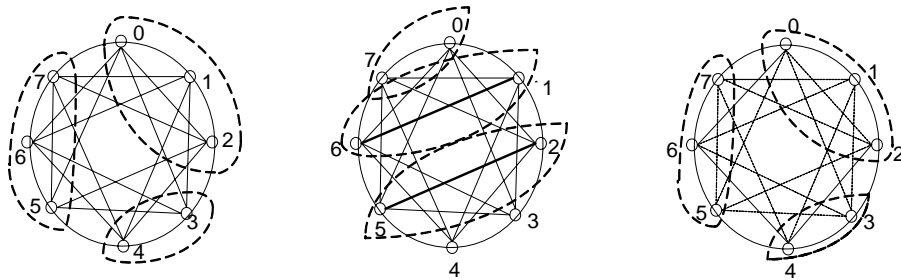
소정리 3 $\delta_n, n \geq 1$ 은 다음이 성립한다.

- 1) $\delta_{2n} \cong (\delta_1 \cup \delta_3 \cup \dots \cup \delta_{2n-1})$
- 2) $\delta_{2n+1} \cong (\delta_2 \cup \delta_4 \cup \dots \cup \delta_{2n})$
- 3) $\delta_{n+2} \cong (\delta_1 \cup \delta_2 \cup \dots \cup \delta_n)$

증명) 1) 피보나치 성질 $f_{2n} = \sum_{0 \leq k \leq n-1} f_{2k+1}$ 에 의해서 $n=1$ 일 경우 $f_2 = f_1$ 이므로 성립한다. $n=i$ 일 경우 참이라고 가정하면 $n=i+1$ 일 경우에는 $f_{2(i+1)} = \sum_{0 \leq k \leq i} f_{2k+1} = f_1 + f_3 + \dots + f_{2(i-1)+1} + f_{2i+1} = f_{2i} + f_{2i+1} = f_{2i+2}$ 이므로 k 가 0에서 $i-1$ 까지는 $n=i$ 일 때의 값 f_{2i} 가 되고 k 가 i 일 경우는 f_{2i+1} 이 되므로 두 항을 더하면 $f_{2(i+1)}$ 가 되므로 항상 성립한다.

2) 피보나치 성질 $f_{2n+1} = \sum_{1 \leq k \leq n} f_{2k+1}$ 에 의해서 $n=1$ 일 경우 $f_3 = f_2 + 1$ 이므로 성립한다. $n=i$ 일 경우 참이라고 가정하면 $n=i+1$ 일 경우에는 $f_{2(i+1)+1} = \sum_{1 \leq k \leq i+1} f_{2k+1} = f_2 + \dots + f_{2i} + f_{2(i+1)+1} = (f_2 + f_4 + \dots + f_{2i}) + 1 + f_{2(i+1)} = f_{2i+1} + f_{2i+2} = f_{2(i+1)+1}$ 이 된다. 그러므로 항상 성립한다.

3) 피보나치 성질 $f_{n+2} = \sum_{1 \leq k \leq n} f_k + 1$ 에 의해서 $n=1$ 일 경우 $f_3 = f_1 + 1$ 이므로 성립한다. $n=i$ 일 경우 참이라고 가정하면 $n=i+1$ 일 경우에는 $f_{(i+1)+2} = \sum_{1 \leq k \leq i+1} f_k + 1 = f_1 + \dots + f_i + f_{i+1} + 1 = (f_1 + f_2 + \dots + f_i) + 1 + f_{i+1} = f_{i+2} + f_{i+1} = f_{(i+1)+2}$ 이 된다. 그러므로 항상 성립한다. ■



1) f_3 개의 δ_4

2) f_4 개의 δ_3

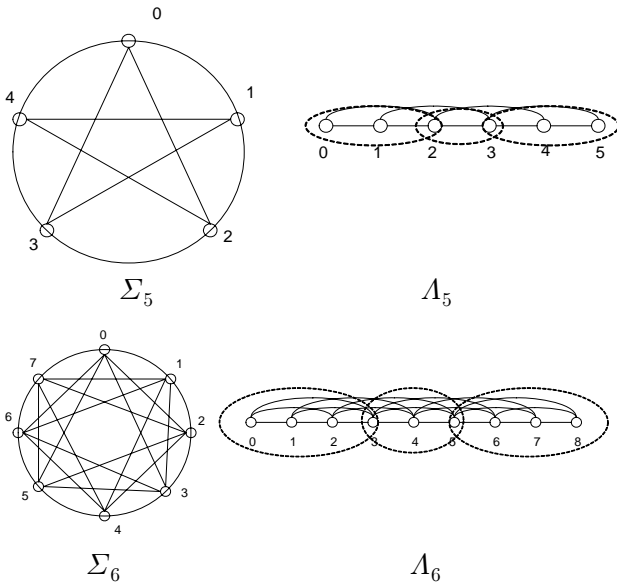
3) $\delta_6/3 = \delta_4$

(그림 4) δ_6 에서의 분할

3. 지름

Σ_n 에서 노드번호 0을 노드번호 f_n 으로 분리하여 서로 같은 노드라고 가정하고 수직선상의 양쪽 끝에 위치시켜 선형적으로 나열한 n 차원 후위순회 피보나치 선형군을 아래와 같이 정의한다.

정의 5 (n 차원 후위순회 피보나치 선형군, A_n): A_n 을 그래프 $G=(V, E)$ 라고 하면 $V_n = \{0, 1, \dots, f_n\}$ 이고 $E_n = \{(i, j) \mid i + f_k \equiv j (j \leq f_n), 2 \leq k \leq n-2\}$ 이다.



(그림 5) A_n 의 예

소정리 4 Σ_n 의 에지수는 $(n-3) \cdot f_n$ 이다.

증명) $|E_n|$ 을 Σ_n 의 에지의 개수라고 하면 $|E_1|=|E_2|=0, |E_n|=1$ 이다. 만약 $n \leq k$ 인 경우에는 $|E_n|=(n-3) \cdot f_n, k \leq 4$ 가 성립한다면 $n=k+1$ 인 경우에는 정의 3에서 Σ_{k+1} 의 점프열 $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-2}\}$ 이므로 전체에지의 개수는 $(k-2) \cdot f_{k+1}$ 이 된다. 그러므로 항상 $(n-3) \cdot f_n$ 이 성립한다. ■

그래프에서 임의의 노드 i 의 분지수는 노드 i 에 인접한 에지의 개수이다.

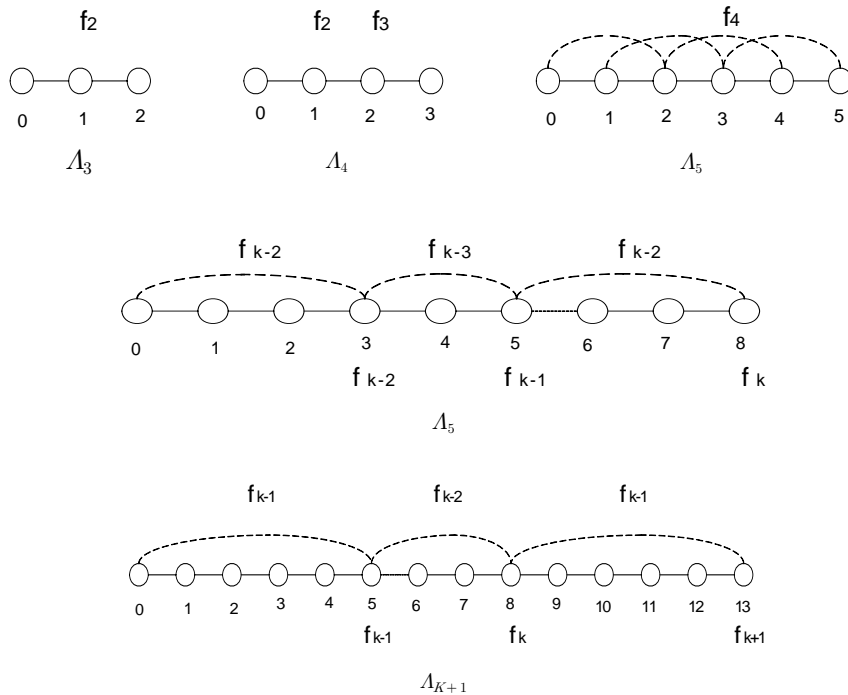
소정리 5 $d_{n(i)}$ 를 Σ_n 에서 노드 i 의 분지수라고 하면 $d_{n(i)}=2(n-3)$ 이다.

증명) 정의 3에서 Σ_n 은 $(n-3)$ 개의 점프를 갖는다. 그러므로 각 노드에서는 시계방향의 에지와 반시계 방향의 에지를 합한 $2(n-3)$ 개의 에지를 갖는다. ■

그래프 G 에서 임의의 두 노드 i 와 j 사이의 피보나치 거리 $dist(i, j)$ 를 i 와 j 를 연결하는 최단 경로상의 에지의 개수라고 하면 지름은 임의의 두 노드 사이에서의 거리들 중 최대값 $dia(G)=max_{i, j \in v(G)} dist(i, j)$ 을 말한다.

소정리 6 $A_n, n \geq 3$ 에서 $f_i, i \leq n$ 크기의 구간에서의 지름을 $dia(A_n : f_i)$ 라고 하면 $dia(A_n : f_{n-1})=dia(A_{n+1} : f_{n-1})$ 이다.

증명) (그림 6)에서와 같이 A_3 에서 $dia(A_3 : f_2)=dia(A_4 : f_2)=1, A_4$ 에서 $dia(A_4 : f_3)=dia(A_5 : f_3)=1$ 이고 A_5 에서 $dia(A_5 : f_4)$



(그림 6) A_n 에서의 지름

$=dia(A_k : f_k) = 1$ 이다. 만약 $n < k, k \geq 6$ 인 경우 $dia(A_k : f_{k-1}) = dia(A_{k+1} : f_{k-1})$ 이 성립한다고 가정하면 $n = k + 1$ 인 경우에는 $A_k = A_{k-2} \cup A_{k-3} \cup A_{k-2} = A_{k-1} \cup A_{k-2}$ 이면 점프열은 $\{f_2, f_3, \dots, f_{k-2}\}$ 이고 $A_{k+1} = A_{k-1} \cup A_{k-2} \cup A_{k-1}$ 이면 점프열은 $\{f_2, f_3, \dots, f_{k-1}\}$ 이다. A_k 에서 노드번호 0과 노드번호 f_k 가 같으므로 최대 점프값 f_{k-2} 을 이용하면 $dist(0, f_{k-1}) = dist(f_k, f_{k-1}) = 1$ 이고 A_{k+1} 에서는 최대 점프값이 f_{k-1} 이므로 $dist(0, f_{k-1}) = 1$ 이 된다. 그러므로 $dia(A_k : f_{k-1}) = dia(A_{k+1} : f_{k-1})$ 가 성립한다. ■

소정리 7 A_n 에서 $dia(A_n : f_n) = dia(A_n : f_{n-1}) = 1 + dia(A_{n-3} : f_{n-3})$ 이다.

증명) $dia(A_1 : f_1) = dia(A_2 : f_2) = 0$ 이므로 $dia(A_3 : f_3) = dia(A_3 : f_2) = 1 + dia(A_0 : f_0) = 1$, $dia(A_4 : f_4) = dia(A_4 : f_3) = 1 + dia(A_1 : f_1) = 1$, $dia(A_5 : f_5) = dia(A_5 : f_4) = 1 + dia(A_2 : f_2) = 1$ 이 된다. $n < k, k \geq 7$ 일 경우 $dia(A_n : f_n) = dia(A_n : f_{n-1}) = 1 + dia(A_{n-3} : f_{n-3})$ 이 성립한다고 가정하면 $n = k + 1$ 일 경우에는 $A_{k+1} = A_{k-1} \cup A_{k-2} \cup A_{k-1}$ 이고 최대점프값은 f_{k-1} 이므로 $dia(A_{k+1} : f_{k+1}) = dia(A_{k+1} : f_k) = 1 + dia(A_{k-2} : f_{k-2})$ 가 된다. ■

정리 1 $\Sigma_n, n \geq 2$ 의 지름은 즉 $dia(\Sigma_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이다.

증명) $dia(A_3 : f_3) = dia(A_4 : f_4) = dia(A_5 : f_5) = 1$ 이고

$n < k, k \geq 6$ 인 경우에는 $dia(A_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이 성립한다고 가정하면 $n = k + 1$ 인 경우에는 소정리 6과 7에 의해 $dia(A_{k+1} : f_{k+1}) = dia(A_{k+1} : f_k) = 1 + dia(A_{k-2} : f_{k-2})$, $dia(A_{k+2} : f_{k+2}) = dia(A_{k+2} : f_{k+1}) = 1 + dia(A_{k-1} : f_{k+3})$, $dia(A_{k+3} : f_{k+3}) = dia(A_{k+3} : f_{k+2}) = 1 + dia(A_k : f_k)$ 이다. 그러므로 $dia(A_n : f_n) = dia(\Sigma_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이 성립한다. ■

4. 통신

통신의 형태에서 일대일(one-to-one)통신은 라우팅(routing)이라고도 하며 임의의 한 출발지 노드가 메시지를 다른 하나의 목적지 노드에게 보내는 것을 말한다. 그리고 일대다(one-to-all)통신은 일반적으로 말하는 방송(broadcasting)이며 임의의 한 출발지 노드에서 똑같은 메시지를 다른 모든 노드들에게 보내는 것을 말한다. 또한 방송은 LU-분할과 같은 다양한 선형대수 알고리즘들에도 사용되며 데이터 베이스 질의나 이행적 폐쇄(transitive closure)알고리즘에도 사용된다.

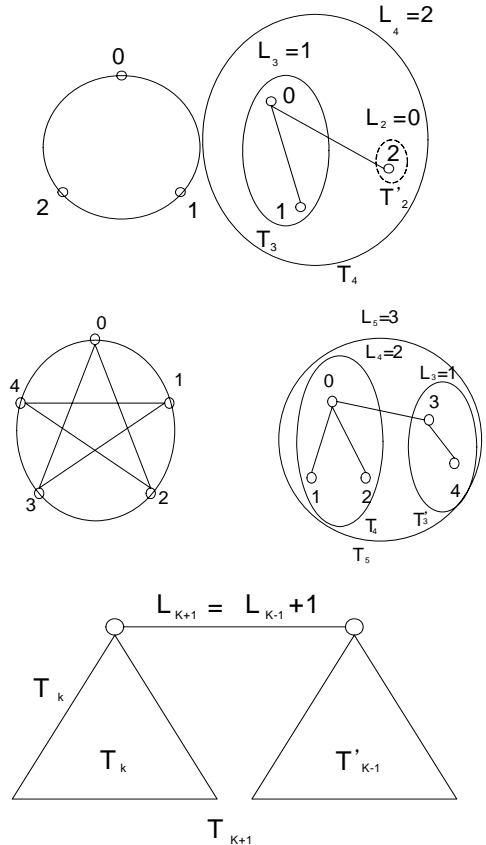
소정리 8 Σ_n 에서 임의의 두 노드들 사이의 일대일 통신은 많아야 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 단계에 수행되고 이것은 최적이다.

증명) 정리 1에서 Σ_n 의 임의의 두노드들 사이의 최단거

리 중에서 최대값인 지름은 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 단계가 필요하다. ■

소정리 9 (방송) 각 노드는 한 단계에 하나의 에지 위에서 전송 또는 수신한다고 가정하면 임의의 한 노드에서 다른 모든 노드들에게 메시지를 전송하는 방송은 Σ_n 에서 $n - 2$ 단계에 수행되고 이것은 최적이다.

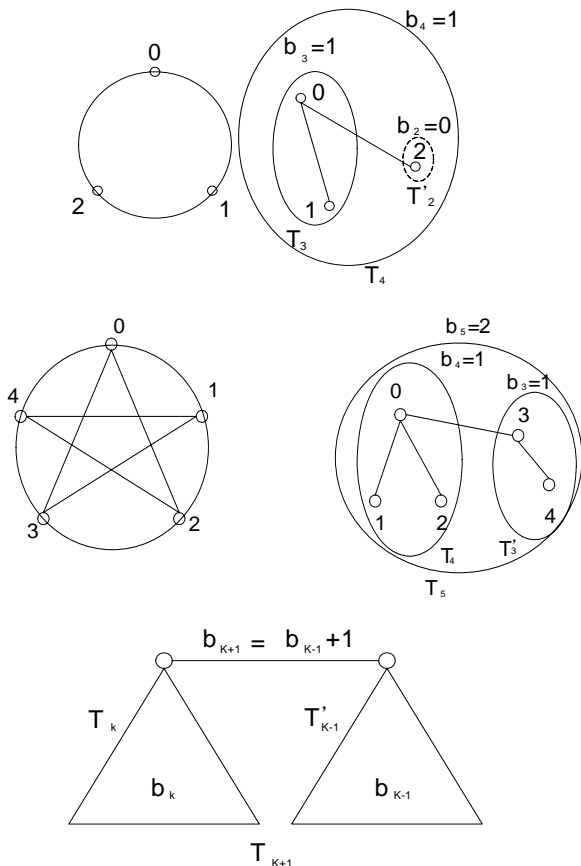
증명) Σ_n 에서 l_n 을 메시지를 전송하는데 필요한 단계의 수라고 하면 Σ_n, Σ_n 과 Σ_n 에서는 노드의 개수가 1이므로 $l_1 = l_2 = 0$, 그리고 $l_3 = 1$ 이 된다. 그리고 $n \leq k, k \geq 4$ 인 경우 $l_k = MAX\{l_{k-1} + 1, l_{k-2}\} = k - 2$ 가 성립한다고 가정하면 $n = k + 1$ 인 경우에 T_{k+1} 은 Σ_{k+1} 의 스텔링 트리이고 T_k 와 $T'_{k-1} (\cong T_{k-1})$ 을 부트리로 갖는다. 그리고 노드번호 0는 T_{k+1} 의 루트노드이고 동시에 T_k 의 루트노드가 된다. 만약 루트노드번호 0에서 모든 노드들에게 메시지를 전송한다면 먼저 인접한 T'_{k-1} 의 루트노드에게 메시지를 전송하고 다시 반복적으로 T_k 와 T'_{k-1} 에서 각각 동시에 인접한 노드에 메시지를 전송한다. 이때 항상 l_k 가 l_{k-1} 보다 크고 T_k 의 루트노드에서 인접한 T'_{k-1} 의 루트노드에 메시지를 전달한 후 T_k 에 메시지를 전달하므로 Σ_{k+1} 에서의 단계수는 항상 $l_k + 1$ 이 된다. 그러므로 Σ_n 의 $l_n = n - 2$ 가 성립한다. ■



(그림 7) Σ_n 에서의 방송(한 노드는 하나의 에지에 송수신)

소정리 10 Σ_n 의 임의의 한 노드에서 인접한 모든 에지들에게 동시에 전송 또는 수신이 가능하다면 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 단계에 수행되고 이것이 최적이다.

증명) Σ_n 의 임의의 한 노드에서 인접한 모든 에지들에게 동시에 보내는 방송 단계수를 b_k 이라고 한다면 Σ_1, Σ_2 과 Σ_3 에서는 노드개수가 1이므로 $b_1 = b_2 = 0$, 그리고 $b_3 = 1$ 이다. 그리고 $n \leq k, k \geq 4$ 인 경우에 $b_k = \text{MAX}\{b_{k-1}, b_{k-2} + 1\} = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ 이라고 가정하면 $n = k + 1$ 인 경우에 T_{k+1} 은 Σ_{k+1} 의 스페닝 트리이고 T_k 와 $T'_{k-1} (\cong T_{k-1})$ 을 부트리로 갖는다. 그리고 노드번호 0는 T_{k+1} 의 루트노드이고 동시에 T_k 의 루트노드가 된다. 만약 루트노드번호 0에서 모든 노드들에게 메시지를 전송한다면 먼저 인접한 T'_{k-1} 의 루트노드와 동시에 T_k 의 루트노드에 인접한 모든 노드들에게 메시지를 전송한다. 이때 항상 b_k 와 b_{k-1} 은 항상 같거나 1 차이가 난다. 만약 1 차이가 날 경우는 T_k 와 T'_{k-1} 의 루트노드들 사이에 인접한 에지가 있으므로 b_k 가 T_{k+1} 의 방송단계수가 되고, 같은 경우에도 $b_k + 1$ 이 됨을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 Σ_{k+1} 의 방송 단계수는 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 이 된다. ■



(그림 8) Σ_n 에서의 방송(한 노드는 인접한 모든 에지에 송수신)

5. 결 론

상호 연결망 중 가장 널리 알려진 하이퍼큐브의 대안으로 제안된 피보나치 큐브는 같은 크기의 노드 개수를 갖는 하이퍼큐브에 비해 1/5 정도의 작은 에지 수를 갖지만 비슷한 복잡도를 가짐에도 불구하고 노드의 분지수가 서로 다른 비정규형이고 비대칭적이다. 모든 노드의 분지수가 같은 연결망을 정규 연결망이라고 하고 노드 대칭성은 라우팅에서 노드 밀집도를 줄이는 요인이 되고 상호 연결망으로 병렬 컴퓨터를 설계할 때 모든 노드가 같은 역할을 수행하므로 한 가지 종류의 처리기만 있으면 된다. 그리고 분지수는 주어진 연결망으로 병렬 컴퓨터를 설계할 때 처리기의 핀 수나 라우팅 제어논리의 복잡도를 결정하는 요인이 된다. 그리고 지름은 연결망 전체에 정보를 전파하는데 드는 지연시간의 하한값이다. 본 논문에서 제안한 Σ_n 는 Γ_n 와 같은 크기의 노드 개수를 갖는 경우에 지름을 비교해 보면 Σ_n 은 $(n-2)$ 이고 Γ_n 은 $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 이다, 그리고 Γ_n 는 Σ_n 의 스페닝 부그래프로 직접 임베딩된다. 반면에 분지수는 Γ_n 는 $\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor \sim (n-2)$ 이고 Σ_n 은 $(n-2)$ 가 되므로 정규형으로 되면서 늘어난 단점이 있다.

참 고 문 헌

- [1] F. T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: arrays, trees, hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, California, 1992.
- [2] W.-J. Hsu, "Fibonacci cubes-A new Interconnection Topology," IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, vol. no. 1, Jan., 1993.
- [3] E. Horowitz and S. Sahni, Fundamentals of Computer Algorithms. Rckville, MD: Computer Science Press, 1978, pp. 188-191.
- [4] 박 정흠, 좌 경룡, "재귀원형군과 하이퍼큐브의 임베딩", 정보과학회논문지, 제22권, 제12호, pp.1763-1741, 1995.
- [5] 최 정, 이 형욱, 임 형석, "완전삼진트리의 재귀원형군에 대한 임베딩", 한국정보과학회 논문지, 제26권, 제3호, pp.380-388, 1998.
- [6] 임 형석, 그래프의 번호매김과 그의 응용, 이학박사 논문, 한국과학기술원, 1993.
- [7] 김 용석, "그래프 임베딩과 관련된 이항트리에서의 Q-에지 번호매김에 관한 연구," 전자공학회 논문지 제42권, CI 제1호, 2005, pp.27-34.
- [8] J.-S. Liu and W.-J. Hsu, "On embedding rings and meshes in Fibonacci cubes," Tech Rep. CPS-91-01, Michigan State Univ., Jan., 1990.

- [9] S. N. Bhatt, F. R. K. Chung, F. T. Leighton, and A. L. Rosenberg, "Efficient embeddings of trees in hypercubes," SIAM J. Compt. 21 (1992) pp.151-162.
- [10] F. R. K. Chung, "On optimal linear arrangement of tree," Comput. Math. Appl. 10 (1984) pp.43-60.
- [11] W.-J. Hsu, "Fibonacci cubes-A new computer architecture for parallel processing," Tech. Rep. CPS-90-04, Michigan State Univ., Oct., 1990.
- [12] W.-J. Hsu and J.-S. Liu, "Fibonacci codes as formal languages," Tech. Rep. CPS-91-04, Michigan State Univ., May, 1990.
- [13] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, "Special numbers," in Concrete Mathematics. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989, ch. 6.



김용석

e-mail : yskinsky320@naver.com

1987년 전남대학교 계산통계학과
(이학사)

1989년 전남대학교 전산통계학과
(이학석사)

1997년 전남대학교 전산통계학과
(이학박사)

1992년~현 재 서남대학교 컴퓨터정보통신학과 교수
관심분야: 계산이론(알고리즘, 그래프 이론), 병렬처리,
상호연결망, 임베딩



유명기

e-mail : jirisan2080@hanmail.net

1987년 2월 전북대학교 사범대학
화학교육과(학사)

2001년 8월 서남대학교 교육대학원
전자계산교육전공(석사)

2005년 2월 서남대학교 대학원
컴퓨터정보통신학과 박사수료

관심분야: 전자계산이론, 상호연결망