

유동방향 국소격자를 이용한 비격자법의 대류항에 관한 수치도식

정성준*, 이병혁*, 박종천†*

부산대학교 조선해양공학과*

Meshless Advection using Flow Directional Local Grid

Sung-Jun Jung*, Byung-Hyuk Lee* and Jong-Chun Park†*

Dept. of Naval Architecture and Ocean Engineering, Pusan National University*

Abstract

In this paper an accurate and stable gridless method that can be applied to multi-dimensional convection problems is developed on a flow directional local grid. A two dimensional pure convection problem is calculated and more accurate and stable solution is obtained compared with other schemes in grid method. The tested numerical schemes include 1st-order upwind scheme, 2nd-order Leith scheme, 3rd-order MUSCL, and QUICK scheme. It is seen that more accurate results are expected when the schemes combined with a MMT control limiter.

*Keywords: Gridless method(비격자법), Flow directional local grid(유동방향 국소격자), Weight function(가중치 함수), High accurate scheme(고정확도 도식), Convective equation(대류방정식)

1. 서론

지금까지 컴퓨터를 이용한 유동 해석에 있어서 유한요소법, 유한차분법, 혹은 유한체적법과 같은 격자를 이용한 수치해석 방법이 가장 널리 사용되어 왔다. 하지만 복잡한 물체형상이나 복잡한 물리현상을 포함하는 문제에 있어서는 이러한 격자법을 적용하는 것에 한계가 있다. 격자법은 복잡한 문제들에 있어서 격자의 특성에 많은 영향을

받으며, 정도 높은 격자를 생성하는데 많은 시간과 노력을 필요로 한다. 반면 비격자법은 격자를 생성할 필요가 없어 이러한 문제들에 보다 유용하다고 할 수 있다. 따라서 격자를 사용하지 않는 수치기법이 이러한 문제들에 보다 유용하다고 할 수 있는데, 격자를 사용하지 않는 수치 기법은 크게 두 가지로 분류할 수 있다. 하나는, 라그랑지(Lagrangian) 근사로서, SPH법(Monaghan 1983)과 MPS법(Koshizuka and Oka 1996) 등이며, 다른 하나는, 오일러(Eulerian) 근사의 비격자법(Batina 1993)이다. 이들 비격자(Gridless)법은 계산점의 자유로운 배치와 계산 도중 계산점의 추가

접수일: 2007년 7월 31일, 승인일: 2008년 2월 3일

†교신저자: jcpark@pusan.ac.kr, 051-510-2480

와 삭제가 용이하여 복잡형상에 대한 적용성이 높다. 하지만 후자의 오일러 근사법에 기초한 비격자법은 최소제곱법으로 물리량 보간을 하기 때문에 대류항의 계산에 수치 점성이 크게 나타나는 단점이 있다.

본 논문에서는 Yoon et al.(1999)이 제안한 유동방향으로의 국소격자 생성 기법을 이용하여 오일러 근사법에 기초한 비격자법에서 다차원의 대류 문제에 적용할 수 있는 수치도식을 개발하였다. 그 결과를 격자법과 비교·검증하였으며, 민감도 해석을 통해 본 수치도식에 어울리는 최적의 계산 조건을 제시하였다.

2. 수치 알고리즘

본 논문에서는 비격자법에서 대류항 계산을 위한 정확하고 안정적인 수치도식을 제안한다. 유동방향의 국소격자를 사용한 이 방법은 다음과 같은 네 단계로 이루어진다.

첫째, 각각의 계산점에서 유동방향으로 1차원의 국소격자를 생성한다. 대류항 계산에서 유체의 물리량은 유선을 따라 변화한다. 따라서 어떠한 다차원의 대류항 계산도 격자가 유동 방향을 따라 생성되어 있다면 1차원 문제로 가정할 수 있다. 각 계산점에서 유동속도에 따라 생성된 1차원 격자의 예가 Fig. 1에 나타나 있다. 국소격자점의 위치와 개수는 적용될 수치도식에 따라 정해진다. Fig. 1에서는 QUICK 도식이나 MUSCL 도식과 같이 상류에 2점, 하류에 1점의 국소 격자점을 사용한 예를 나타내었다.

각 계산점 (x,y) 에서의 유선의 방향은 그 점에서의 속도성분 (u,v) 에 의해 직접 계산이 되며, 가상의 국소 격자점은 유선의 방향에 따라 국소격자 간격(Δr)을 두고 생성된다. 또한 유선 방향에서의 가상의 수직격자들은 $ux + vy + c = 0$ 의 식에 의해 간단한 선형대수학 기법으로 비교적 용이하게 구할 수 있다. 여기서 상수 c 는 각 격자점의 좌표 대입에 의해 결정된다. 따라서 각 계산점에서의 유선의 방향과 그에 따른 가상의 수직격자 생성에 필요한 계산량은 전체 계산량에 비하여 상대적으로 적다.

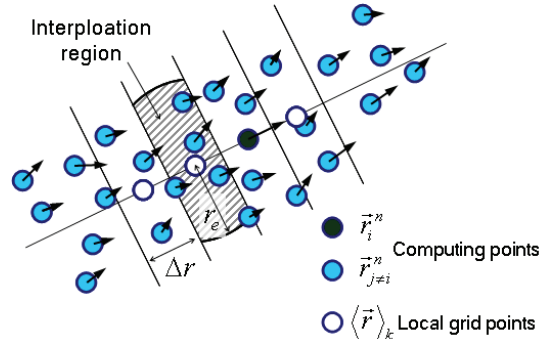


Fig. 1 Generation of flow directional local grid

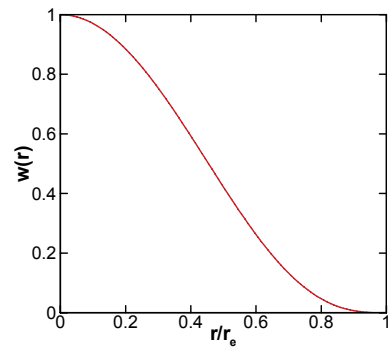


Fig. 2 The Weight function employed in present study

둘째, 가중치 함수(Weight function)를 통하여 국소격자점의 물리량을 보간한다. 유동방향으로 만든 가상의 격자점에는 물리량이 존재하지 않으므로 보간이 필요하다. 격자점의 물리량 ϕ_i 는 그 주위 계산점의 물리량 ϕ_j 로부터 식 (1)과 같이 보간하게 되는데, 이는 MPS법(Koshizuka and Oka 1996)이나, SPH법(Monaghan 1983)과 유사하다.

$$\phi_i = \frac{\sum_j \phi_j w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)}{\sum_j w(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)} \quad (1)$$

$$w(r) = \begin{cases} (1 - \frac{r}{r_e})^3 (1 + \frac{r}{r_e})^3 & r \leq r_e \\ 0 & r_e < r \end{cases} \quad (2)$$

본 연구에서는 식 (2)와 같은 분포를 갖는 가중치 함수를 사용하였으며, Fig. 2에 함수의 형상을 나타낸다. 식 (2)를 통하여 국소격자점과 주변 계산점과의 거리에 따른 가중치를 곱해 보간값을 구하게 된다. 보간 영역은 Fig. 1과 같이 국소격자점으로부터 반지름 r_c 와, 유동방향의 수직인 격자로 제한한다. 만약 보간 영역이 r_c 로써만 제한된다면 보간영역이 과잉으로 중첩되어 대류항 연산에 따른 수치확산이 심하게 나타날 수 있게 된다.

셋째, 높은 정확도의 수치도식을 1차원 국소격자에 적용시킨다. 이 때, 대류항 계산을 위한 각종의 차분도식도 쉽게 적용할 수 있다. 만약 3차정확도의 QUICK 도식을 이용 한다면 Fig. 1에서 보는 바와 같이 흑백의 네 격자점을 사용하게 된다.

$$\widetilde{\phi}_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{q}{8}(\phi_{i-2}^n - 7\phi_{i-1}^n + 3\phi_i^n + 3\phi_{i+1}^n) \quad (3)$$

$$q = \frac{\sqrt{u^2 + v^2} \Delta t}{\Delta r} \quad (4)$$

여기서 Δr 은 국소격자간 거리이며 ϕ_{i-2}^n 와 ϕ_{i-1}^n 는 상류의 두 격자점, ϕ_{i+1}^n 는 하류의 한 격자점의 보간값을 의미한다. 국소격자는 항상 유동방향으로 생성되기 때문에, 상류차분 도식에서 유동방향은 자연스럽게 결정된다.

넷째, 필터링 수치도식인 MMT법(Koshizuka et al. 1990)을 이용하여 안정한 수치해를 얻는다. 일반적으로 고차정확도의 차분도식은 수치진동이 발생하는데 이러한 undershoot와 overshoot는 MMT법을 이용하여 제거하였다. 최대한계와 최소한계를 매 시간간격 마다 계산하여 셋째 단계에서 구해진 해를 다음과 같이 제한한다.

$$\phi_i^{n+1} = \begin{cases} \widetilde{\phi}_i^{n+1} & \min(\phi_i^n) \leq \widetilde{\phi}_i^{n+1} \leq \max(\phi_i^n) \\ \min(\phi_i^n) & \widetilde{\phi}_i^{n+1} < \min(\phi_i^n) \\ \max(\phi_i^n) & \widetilde{\phi}_i^{n+1} > \max(\phi_i^n) \end{cases} \quad (5)$$

여기서 $\min(\phi_i^n)$ 와 $\max(\phi_i^n)$ 는 1차원의 국소격자 안에서 계산되어진다.

이상으로 본 논문에서 제안한 도식은 국소격자

점의 물리량 보간에 가중치 함수를 사용함으로써 격자계에 대한 구속으로부터 완전히 자유로워진다. 또한, 국소격자점의 물리량 보간으로 인해 나타나는 수치확산은 국소격자에 고차 정확도의 수치도식을 사용함으로써 최소화할 수 있다.

3. 수치 시뮬레이션

3.1 2차원 파동 방정식의 수치 시뮬레이션

일반적으로, 유동 시뮬레이션에서 대류항의 계산이 전체 계산의 정확도를 좌우하기 때문에 대류항의 계산이 매우 중요하다. 본 논문에서 제안한 수치도식의 검토를 위해 식 (6)과 같은 2차원 파동방정식을 수치 시뮬레이션 하였다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x} - v \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (6)$$

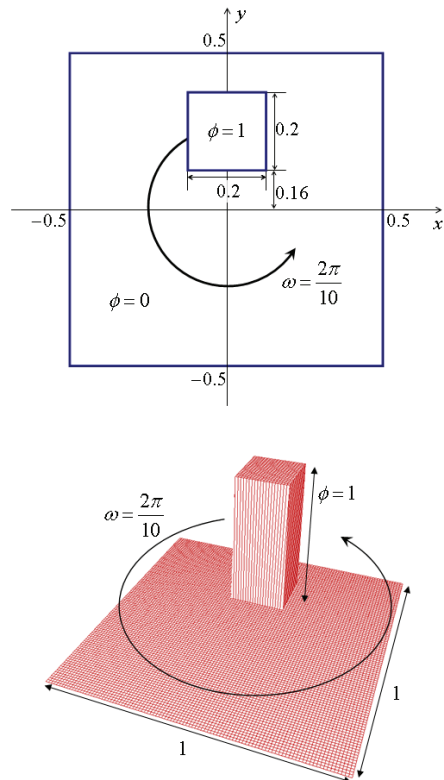


Fig. 3 Initial condition of convection problem

여기서 u 와 v 는 x 와 y 방향에서의 대류속도를 나타낸다. Fig. 3에 2차원 대류계산의 초기 조건이 나타나 있다. 사각파는 0.2×0.2 영역에 $\phi = 10$ 의 초기값을 가지며 반시계 방향으로 $w = 2\pi/10$ 의 각속도로 움직인다. 사각파를 1회전 시키는 계산을 10^4 개의 입자들로 행하였으며, 입자는 균일하게 또는 균일하지 않게 배열하였다. 또한 계산 영역 외부에는 가상의 계산점을 배치하여 경계조건을 임의로 줄 수 있도록 하였다.

시간 간격 Δt 는 0.005로 고정하였으며, 입자간 평균 간격 Δx_{avg} 은 0.01이다. 회전 중심으로 가장 먼 거리에 있는 최대속도를 기준으로 Courant수는 $C_x = C_y = 0.157$ 이다. 보간 영역의 반지름 r_c 와 국소격자 간격 Δr 은 모두 평균 입자간격의 1.5배를 사용하였다. 최적의 r_c 와 Δr 의 값은 3.4절에서 해석하였다.

3.2 격자법과의 결과 비교

제안된 수치도식의 검증을 위하여 동일한 조건 하에서 격자법(Park et al. 2006)과의 비교를 수행하였다. 격자법에서는 정규격자를 도입하여 식 (6)을 유한체적법으로 이산화 하였다. 격자간격 Δx 는 0.01이며, 시간 간격 Δt 는 0.005, 최대속도를 기준으로 Courant수는 $C_x = C_y = 0.157$ 로서 비격자법에서의 계산과 동일하다.

비교를 위하여 다음의 네 가지 수치도식을 비교하였다. 단, 필터링 수치 도식은 사용하지 않았다.

(1) 1차 상류차분 (UDS)

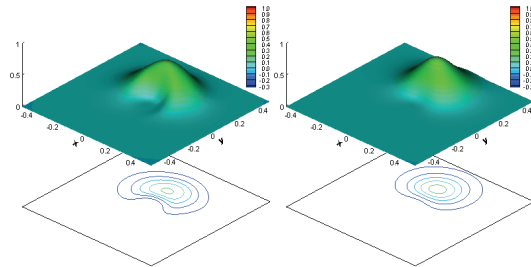
$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \phi_i & (U \geq 0) \\ \phi_{i+1} & (U < 0) \end{cases} \quad (7)$$

(2) 2차 Leith 도식(Lax and Wendroff, 1960)

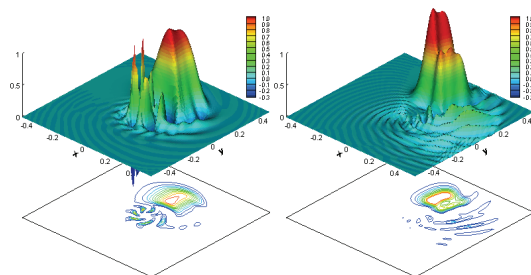
$$\phi_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i+1}) - \frac{\Delta t u}{2\Delta x}(\phi_{i+1} - \phi_i) \quad (8)$$

(3) 3차 MUSCL 도식(van Leer, 1979)

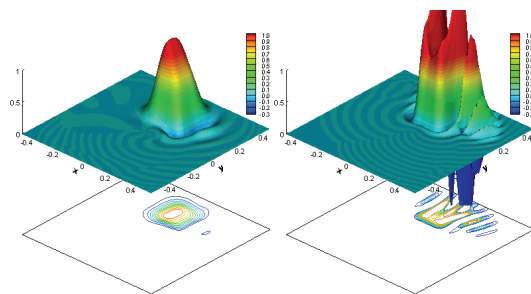
$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{6}(-\phi_{i-1} + 5\phi_i + 2\phi_{i+1}) & (U \geq 0) \\ \frac{1}{6}(-\phi_{i+2} + 5\phi_{i+1} + 2\phi_i) & (U < 0) \end{cases} \quad (9)$$



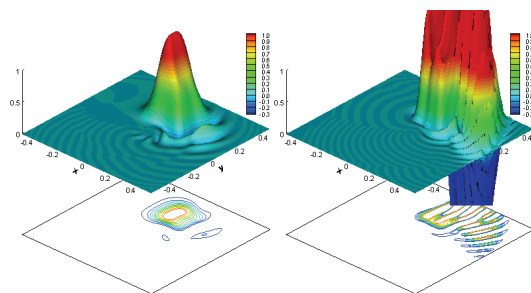
(a) MAFL UDS (b)FVM UDS



(c) MAFL Leith (d)FVM Leith



(e) MAFL MUSCL (f)FVM MUSCL



(g) MAFL QUICK (h)FVM QUICK

Fig. 4 Comparison of various schemes with grid method(FVM)

(4) 3차 QUICK 도식(Leonard 1979)

$$\phi_{i+1/2} = \begin{cases} \frac{1}{8}(-\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}) & (U \geq 0) \\ \frac{1}{8}(-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} + 3\phi_i) & (U < 0) \end{cases} \quad (10)$$

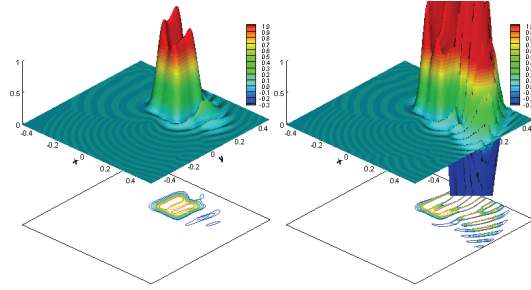
위와 같이 Leith 도식을 제외한 상류화 기법이 쓰인 차분 도식에서는 대류속도 U 의 부호에 따라 차분식이 둘로 나누어져 있다. 하지만 본 논문에서 제안한 도식에서는 항상 대류속도의 양의 방향으로 국소격자가 생성되기 때문에 대류속도 U 의 방향을 고려할 필요가 없다는 장점이 있다.

Fig. 4는 대류계산의 결과를 나타낸다. MAFL (Meshless Advection using Flow Directional Local Grid)은 유동방향 국소격자를 이용한 비격자법, FVM은 격자법인 유한체적법의 결과를 나타낸다. 전체적으로 격자법에서의 대류 결과에 수치 진동이 더욱 심하게 나타난 것을 알 수 있다. 이는 주어진 시간간격 $\Delta t = 0.005$ 이 크기 때문에 나타난 결과로 보인다. Fig. 5에서는 격자법에서 가장 큰 진동을 보였던 QUICK 도식에서 시간간격과 Courant 수를 $\Delta t = 0.0025$, $C_x = C_y = 0.079$ 로 줄여 계산한 결과를 나타내었다.

격자법과 유동방향 국소격자를 사용한 비격자법에서 시간간격 Δt 에 따른 오차해석을 하기 위해서 식(11)을 사용해 전 유동장에서 사각파가 1회 전 한 뒤의 오차의 합을 살펴보았다.

$$err^n = \frac{\sum |\phi_i^n - \phi_{i,analytic}^n|}{\sum \phi_{i,analytic}^n} \quad (11)$$

Fig. 6에 QUICK 도식을 적용하여 시간간격 Δt 의 변화에 따른 에러를 Log 축척비로 나타내었다. FVM의 경우에는 시간간격과 Courant 수가 $\Delta t = 0.0025$, $C_x = C_y = 0.079$ 로서 매우 작은 경우를 제외하고는 급격히 발산하는 경향이 보였으나, 본 논문에서 제안한 MAFL 도식의 경우에는 시간간격이 4배 커졌을 경우에도 해가 안정적인 모습을 보인다. 이러한 경향은 다른 수치도식에서도 동일하며, 이는 MAFL 도식이 보다 큰 시간간격에서 보다 안정적인 것을 보여준다.



(a) $\Delta T = 0.0025$ (b) $\Delta T = 0.005$

Fig. 5 Comparison of FVM QUICK scheme in change of time interval

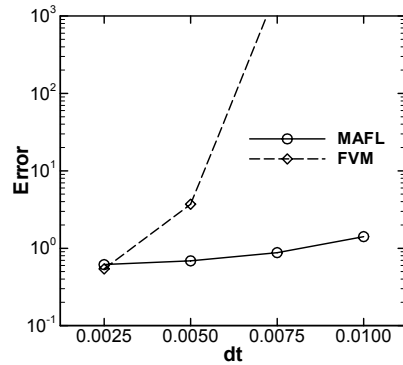


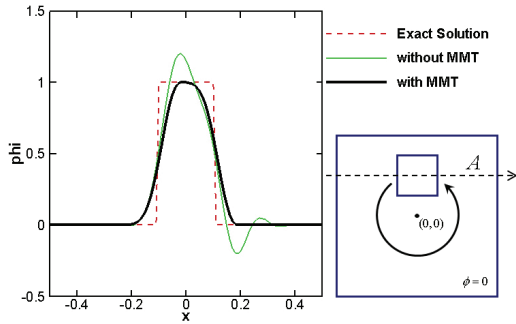
Fig. 6 Comparison of error with various time interval in QUICK scheme

3.3 필터링 도식의 적용

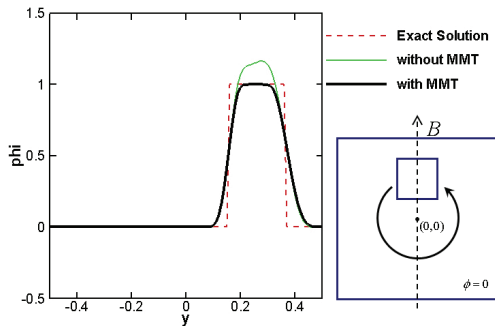
필터링 도식을 적용하면 보다 안정적인 해를 얻을 수 있다. 식(5)에 나타난 MMT 법을 사용하여 개선된 결과를 Fig. 7에 나타내었다. Fig. 7은 2차원의 사각파가 한 바퀴 회전한 후의 각 단면 별 형상을 보여준다. MMT 필터를 적용하지 않았을 경우에는 A단면에서 undershoot와 overshoot가 나타났으나, MMT 필터를 적용하였을 때에는 효과적으로 제거가 되었다. 필터링 도식으로 MMT 이외에 TVD 도식을 고려해 보았으나, MMT 도식만큼의 결과를 얻지 못하였다.

3.4 민감도 해석

국소격자점의 값을 보간할 때, 보간 영역의 반지름 r_e 와 국소격자의 간격 Δr 은 중요한 매개변수가 된다. 만약 r_e 가 작아지면 보간을 위한 입자



(a) MUSCL, Cross section A

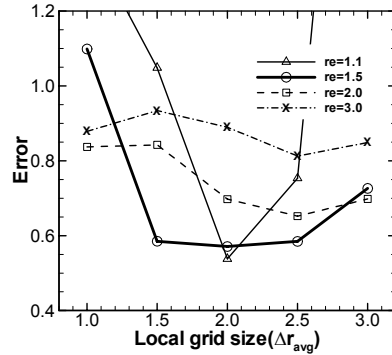


(b) MUSCL, Cross section B

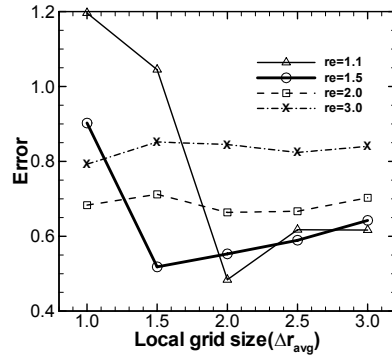
Fig. 7 Comparison of scalar profiles after 2π rotation

수가 부족해져 수치 불안정이 나타나며, r_e 가 커지면 계산시간이 증가하고 수치 확산으로 인해 정확도가 낮아진다. 따라서 r_e 와 국소격자간 간격 Δr 에 대한 최적의 값을 구하기 위해 민감도 해석을 수행하였으며, 식 (11)에 의해 오차를 각각 계산하여 Fig. 8에 나타내었다.

전체적으로 MMT 법을 적용하였을 경우 오차가 상당부분 개선되었으며 r_e 가 $1.3\Delta x_{avg}$ 보다 작을 경우 오차가 증가하고 계산이 불안정해졌다. 한편, r_e 가 $1.5\Delta x_{avg}$ 일 때 오차가 가장 적게 나타났으며, 국소격자간 간격크기 Δr 은 $1.5\Delta x_{avg}$ 와 $2.5\Delta x_{avg}$ 사이에서 상대적으로 오차가 적게 나타났다. 따라서, 본 논문에서는 국소격자의 간격 Δr 에 $1.5\Delta x_{avg}$ 의 값을 사용하였다. 단, 본 조건은 문제의 설정에 따라 달라질 수 있음을 표기해 둔다.



(a) MUSCL



(b) MUSCL MMT

Fig. 8 Effect of r_e and Δr in local interpolation

3.5 불규칙 입자 배치

제한한 수치도식에 MUSCL 도식과 MMT 도식을 적용하여 불규칙하게 배치된 계산입자들에 적용해 보았다. Fig. 9(a)~(d)에 입자들의 배치상태를 나타내었으며, 각각 정규 입자배치의 상태에서 평균 입자간 거리 Δx_{avg} 에 20~80%의 무질서도를 주었다. 계산 결과는 Fig. 10에 표시하였으며 매우 불규칙하게 입자들이 분포되었을 경우에도 계산의 결과는 안정적이다. Fig. 11에서 각 결과의 오차를 표시하였다. 입자배치의 무질서도가 해석해의 형상을 변화시킴으로서 오차가 더욱 발생하지만 입자분포의 무질서도가 커짐에 따라 오차가 증가하는 모습은 보이지 않는다. 본 논문에서 제안한 수치 도식은 계산점 주위 입자 배치에 상관없이 유동방향으로 임시격자점을 생성하여 주변

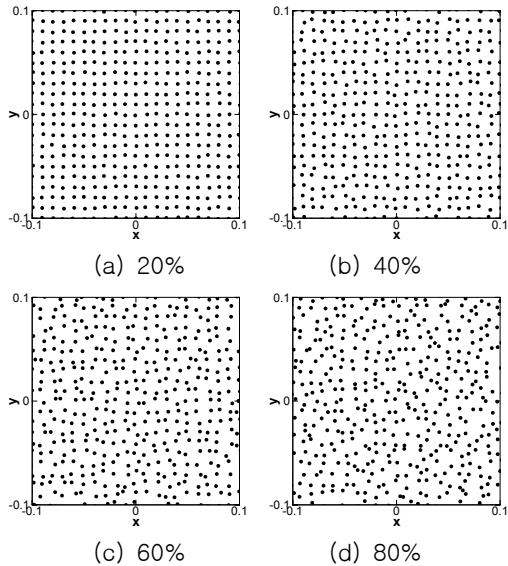


Fig. 9 Randomly distributed particles

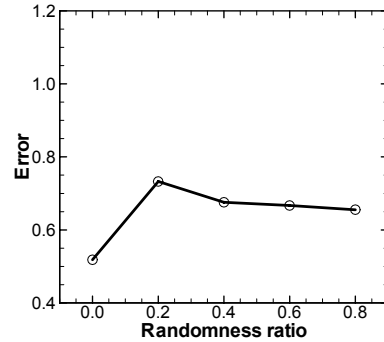


Fig. 11 Comparison of error with various randomness ratio

입자의 보간값을 사용하기 때문에 입자 배치의 무질서도에 큰 영향을 받지 않는 것으로 판단된다.

4. 결론

본 논문에서는 오일러 접근법의 비격자법에 적용할 수 있는 대류항에 관한 수치도식을 개발하였다. 간단한 방법에 의해 유동방향 국소격자 생성하여 가상의 격자 상에서 스칼라량의 수송방정식을 이산화 하였으며, 각종 수치도식을 적용하여 격자법과 그 결과를 비교, 우수한 결과를 도출하였다. 계산점들의 정규배치와 비정규배치 모두에 대해 안정적이고 정도 높은 결과를 얻었다. 또한 제안한 기법의 민감도 해석을 통해 본 계산조건 하에서의 최적의 매개변수 값을 제안하였다. 이는 향후 Navier-Stokes 방정식을 기초로 하는 복잡한 유동장 해석에 적용하여 정도 높은 결과를 도출해 줄 것을 시사해 준다.

참 고 문 헌

- Batina, T., 1993, "A gridless Euler/Navier-Stokes solution algorithm for complex aircraft applications," AIAA Paper 93-0333, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Koshizuka, S., Carrico, C.B., Lomperski, S.W., Oka, Y. and Togo, Y., 1990, "Min-Max Truncation : An accurate and stable filtering

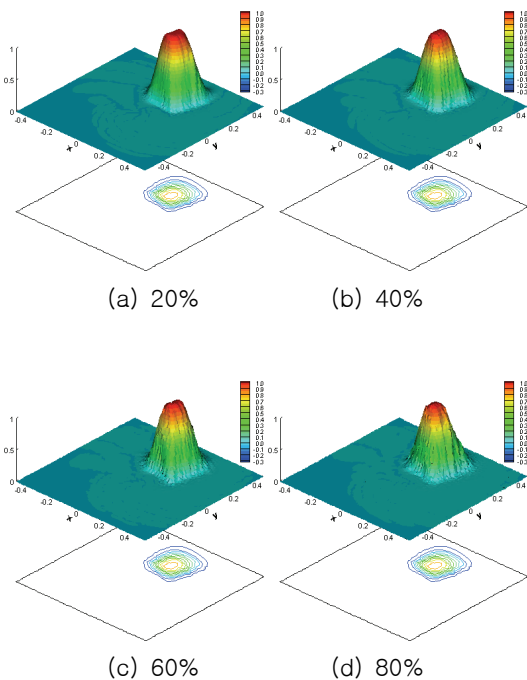


Fig. 10 Calculation results of randomly distributed particles, MAFL, MUSCL+MMT limiter

method for difference calculation of convection," Computational Mechanics, Vol. 66, pp. 65-76.

- Koshizuka, S., Oka, Y., 1996, "Moving-Particle Semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid," Nuclear Science and Engineering, Vol. 123, pp. 421-434.
- Lax, P.D. and Wendroff, B. 1960, "Systems of Conservation laws," Comm. Pure Appl. Math., Vol. 13, pp. 217-237.
- Leonard, B.P. 1979, "A stable and Accurate Convective Modeling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation," Comput. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 19, pp. 59-89.
- Monaghan, J.J. 1983, "An Introduction to SPH," Comput. Phys. Commun., Vol. 48, pp. 89.
- Park, J.C., Lee, B.H., Kim, J.H., 2006, "Study on high accurate schemes for simulation of free-surface flow," Journal of Ocean Engineering and Technology, Vol. 20, No. 4, pp. 31-36. (in Korean)

- Yoon, H.Y., Koshizuka, S., Oka, Y., 1999, "A particle-gridless hybrid method for incompressible flows," Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 30, pp. 24-35.
- Van Leer, B., 1979, "Towards the ultimate conservative difference scheme, V. A second order sequel to Godunov's method," J. Comp. Pys., Vol. 32, pp. 101-136.



< 정성준 >



< 이병혁 >



< 박종천 >