

◆특집◆ 의료영상 기술동향

방출전산화단층촬영기의 영상 형성과 재구성 원리

이수진*

Principles of Image Formation and Reconstruction in Emission Computed Tomography

Soo-Jin Lee*

Key Words : Single-photon Emission Computed Tomography (단일광자방출전산화단층촬영기), Positron Emission Tomography (양전자방출단층촬영기), Projections (투사), Image Reconstruction (영상재구성), Filtered Backprojection (여과후역투사), Maximum Likelihood (최대우도), Maximum a Posteriori (최대사후), Bayesian Reconstruction (베이즈 재구성)

1. 서론

방출전산화단층촬영기 (emission computed tomography, ECT)는 핵의학 분야의 대표적 영상기로서 체내 대사와 장기 기능 등을 비침습적으로 2차원 단면영상 또는 3차원 체적영상을 통해 정량적으로 관찰할 수 있도록 하는 장비이다.^{1,3} 이는 주로 해부학적 영상을 제공하는 기존의 x-선 컴퓨터 단층촬영기 (x-ray CT)에서 체외의 방사선이 인체를 투과하도록 함으로써 체내의 해부학적 단면영상을 제공하도록 하는 것과는 달리 체내에 방사성의 약품을 투여하고 이것이 생화학적 특성에 따라 분포되는 특성을 영상으로 표현 한 생리적 기능영상을 제공한다. ECT는 사용되는 방사성 의약품의 종류와 감마선의 검출방식에 따라 양전자방출단층촬영기(Positron Emission Tomography, PET)과 단일광자방출전산화단층촬영기(Single-Photon Emission Computed Tomography, SPECT)의 두 가지 형태로 구분된다.

PET에서는 기본적으로 ¹¹C, ¹³N, ¹⁵O, ¹⁸F 등과 같은 양전자 방사성물질로부터 방출되는 감마선을 검출한다. 체내의 조직에서 방출된 양전자는 전자와 상호작용을 함으로써 에너지를 잃고 소멸하게 되는데, 이때 한 개의 양전자가 소멸되면서 511 keV의 높은 에너지를 갖는 두 개의 광자를 생성하고 이들은 상호 거의 반대 방향($180^\circ \pm 0.25^\circ$)으로 진행된다. PET에서는 이러한 두 개의 광자를 검출하기 위해 Fig. 1(a)와 같이 원형으로 배열된 검출기를 사용한다. 상호 반대방향에 위치한 한 쌍의 검출기 마다 일정시간의 폭을 갖는 전자게이트회로가 설치되어 있어 주어진 짧은 시간 (4~10ns) 내에 상호 반대방향으로 진행된 두 개의 광자만이 검출될 수 있도록 한다. 이와 같이 두 개의 광자가 반대 방향에 위치한 한 쌍의 검출기에 의해 일정시차 내로 검출되는 것을 동시계수 (coincidence event)라 하는데, 이를 이용하여 특정방향으로 진행되는 광자의 개수를 추적할 수 있다. 여기서 추적된 광자의 개수는 체내에 분포된 방사성 물질의 농도에 비례하므로 이는 2차원 방사성 분포도 상에 하나의 선을 따라 그 강도를 추적한 “선적분”의 값에 해당된다. PET의 경우 360°에 걸쳐 배열된 검출기 중 각 한 쌍은 하나의 동시계수를 기록하기 위한 것이

* 배재대학교 전자공학과

Tel. 042-520-5711, Fax. 042-520-5687

Email sjlee@pcu.ac.kr

영상신호처리 특히, 의학영상처리, 영상재구성, 영상시스템 분야에 관심을 두고 연구활동을 하고 있다.

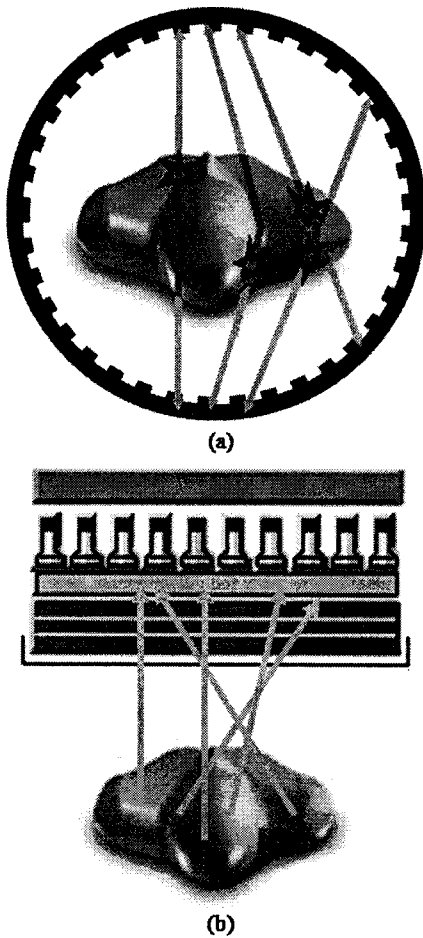


Fig. 1 Principles of ECT: (a) positron emission tomography (PET). (b) single photon emission computed tomography (SPECT).

므로 사실상 180°에 걸쳐 축적된 광자의 개수를 사용하여 2차원의 영상을 재구성하게 된다. PET은 주로 사용하는 방사성 의약품들의 반감기가 매우 짧으므로 인체에 투여되기 직전에 가속기를 통해 제조되어야 하는 단점도 지니고 있으나, 각종 종양은 물론, 간질, 노인성치매 등의 진단을 위한 중요한 정보를 제공한다는 점에서 오늘날의 핵의학 영상기법에 있어서 매우 중요한 위치를 차지하고 있다.

한편, SPECT에 사용되는 방사성물질에는 ^{99m}Tc, ²⁰¹Tl, 등이 있는데, 이들로부터 방출되는 감마선은

180°방향으로 진행되는 한 쌍의 광자를 검출하는 PET의 경우와는 달리 임의의 방향으로 방출되는 단독적인 광자로 이루어져 있다. (Fig. 1(b)) 따라서, SPECT용 방사성물질로부터 방출되어 동시에 임의의 방향으로 진행되는 다수의 광자들 중 한 방향으로만 진행되는 광자들을 수집하기 위해서는 조준기(collimator)가 필요하다. 조준기는 여러개의 가느란 관으로 구성되어 있어 검출기로 하여금 미세각도내로 진행되는 광자들을 검출할 수 있도록 한다. SPECT의 경우 이러한 조준기를 통해 순차적으로 광자를 수집하므로 PET에서 요구되는 동시계수의 감지를 위한 전자게이트회로가 필요 없다. PET에 비해 SPECT의 장점중의 하나는 위에 언급된 SPECT용 방사성물질의 반감기가 매우 길므로 별도의 부가적인 가속기 없이도 손쉽게 이들을 구입하여 환자에 투여할 수 있다는 것이다. 예를 들면, PET에서 사용되는 ¹¹C의 경우 반감기가 약 20.5분인 반면, SPECT용 ^{99m}Tc로부터 방출되는 광자의 에너지 세기는 140 keV 이고 반감기가 약 6.02시간이다. 이러한 장점으로 인해 SPECT는 현재 각종 종양은 물론 뇌혈류를 측정하는데도 유용하게 사용되고 있다.

본 논문에서는 ECT에서 영상의 형성을 위한 투사 및 역투사의 수학적 표현에 대하여 서술하고 현재까지 개발된 다양한 영상재구성법 중 대표적인 알고리즘의 이론적 배경 및 원리에 대하여 고찰한다. 또한 각 알고리즘의 특성에 따른 장단점을 논하고 서로 다른 알고리즘의 성능을 비교함으로써 향후 ECT 시스템의 발전과 더불어 영상재구성 알고리즘의 개선책과 발전 방향에 대하여 논한다.

2. 여과후역투사 방법을 사용한 영상재구성

ECT의 기능은 3차원 공간상의 특정 단면을 따라 분포된 방사성의약품의 분포도를 간접적으로 측정하여 이를 2차원의 영상으로 가시화하는 것이다. 그런데, 한 단면을 따라 방출된 광자들을 검출하여 그 개수를 수치화할 경우 2차원 단면상에 분포된 여러 위치의 광자들이 1차원상에 투사되어 2차원상의 위치정보가 유실되므로, ECT를 위한 단면영상재구성법에서는 180° 또는 360°에 걸쳐 얻어진 여러개의 1차원 투사 데이터(projection data)를 사용하여 2차원 단면의 영상을 복원한다.

복원하고자 하는 2차원 단면영상을 $f(x,y)$ 로

표현할 경우 Fig. 2(a)에 나타난 바와 같이 θ 의 각도로 투사한 결과는 식(1)과 같은 선적분으로 표현되며 이를 Radon^{3,4} 변환이라 한다.

$$g_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - t) dx dy \quad (1)$$

식 (1)에서 투사값 g 는 주어진 각도 θ 에 대하여 t 에 관한 함수로 주어진다. 이 경우 투사선 상에 놓인 모든 광자들이 한 방향으로 진행하여 손실 없이 검출기의 특정위치에 도달하는 것으로 간주된다. 즉 식(1)은 투사과정에서 발생할 수 있는 광자의 산란 및 감쇠현상을 비롯한 각종 물리적 현상이 고려되지 않은 매우 단순한 표현에 해당된다.

투사값 g 가 주어진 경우 식(1)에서 $f(x,y)$ 를 구함으로써 영상을 재구성하기 위한 직접적인 방법은 Radon 변환의 역변환에 해당되는 여과후 역투사(filtered back-projection, FBP) 방법을 사용하는 것이다. 이는 Fig. 2에 표시된 바와 같이 θ 의 각도로 투사된 투사값 $g_{\theta}(t)$ 의 1차원 푸리에 변환을 $G_{\theta}(\omega)$ 라 할 경우 이것이 단면영상 $f(x,y)$ 의 2차원 푸리에 공간 $F(u,v)$ 의 θ 각도를 따른 직선상의 값에 해당된다는 “푸리에 슬라이스 정리 (Fourier slice theorem)”를 이용한 것이다. 즉 $f(x,y)$ 의 2차원 푸리에변환 $F(u,v)$ 와 $g_{\theta}(t)$ 의 1차원 푸리에변환 $G_{\theta}(\omega)$ 사이에 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$F(u,v)|_{u = \omega\cos\theta, v = \omega\sin\theta} = G_{\theta}(\omega)$$

따라서 Fig. 2(b)에 나타난 바와 같이 180° 에 걸쳐 $G_{\theta}(\omega)$ 의 값을 구하고 이를 역푸리에 변환함으로써 $f(x,y)$ 를 구할 수 있다. 이 경우, $f(x,y)$ 는 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x\cos\theta + y\sin\theta) d\theta, \quad (2)$$

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\theta}(\omega) |\omega| \exp(j2\pi\omega t) d\omega \quad (3)$$

식(3)은 $G_{\theta}(\omega)$ 를 경사필터 (ramp filter) $|\omega|$ 로 필터링한 뒤 역푸리에변환을 한 것을 나타낸 것으로서 $Q_{\theta}(t)$ 를 “여과된 투사” (filtered projection)라 한다. 한편, 식 (2)는 $Q_{\theta}(t)$ 를 180° 에 걸쳐 영상공간으로 역투사함을 의미한다. 즉 주어진 각도 θ 에서 여과된 투사값 $Q_{\theta}(t)$ 을 투사방향의 역방향으로 영상공간내에 투사선을 따라 일정한 값으로 분산시키고 이들을 180° 에 걸쳐 중첩함으로써 식(1)의 해인

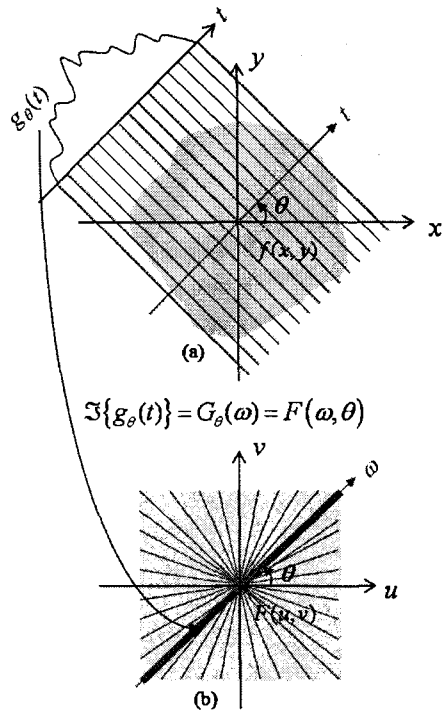


Fig. 2 The Fourier Slice Theorem: (a) Parallel projections taken by measuring a set of parallel rays at angle θ . (b) The relationship between the Fourier transform of a projection and the Fourier transform of the object along a radial line.

$f(x,y)$ 를 얻게 된다.

FBP에서는 경사필터의 차단주파수로 인해 발생할 수 있는 Gibbs 현상과 시스템 자체의 잡음으로 인한 영상의 왜곡을 최소화하기 위해 경사필터 $|\omega|$ 에 Hanning 또는 Hamming window와 같은 저주파 통과 필터를 주파수 공간상에서 곱함으로써 재구성된 영상의 질을 향상시킬 수 있다. 그러나 실제 영상재구성 시 180° 에 걸쳐 제한된 개수의 이산각을 사용할 수밖에 없으며 이산각의 개수는 연산량과 직접 관계가 있는 투사선의 개수에 해당되므로 해상도와 연산량을 절충한 선에서 결정되어야 한다. FBP의 경우 이산각으로 인해 Fig. 2에 나타난 바와 같이 주파수 공간의 원점에서 멀수록 투사선의 밀

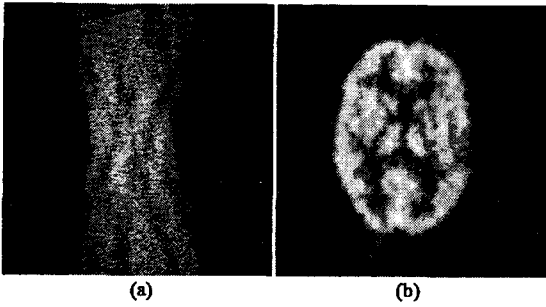


Fig. 3 Image reconstruction using FBP: (a) Projection data. (b) FBP reconstruction.

도가 급격히 감소되어 재구성된 영상의 해상도가 균일하지 못하게 된다. 또한 재구성된 영상의 화소값이 양수 이어야 함에도 불구하고 푸리에 변환의 특성으로 인해 음수가 되는 경우가 다수 있으므로 이에 대한 보정을 해야 하는 문제점이 있다.

Fig. 3은 PET 영상재구성의 한 예를 나타낸 것으로서, Fig. 2에서 θ 를 180° 에 걸쳐 336 등분하고 t 축 상의 191개 샘플을 사용하여 얻은 투사데이터에 감쇠, 산란, 및 랜덤효과 등 물리적 현상에 대한 보정작업을 거친 뒤 Hanning 저역통과 필터를 적용한 FBP방법으로 재구성한 것이다. 이 경우 역투사 시 투사데이터에 포함된 각종 잡음이 투사선을 따라 강하게 나타나며 이를 억제하기 위한 저역통과 필터의 영향으로 고주파 성분의 미세영역에 대한 정보가 유실되는 단점이 있음을 확인할 수 있다.

3. 대수적 방법을 사용한 영상재구성

투사값으로부터 영상을 재구성하기 위한 문제를 수학적으로 표현함에 있어 식(1)과 같은 라돈변환을 통해 FBP를 유도하는 방법과는 달리 영상공간을 2차원 격자형태의 이산공간으로 가정하고 영상재구성을 대수적 (algebraic) 연립방정식 문제로 표현하는 방법도 고려할 수 있다. 이러한 방법으로 영상재구성 알고리즘을 유도하는 방법을 대수적 영상재구성기법(algebraic reconstruction technique, ART)^{4,5}이라 하며 이는 식(5)와 같이 주어지는 N 개의 미지수로 표현된 M 개의 비제차 선형 연립방정식에서 해(f_j)를 구하는 것이다. 식(4)에서 f_j 는 영상공간의 j 번째 화소를 나타내며

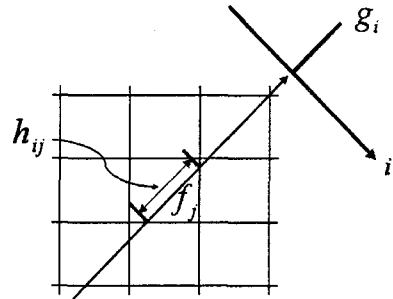


Fig. 4 The weighting factor that represents the contribution of the j th pixel to the i th ray

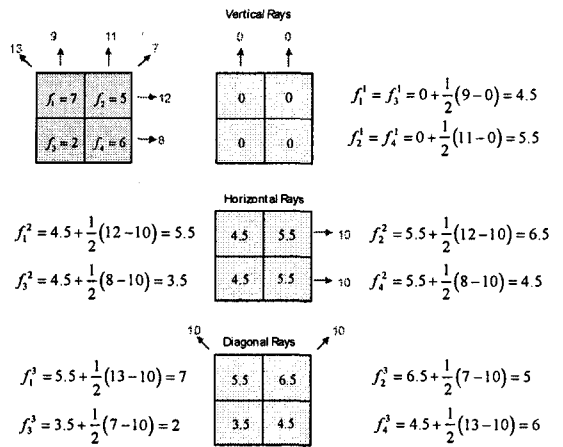


Fig. 5 An example for 2×2 ART reconstruction

g_i 는 i 번째 투사값, h_{ij} 는 i 번째 투사선이 j 번째 화소를 통과하는 가중치 (Fig. 4 참조)를 나타낸다.

$$\sum_{j=1}^N h_{ij} f_j = g_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (4)$$

식(4)와 같이 주어진 문제에서 일반적으로 M 과 N 값이 매우 크며 $M < N$ 이므로 단순 역행렬 방법을 사용하여 해를 직접 구하는 것은 불가능하다. ART 영상재구성법에서는 이러한 문제점을 극복하기 위해 식(5)와 같은 반복(iterative)연산을 통해 간접적으로 해를 구한다.

$$f_j^{(i)k+1} = f_j^{(i)k} + \frac{g_i - \hat{g}_i^k}{\sum_{l=1}^N h_{il}^2} h_{ij}, \quad (5)$$

$$\hat{g}_i^k = \sum_{j=1}^N h_{ij} f_j^{(i)k}$$

위의 식에서 $f_j^{(i)k}$ 은 i 번째 투사선이 지나는 j 번째 화소의 k 번째 반복 연산값을 나타낸다. N 개의 투사선이 주어질 경우 식(5)를 $i=1, \dots, N$ 에 대하여 연산하되 각 연산의 결과를 다음 연산의 초기값으로 사용한다. ART 알고리즘의 원리는 식(5)에 나타난 바와 같이 반복연산 마다 측정된 투사값 g_i 와 연산된 투사값 \hat{g}_i^k 의 차이에 대한 평균값을 현재의 화소값에 더하여 새로운 화소값으로 보정하는 것이다. ART는 FBP에 비해 방사형태의 잡음이 존재하지 않고 한층 향상된 영상을 제공하는 반면 식(5)에 나타난 바와 같이 $g_i - \hat{g}_i^k$ 연산결과가 음수인 경우가 있으므로 FBP와 같이 음수값을 갖는 화소에 대한 보정이 필요하고 잡음이 내재한 경우 반복연산의 횟수가 증가할수록 증폭되는 단점이 있다. Fig. 5는 2×2 영상을 사용한 ART 영상재구성 알고리즘의 예를 나타낸 것이며 이 경우 단 1회의 연산으로 원래의 영상이 완전하게 재구성될 수 있음을 보여준다.⁶

4. 통계학적 영상재구성

4.1 최대우도 방법을 사용한 영상재구성

FBP와 ART 영상재구성법 등은 투사선 상에 놓인 모든 광자들이 한 방향으로 진행하여 손실 없이 검출기의 특정위치에 도달하는 것을 가정한 알고리즘이므로 실제 시스템에 적용할 경우 광자의 이동 시에 발생하는 각종 물리적 현상으로 인해 이론적으로 예측된 결과에 비해 재구성된 영상의 질이 매우 저조하다. 이러한 단점을 극복하기 위해 광자의 방출에서 검출에 이르는 모든 물리적 절차를 통계학적 차원에서 근사화함으로써 한층 개선된 영상을 재구성할 수 있도록 하는 통계학적 영상재구성법에 대한 연구가 많은 연구자에 의해 이루어져 최근에는 실제 시스템에도 제한적으로 사용되는데 단계에 까지 이르고 있다.⁷

통계학적 영상재구성 알고리즘은 ECT 영상의 잡음에 대한 주된 원인이 검출기에 도달하는 광자 개수의 불규칙한 변화에 있으므로 이를 수학적으로

묘사할 수 있는 확률분포함수를 설정하여 이로부터 관련 수식을 유도하게 된다. 즉, 일정시간 동안 방사성물질로부터 방출되는 광자의 개수를 랜덤변수(random variable) N 으로 표현할 경우, 이는 다음과 같은 푸아송(Poisson) 분포를 따르게 된다.

$$\Pr(N=n) = \frac{\mu^n \exp(-\mu)}{n!} \quad (6)$$

식(6)에서 $\Pr(N=n)$ 은 일정시간 동안 방출된 광자의 개수가 특정값 n 일 확률을 나타내며, 이때 평균값이 μ 임을 나타낸다. 복원하고자 하는 단면 f 를 이산화하여 이를 벡터로 표현할 경우 특정 위치 j 에서의 방사성물질의 농도 f_j 는 식(6)의 μ 에 해당된다.

한편, f_j 에서 방출된 광자가 검출기의 특정 위치 i 에 도달할 확률을 H_{ij} 라 하면, 이는 베르누이(Bernoulli) 확률이 된다. 그런데 푸아송과 베르누이의 연속과정은 새로운 하나의 푸아송 과정으로 합쳐지므로 결과적으로 방출-검출 과정에서 발생하는 랜덤과정은 하나의 푸아송 과정으로 요약된다. 또한 여러개의 광자들이 하나의 검출기에 축적될 경우 이는 서로 다른 푸아송 과정이 중첩되는 것으로서 그 결과는 새로운 푸아송 과정이 되며, 이때 새로운 푸아송 과정의 평균값은 각 광자가 갖는 푸아송 평균값의 합이 된다.

푸아송 랜덤과정으로 묘사되는 광자 방출-검출의 과정으로부터 영상재구성을 위한 알고리즘을 유도하기 위해 앞으로 사용될 각 변수를 일반적으로 다음과 같이 정의한다. 영대문자는 2차원 랜덤필드(random field)를 나타내고, 영소문자는 2차원 랜덤필드가 취하는 순간값이다. 예를 들어 $\Pr(G=g)$ 는 2차원 랜덤필드 G 가 g 라는 순간값을 취할 확률을 의미한다. 광자들이 검출기의 특정위치 i 에 도달하는 사건들은 독립적이므로, 투사데이터의 형성과정을 묘사하는 ECT 시스템의 우도(likelihood) 분포함수는 다음과 같이 독립된 푸아송 분포함수로 표현된다.

$$\Pr(G=g|f) = \prod_i \frac{\bar{g}_i e^{-\bar{g}_i}}{g_i!}$$

윗식의 좌변에서 G 와 g 는 투사값을 위한 랜덤필드와 순간값을 각각 의미하며, 우변에서 g_i 는 i 번째 검출기에 축적된 광자의 개수, 즉 투사값을, \bar{g}_i 는 g_i 의 평균값으로서 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{g}_i = \sum_j H_{ij} f_j \quad (7)$$

윗 식에서 H_{ij} 는 j 번째 화소의 위치에서 방출된 광자가 검출기의 i 번째 칸(bin)에 도달할 확률을 의미하는 것으로서 주어진 시스템의 특성에 따라 결정되는 시스템 행렬 또는 임펄스 응답에 해당된다. 이는 ART 영상재구성을 위한 식 (4)의 h_{ij} 와 유사하나 H_{ij} 는 시스템에 존재하는 다양한 물리적 현상을 총체적으로 고려한 통계적 차원의 확률인 반면, h_{ij} 는 Fig. 4에 설명된 바와 같이 비통계적 가중치에 의해 결정된 값이다. PET의 경우 식 (7)의 우변에 산란과 랜덤현상에 대한 항이 추가되기도 한다.

통계학적 영상재구성법 중 가장 기본적인 유형은 최대우도 (maximum likelihood, ML) 추정법인데, 이는 다음과 같은 식으로 요약된다.

$$\hat{f} = \operatorname{argmax}_f \Pr(G = g|f) \quad (8)$$

즉, 우도확률 $\Pr(G = g|f)$ 를 최대화하는 f 를 추정함으로써 복원하고자 하는 영상 \hat{f} 를 구하는 것이다. 그런데, 식(8)로 표현되는 우도확률을 직접 최대화하는 것이 불가능하므로 기대값최대화 (expectation maximization, EM) 방법을 통하여 간접적으로 식 (8)의 해 \hat{f} 를 구하는 방법이 매우 효율적인 것으로 알려져 있으며 이를 ML-EM^{8,9} 알고리즘이라 한다. ML-EM은 디지털 컴퓨터를 사용하기에 매우 적합한 알고리즘으로서 통계학적 영상재구성법에 매우 유용하게 응용되고 있다.

ML-EM을 사용한 영상재구성법에서는 관측된 투사데이터를 “불완전”(incomplete) 데이터로 간주하고 식 (8)에 표현된 우도확률을 직접 최대화 하는 대신 다음과 같이 관측이 불가능하나 수학적으로 표현 가능한 가상적인 “완전”(complete) 데이터에 대한 조건부 기대값을 최대화 시킴으로써 간접적으로 우도확률을 최대화하여 \hat{f} 를 구한다.

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \operatorname{argmax}_f \Pr(G = g|f) \\ &= \operatorname{argmax}_f E_C[\log \Pr(C = c|f)|G = g, \hat{f}] \end{aligned}$$

여기서, 관측된 투사데이터가 불완전하다는 의미는 Fig. 6에 나타난 바와 같이 검출기의 i 번째 칸에 축적되는 투사값이 서로 다른 위치로부터 방출된 f 의 합이므로 관측된 g_i 가 실제로 평면상의 어느 위치에 기인하는가에 관한 정보가 이미 상실되었음을

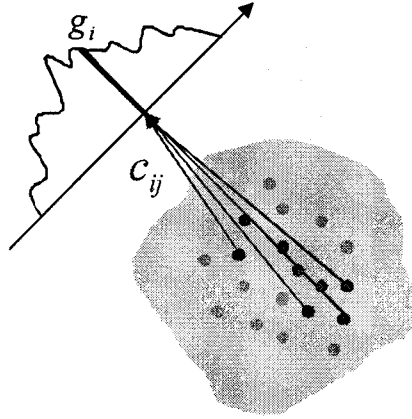


Fig. 6 Complete data (c_{ij}) and incomplete data (g_i) in EM

나타낸다. 한편, 완전 데이터라 함은 특정위치 j 에서 광자가 방출하여 검출기의 특정위치 i 에 도달된 것을 나타내는 가상적 데이터를 의미한다. 따라서 완전 데이터 C 는 수학적표현이 가능하여 EM 알고리즘에 사용될 수 있을 뿐 실제로 관측이 가능한 것은 아니다. ML-EM 알고리즘은 조건부 기댓값 $E_C[\cdot]$ 를 구하는 E-단계와 이를 최대화하는 M-단계로 구분된다. E-단계를 위한 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q(f|\hat{f}) &= E_C[\log \Pr(C = c|f)|G = g, \hat{f}] \\ &= \sum_i \sum_j \left[g_i \frac{H_{ij} \hat{f}_j}{\sum_m H_{im} \hat{f}_m} \log(f_j) - H_{ij} f_j \right] \end{aligned}$$

M-단계에서는 윗식을 f_j 에 대하여 편미분하고 그 결과를 0으로 함으로써 $Q(f|\hat{f})$ 를 최대화 한다.

$$\frac{\partial Q(f|\hat{f})}{\partial f_j} = - \sum_{ij} H_{ij} + \sum_i \frac{g_i H_{ij} \hat{f}_j}{\sum_m H_{im} \hat{f}_m} \cdot \frac{1}{f_j} = 0$$

위의 방정식을 풀면 다음과 같은 ML-EM알고리즘의 최종식이 얻어진다.

$$\hat{f}_{ij}^{k+1} = \frac{\hat{f}_j^k}{\sum_i H_{ij}} \sum_i \frac{g_i H_{ij}}{\sum_m H_{im} \hat{f}_m^k} \quad (9)$$

위의 식을 분석하기 위해 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\hat{f}_{ij}^{k+1} = \frac{\hat{f}_j^k}{\sum_i H_{ij}} \sum_i H_{ij} \left[\frac{g_i}{r_i} \right]$$

윗식에서 $r_i = \sum_m H_{im} f_m$ 이다. 즉 ML-EM 알고리즘은 투사연산 r_i 과 m 역투사연산 $\sum H_{ij} [g_i/r_i]$ 으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 식(5)의 ART 알고리즘은 새로운 화소값을 계산하기 위해 전단계의 화소값에 보정값을 더하는 반면 식(8)의 ML-EM 알고리즘은 전단계의 화소값에 보정값을 곱함으로써 다음단계의 화소값을 결정한다. 또한 ART의 보정값은 투사값의 차이에 의해 계산되므로 반복연산 중에 음수가 발생할 경우 급격히 발산할 수 있는 반면 ML-EM의 경우 보정값이 투사-역투사의 연속연산 결과로서 항상 양수가 되므로 음수의 발생으로 인해 알고리즘이 발산될 우려가 없다.

ML-EM 방법은 광자 방출의 푸아송 특성이 그대로 보존될 뿐 아니라, 식 (9)에서 H_{ij} 에 시스템의 각종 물리적 특성을 포함할 경우 FBP 또는 ART와 같은 비통계학적 방법에서 요구되는 별도의 물리적 현상에 대한 보정작업 없이도 재구성과정에서 이들을 보정할 수 있는 큰 장점이 있다. 그러나 영상재구성의 수학적 문제를 방정식으로 해석할 경우 방정식의 개수가 미지수의 개수보다 훨씬 적고 시스템 행렬이 매우 희박(sparse)한 불량문제 (ill-posed problem)로 분류된다. 따라서 반복연산을 통한 역변환을 사용하여 해를 구하고자 할 경우 알고리즘이 매우 불안정하고 특정 횟수의 반복연산 이후에 쉽게 발산할 수 있다.

4.2 최대사후 방법을 사용한 영상재구성

위에 언급된 ML-EM의 불안정성을 극복하기 위해 알고리즘에 안정자(stabilizer)를 추가할 경우 수학적으로 불량문제에 속하는 ML 영상재구성문제를 비불량문제(well-posed problem)로 변환할 수 있다.¹⁰

투사 데이터의 랜덤필드를 G 라하고, 복원하고자 하는 원영상의 랜덤필드를 F 라 할 경우, 다음과 같은 Bayes 관계식을 쓸 수 있다.

$$\Pr(F=f|G=g) = \frac{\Pr(G=g|F=f)\Pr(F=f)}{\Pr(G=g)} \quad (10)$$

위의 식에서 $\Pr(F=f|G=g)$ 는 사후(posterior)확률, $\Pr(G=g|F=f)$ 는 우도확률, $\Pr(F=f)$ 는 사전(prior)확률, $\Pr(G=g)$ 는 관측된 투사데이터의 항

으로서 통계적 확률이 아닌 상수이다. 즉 우도확률을 최대화하는 ML 추정법과는 달리 여기서는 사후확률을 최대화함으로써 f 를 추정하는 최대사후(maximum a posteriori, MAP) 추정법이 적용된다. 특히 MAP 추정법에서의 우도확률 $\Pr(G=g|F=f)$ 과 ML 추정법에서의 우도확률 $\Pr(G=g|f)$ 의 차이점은 ML의 경우 복원하고자 하는 원영상이 랜덤필드가 아닌 파라미터인 반면, MAP의 경우 이를 랜덤필드로 간주하는 것이다. 이는 MAP에서 복원하고자 하는 영상 자체를 랜덤필드로 간주함으로써 원영상에 관한 사전확률을 $\Pr(F=f)$ 로 표현하기 위함이다.

식(10)의 양변에 $-\log$ 를 취하여 최대화 문제를 최소화 문제로 변환하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \operatorname{argmax}_f \Pr(F=f|G=g) & (11) \\ &= \operatorname{argmin}_f [-\log \Pr(F=f|G=g)] \\ &= \operatorname{argmin}_f [-\log \Pr(G=g|F=f) - \log \Pr(F=f)] \end{aligned}$$

식 (10)의 상수항 $\Pr(G=g)$ 는 f 에 관한 함수가 아니므로 식(11)에서 제외되었다. MAP 추정법에 있어서 가장 중요한 항은 복원하고자 하는 영상에 대한 사전정보를 표현하는 사전확률 $\Pr(F=f)$ 이다. 즉, 식 (11)에서 사전확률에 관한 항은 ML에 대한 추가적인 항으로서 ML-EM의 불안정성을 해소시키기 위한 안정자(stabilizer)의 역할을 한다. 결과적으로 이러한 안정자를 포함하는 MAP 추정법을 사용할 경우 ML-EM과 달리 반복회수가 증가하여도 알고리즘이 발산하지 않는 매우 안정적인 해를 얻을 수 있다.

MAP 추정법에서 주로 사용되는 사전확률분포 함수는 Markov 랜덤필드에 근거한 Gibbs 분포함수로서 이는 복원하고자 하는 단면영상을 2차원 랜덤필드로 표현할 경우 어느 특정 화소의 값이 인접한 주변화소와 유사함을 제약조건으로 한다. 즉 주어진 화소의 값이 주변화소와 유사할 것이라는 가정을 통계학적 랜덤필드로 표현할 경우 이는 Markov 랜덤필드가 되며 이를 위한 확률분포함수는 다음과 같은 Gibbs¹⁰ 분포함수가 된다.

$$\Pr(F=f) = \frac{1}{Z} \exp[-\lambda E_P(f)] \quad (12)$$

여기서, Z 는 사전확률분포함수의 전 구간에 걸친 적분값이 1이 되도록 하는 정규항이며, λ 는 양의 상수, 그리고 $E_P(f)$ 는 인접화소 간의 상호관계를 나타내는 사전에너지로서 다음과 같이 정의된다.

$$E_p(f) = \sum_j \sum_{n \in N_j} \phi(f_j; f_n)$$

위의 식에서 N_j 는 화소 f_j 의 주변화소를 의미하며 일반적으로 2차원 화소의 경우 상,하,좌,우의 4개 화소를 대상으로 한다. 또한 $\phi(x)$ 는 일반적으로 인접화소 간의 밝기 차이가 클수록 증가하도록 설정되며 가장 단순한 형태는 $\phi(x) = x^2$ 이다. 이 경우의 사전에너지함수는 다음과 같이 주어진다.

$$E_p(f) = \sum_j (f_{j+1} - f_j)^2 \quad (13)$$

즉, 영상 내에 존재하는 잡음에 의한 불규칙한 밝기분포로 인해 어떤 화소 f_j 와 이에 인접한 화소간의 밝기 차이가 큰 경우 그렇지 않은 경우에 비해 사전에너지 $E_p(f)$ 의 값이 크게 나타난다. 따라서, 식(12)를 식(11)에 대입하면 다음과 같은 에너지 함수를 최소화 하는 형태로 된다.

$$E(f) = E_D(f) + \lambda E_p(f) \quad (14)$$

여기서 $E_D(f)$ 는 우도에너지함수로서 ML-EM의 경우와 같이 EM 방법에 의해 이를 최소화하는 경우 다음과 같이 기댓값 $E_C[\cdot]$ 에 음수를 취한 것과 같다.

$$\begin{aligned} E_D(f) &= -Q(f|\hat{f}) \\ &= -E_C[\log \Pr(C=c|f)|G=g, \hat{f}] \end{aligned}$$

MAP 방법을 사용한 영상재구성은 식 (14)에 정의된 전체 에너지함수 $E(f)$ 를 최소화 하여 f 를 구하는 것이며 EM 방법에 의해 최소화하는 경우 이를 MAP-EM¹¹ 이라 한다. 식(14)에서 $\lambda=0$ 인 경우 $E_D(f)$ 만을 최소화하게 되므로 이는 ML 알고리즘으로 축소된다. 한편, λ 가 매우 큰 경우 식 (14)에서 $E_p(f)$ 의 비중이 커지므로 재구성된 영상은 사전정보에 치중된 결과를 초래하게 된다. 즉, 식 (13)과 같은 형태의 사전에너지를 적용할 경우 λ 가 매우 크면 재구성된 영상은 과도하게 평활화되어 미세부분에 대한 중요정보가 상실 될 수 있다. MAP 영상재구성법에서는 사전확률의 선택 뿐 아니라 우도확률과 사전확률의 평형을 조절하는 상수 λ 의 선택이 재구성된 영상의 질에 큰 영향을 미칠 수 있으므로 최적한 λ 의 선택이 매우 중요하다.^{12,13}

MAP 방법에 있어서 우도에너지 항에 해당되는 $E_D(f)$ 는 볼록(convex)함수의 형태를 취하므로 ML-EM의 경우와 동일하게 f 에 대한 미분을 0으로 함으로써 우도에너지를 최소화하는 \hat{f} 를 구할 수 있다. 그러나 사전에너지함수는 경우에 따라 비볼

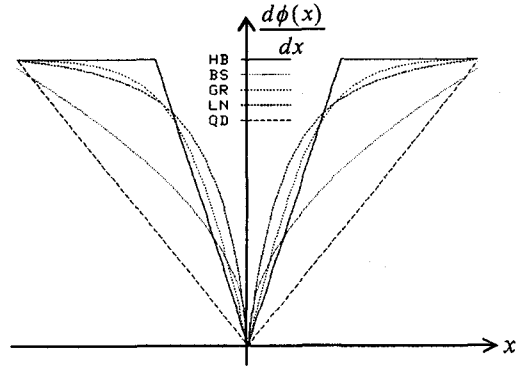


Fig. 7 Qualitative shapes of $\partial\phi(x)/\partial x$ for convex-nonquadratic functions

록(nonconvex)함수가 될 수도 있으므로 식(14)의 전체에너지를 최소화하는 방법은 사전확률분포함수의 유형에 따라 결정된다. 식(13)과 같은 2차함수 형태의 사전에너지를 최소화하는 \hat{f} 의 위치는 포물선의 꼭지점이 되므로 쉽게 구할 수 있다. 그러나 이 경우 영상 내에 임상적으로 중요한 경계(edge)가 존재할 경우 경계선 주변의 화소값 차이가 클수록 에너지가 급격히 증가하므로 이를 최소화하기 위해 강제로 화소값의 차이가 최소화되도록 할 경우 경계부분이 과도하게 평활화되어 중요한 정보가 손실 되기 쉽다.

한편, 경계보존의 기능이 있는 비볼록함수 형태의 사전에너지를 사용할 경우 전체에너지함수에 다수의 극값이 존재하므로 볼록함수의 경우에 비해 최소값의 위치를 찾기가 매우 어렵다.^{11,14} 이러한 단점을 보완하기 위해 사전에너지가 볼록함수이나 포물선형태가 아닌 비2차함수를 사용함으로써 경계보존기능 뿐 아니라 최소화의 용이성을 함께 고려한 사전에너지에 관한 연구결과가 다수 소개되었는데 Fig. 6은 이 중 대표적인 에너지함수의 예를 보인 것이다.¹⁵ 여기서 QD(quadratic)는 식(13)과 같이 2차함수 (또는 포물선) 형태의 사전에너지를 의미하고, 나머지 함수들은 제안자들의 이름을 약자로 표기한 것이다. 즉 HB: Huber¹⁶, BS: Bouman and Sauer,¹⁷ GR: Green,¹⁸ LN: Lange¹⁹ 이다. 각 에너지함수가 가지는 평활강도(strength of smoothing)²⁰는 $\partial\phi(x)/\partial x$ 를 통해 표현될 수 있는데 Fig. 7에 나타난 바와 같이 2차함수 QD의 경우 화소간의 밝기 차이 x 가 증가할수록 정비례하여 평활강도가 증가

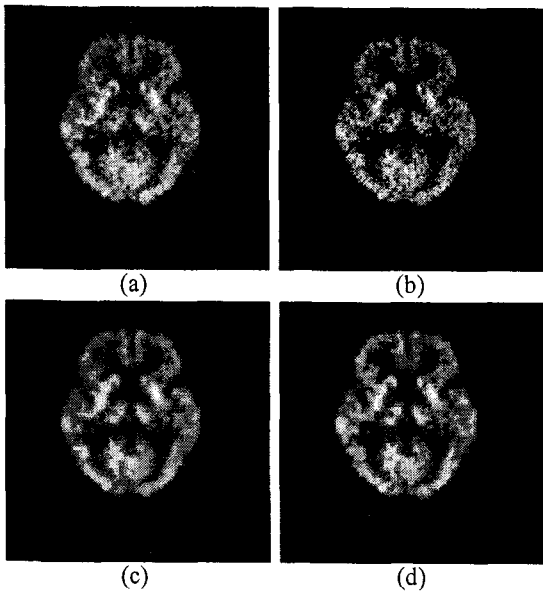


Fig. 8 Qualitative comparison of PET reconstructions:
 (a) FBP. (b) ML-EM (30 iterations). (c) MAP with quadratic QD prior. (d) MAP with convex-nonquadratic BS prior.

하는 반면, 그 외의 비2차함수들은 평활강도의 기울기가 x 의 증가에 따라 차츰 감소함을 알 수 있다. 이는 경계주변에서 화소간의 밝기차이가 어느 정도 이상인 경우 과도하게 평활화하지 않고 경계를 보존할 수 있도록 하기 위함이다. 특히 HB 에너지함수의 경우 특정 x 값 이상에서는 평활강도를 일정하게 함으로써 더 이상 증가하지 않도록 하였다. 이와 같이 다양한 사전에너지함수 중에서 어떤 유형을 선택하느냐 하는 것은 사전에너지함수의 유형별로 사용될 최적화 알고리즘의 정확성과 효율성에 의해 결정된다. 즉 사전에너지함수의 유형에 따라 전체에너지를 최소화하는 방법 및 이의 정확성, 그리고 연산소요시간 등이 다를 수 있으므로 이들을 종합적으로 고려한 최적함수가 선택되어야 한다.

Fig. 8은 GE Advance PET 스캐너를 사용하여 뇌영상재구성을 비교한 것이다. FBP 영상의 경우 Hanning window를 적용하였음에도 불구하고 방사형태의 잡음이 영상 전체에 걸쳐 강하게 나타날 뿐 아니라 미세부분의 명암대비가 통계학적방법에 비해 저조함을 알 수 있다. ML-EM의 경우 30회의 반

복연산 결과 육안 상으로 가장 적절한 영상이 얻어졌으며 FBP의 결과에 비해 방사형태의 잡음이 전혀 없고 명암대비도 개선되었다. 한편, MAP 방법 중 볼록-2차인 QD 사전에너지함수를 적용한 경우 잡음이 현저히 감소되는 대신 세부적인 경계정보가 유실된 반면, 볼록-비2차인 BS 사전에너지함수를 적용한 경우 잡음이 감소됨은 물론 미세경계도 양호하게 보존되어 선명도가 향상됨을 알 수 있다.

5. 영상재구성 알고리즘의 가속화

앞에 서술된 영상재구성 알고리즘들 중에서 FBP를 제외한 대부분의 알고리즘들은 투사 또는 투사-역투사의 반복연산을 사용하므로 영상재구성에 소요되는 연산시간이 반복연산의 횟수에 따라 결정된다. 일반적으로 ML-EM의 경우 20~50회의 반복연산이 필요하며 MAP-EM의 경우 100~300회의 반복연산이 요구된다. 따라서 ML-EM 및 MAP-EM의 소개 이후 ML과 MAP 방법의 장점을 유지하되 최소한의 반복연산으로 수렴된 해를 얻기 위한 가속화된 영상재구성법에 관한 연구가 중요한 주제로 대두되었다.

EM 기반 알고리즘의 가속화 방법으로 Hudson과 Larkin에 의해 소개된 OS-EM (ordered subsets EM)²¹ 알고리즘은 기존 ML-EM의 장점을 최대한 유지하고 반복연산의 횟수를 현저히 감소시킬 수 있는 알고리즘으로 오랜 기간에 걸쳐 많은 연구자들의 관심을 끌었으며 최근에는 실제 임상에도 적용되는 사례가 점차 늘고 있다. OS-EM의 경우 기존의 EM 알고리즘의 수식을 그대로 사용하는 대신 투사데이터를 여러개의 부분집합(subset) (또는 블록(block))으로 분할하여 투사 및 역투사 연산을 부분집합 단위로 수행한다. 부분집합의 개수가 N 인 경우 알고리즘의 수렴속도는 N 배로 증가한다. 예를 들어 $N=16$ 인 경우 기존의 EM에서 32회의 투사-역투사 반복연산 결과를 단 2회 만에 얻을 수 있다. OS-EM은 이와 같이 ML-EM의 반복연산 횟수를 현저히 감소시킬 수 있는 장점이 있는 반면 부분집합의 개수 N 이 증가할수록 최종 해가 ML-EM의 정확한 해 \hat{f} 에서 점차 멀어지는 단점이 있다.

Fig. 8은 OS 방법으로 가속화된 MAP 영상재구성²²에서 퍼센트 오차와 반복연산 횟수의 관계를 실험을 통해 그래프로 나타낸 것이다. 화살표로 표

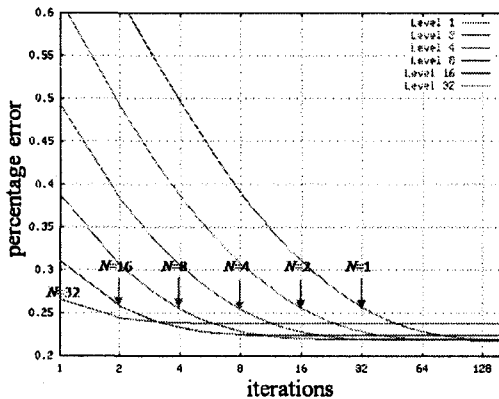


Fig. 9 Percentage errors versus iterations for OS-MAP reconstructions with 6 different OS levels (Each level represents the number of subsets used)

시된 부분의 퍼센트 오차(약 0.27)에 도달하는데 소요되는 반복연산의 횟수를 비교해 보면 $N=1$ 일 때 32회, $N=2$ 일 때 16회, $N=4$ 일 때 8회, ..., $N=32$ 일 때 1회로서 부분집합의 개수가 N 일 경우 반복연산 횟수가 $1/N$ 로 감소됨을 알 수 있다. 그러나 $N=32$ 인 경우의 최소 퍼센트 오차(약 0.27)는 $N \leq 16$ 인 경우의 최소 퍼센트 오차(약 0.22)에 비해 다소 높은 것으로 나타나 OS 방법으로 알고리즘을 가속화할 경우 부분집합의 개수가 과도하게 증가하면 해가 정답에서 점차 멀어짐을 확인할 수 있다.

EM에 기반한 영상재구성 알고리즘은 ML, MAP에 관계없이 EM에서 요구하는 투사-역투사의 연산이 필수적이며 수렴속도가 근본적으로 느리다. 최근에는 통계학적 영상재구성에서 EM의 근본적인 수렴속도 문제를 극복하기 위해 기존의 EM 방법에서 탈피하여 ML 또는 MAP 알고리즘을 직접 유도하기 위한 노력이 시도된 바 있다.^{23,24}

한편 OS 알고리즘이 정확한 해에 수렴하지 않는 단점을 보완하기 위해 수학적으로 수렴성을 증명할 수 있는 개선된 OS 알고리즘²⁵⁻²⁸에 대한 연구 결과도 다수 소개되었는데, 이 중 RAMLA (row-action ML algorithm)²⁵ 알고리즘이 대표적이며 이는 기존의 ML-EM에 비해 20~30배 정도 수렴속도가 빠르면서도 정확한 ML 해를 제공하는 매우 우수한 알고리즘으로 인정되고 있다. 또한 RAMLA

를 ML에서 MAP으로 확장할 수 있도록 수정한 BSREM (block sequential regularized EM²⁶) 알고리즘도 소개되었다. 그러나 이러한 RAMLA/BSREM 알고리즘의 경우 수렴성을 좌우하는 별도의 완화파라미터 (relaxation parameter)가 내재해 있어 이를 적절히 선택하지 않을 경우 올바른 해를 구할 수 없는 단점이 있다. 최근에는 이러한 완화파라미터 없이도 알고리즘의 수렴성이 보장되는 새로운 알고리즘이 소개된 바 있다.^{27,28}

6. 결론

최근의 급속한 컴퓨터 기술의 발달로 과거에는 불가능하였던 대용량 데이터처리와 고속연산이 가능해지면서 고난이도의 수학연산을 필요로 하는 다양한 영상재구성 알고리즘의 구현이 가능해지고 있고 이 중 몇 가지의 대표적 알고리즘들은 이미 실용화 되고 있다. 특히 통계학적 영상재구성 알고리즘의 우수성은 다각도로 검증되어 많은 연구자에 의해 지속적으로 발전되고 있다.

최근에는 통계학적 영상재구성법이 반복연산의 횟수가 최소화되는 방향으로 발전됨에 따라 연산시간의 급속한 단축에 힘입어 과거에 연산시간의 지연으로 불가능 했던 복잡한 물리현상에 대한 보다 정확한 보정을 통해 영상의 질을 향상시키고자 하는 추가적인 연구가 가능해지고 있다. 이 경우 더욱 많은 연산이 요구될 것이므로 지금까지 개발된 알고리즘 보다 더 빠른 알고리즘의 개발이 필요할 것이고 이러한 순환적 발전은 끊임없이 지속될 것으로 예측된다.

영상재구성 알고리즘의 성능은 평가방법 뿐 아니라 응용분야 및 환경에 따라 달리 평가될 수 있으므로 서로 다른 알고리즘을 정확히 비교하기 위해서는 객관적이고도 정량적으로 평가할 수 있는 검증된 체계적 성능평가 방법이 필요하다. 따라서 이에 대한 연구도 영상재구성 알고리즘 자체에 대한 연구 못지않게 중요하며 실제로 이러한 연구가 최근에는 영상재구성을 위한 하나의 중요한 분야로 인식되고 있다.

후기

본 연구는 과학기술부 및 과학재단의 지원을 받아 2007년도 원자력기초공동연구소 과제

(M20508050000-05B0805-00000)를 통해 수행되었음.

참고문헌

1. Cherry, S., Sorenson, J. and Phelps, M., "Physics in Nuclear Medicine (3rd ed.)," Saunders, 2003.
2. Bushberg, J., Leidholdt, E. Jr. and Boone, J., "The Essential Physics of Medical Imaging (2nd ed.)," Lippincott Williams & Wilkins, 2002.
3. Ollinger, J. and Fessler, J., "Positron-Emission Tomography," IEEE Signal Processing Magazine, Vol.14, No.1, pp. 43-55, 1997.
4. Kak, A. and Slaney, M., "Principles of Computerized Tomographic Imaging," PA: SIAM, 2001.
5. Gordon, R., "A Tutorial on ART (Algebraic Reconstruction Techniques)," IEEE Trans. Nucl. Sci., Vol. 21, No. 1, pp. 78-93, 1974.
6. Macovski, A., "Medical Imaging," Prentice-Hall, 1983.
7. Lewitt, R. and Matej, S., "Overview of Methods for Image Reconstruction from Projections in Emission Computed Tomography," Proc. the IEEE, Vol. 91, No. 10, pp. 1588-1611, 2003.
8. Shepp, L. and Vardi, Y., "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography," IEEE Trans. Med. Imag., Vol.1, No.2, pp. 113-122, 1982.
9. Lange, K. and Carson, R., "EM Reconstruction Algorithms for Emission and Transmission Tomography," J. Comput. Assist. Tomog., Vol. 8, No. 2, pp. 306-316, 1984.
10. Geman, S. and Geman, D., "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images," IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.6, No.6, pp. 721-741, 1984.
11. Lee, S., Rangarajan, A. and Gindi, G., "Bayesian Image Reconstruction in SPECT Using Higher Order Mechanical Models as Priors," IEEE Trans. Med. Imaging, Vol.14, No.4, pp. 669-680, 1995.
12. Lee, S., Gindi, G., Zubal, G. and Rangarajan A., "Using Ground-Truth Data to Design Priors in Bayesian SPECT Reconstruction," Bizais, Y., Barillot, C., Paola, D., eds., Information Processing in Medical Imaging, Kluwer Academic Publishers, pp. 27-38, 1995.
13. Zhou, Z. and Leahy, R., "Approximate maximum likelihood hyperparameter estimation for Gibbs priors," IEEE Trans. Med. Imaging, Vol.6, No.6, pp. 844-861, 1997.
14. Lee, S., "Simultaneous Reconstruction and Edge Detection of Tomographic Images Using Accelerated Deterministic Annealing," Optical Engineering, Vol.46, No.5, pp.057006:1-10, 2007.
15. Lee, S., "Performance Comparison of Convex-Nonquadratic Priors for Bayesian Tomographic Reconstruction," Journal of Electronic Imaging, Vol.9, No.3, pp.242-250, 2000.
16. Huber, P., "Robust Statistics," Wiley, 1981.
17. Bouman, C. and Sauer, K., "A Generalized Gaussian Image Model for Edge Preserving MAP Estimation," IEEE Trans. Image Process, Vol.2, No.3, pp. 296-310, 1993.
18. Green, P., "Bayesian Reconstructions from Emission Tomography Data Using a Modified EM Algorithm," IEEE Trans. Med. Imaging, Vol. MI-9, No.1, pp.84 - 93, 1990.
19. Lange, K., "Convergence of EM Image Reconstruction Algorithms with Gibbs Smoothing," IEEE Trans. Med. Imaging, Vol. MI-9, No.4, pp. 439 - 446, 1990.
20. Li, S. "Close-Form Solution and Parameter Selection for Convex Minimization-Based Edge-Preserving Smoothing," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., Vol.20, No.9, pp.916 - 932, 1998.
21. Hudson, H. and Larkin, R., "Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data," IEEE Trans. Med. Imaging, Vol.13, No.4, pp. 601-609, 1994.
22. Lee, S., "Spline-Regularized Ordered Subsets Expectation Maximization Algorithms for Emission Computed Tomography," Journal of Electronic Imaging, Vol.12, No.1, pp. 17-24, 2003.
23. Fessler, J., "Penalized Weighted Least-squares Image Reconstruction for Positron Emission Tomography," IEEE Trans. Med. Imag., Vol.13,

- No.2, pp. 290-300, 1994.
24. Zheng, J., Saquib, S., Sauer, K. and Bouman, C., "Parallelizable Bayesian Tomography Algorithms with Rapid, Guaranteed Convergence," IEEE Trans. Med. Imag., Vol.9, No.10, pp. 1745-1759, 2000.
25. Browne, J. and De Pierro, A. "A Row-Action Alternative to The EM Algorithm for Maximizing Likelihoods in Emission Tomography," IEEE Trans. Med. Imaging, Vol. 15, No. 5, pp. 687 - 699, 1996.
26. De Pierro, A. and Yamagishi, M., "Fast EM-Like Methods for Maximum a Posteriori Estimates in Emission Tomography," IEEE Trans. Med. Imaging, Vol.20, No.4, pp. 280 - 288, 2001.
27. Hsiao, I., Rangarajan, A., Khurd, P. and Gindi, G., "An Accelerated Convergent Ordered Subset Algorithm for Emission Tomography'," Phys. Med. Biol., Vol.49, No.11, pp. 2145-2156, 2004.
28. Ahn, S. and Fessler, J., "Globally convergent image reconstruction for emission tomography using relaxed ordered subsets algorithms," IEEE Trans. Med. Imaging, Vol.22, No.5, pp. 613-626, 2003.