

가상모드를 이용한 비감쇠 진동계 입력성형기 설계 방법

홍성욱*, 최훈석⁺, 서용규⁺, 박상원⁺
(논문접수일 2008. 8. 21, 심사완료일 2008. 11. 11)

A Method of Input Shaper Design Using Virtual Mode for Undamped Vibration Systems

S. W. Hong*, H. S. Choi⁺, Y. G. Seo⁺, S. W. Park⁺

Abstract

Input shaping is an efficient tool to eliminate transient and residual vibration caused by motion of mechanical systems. However, the rise time of the systems tends to increase due to the presence of input shapers. This paper is concerned with the rise time reduction when using input shaping. To this end, this paper proposes an input shaper design method for an undamped single mode vibration system using a virtual mode, which is not an actual mode but reflected in the design process. The essence of the proposed method is to design a three-impulse input shaper as if a single mode system has two modes: one actual mode and one virtual mode. The natural frequency of the virtual mode is a design parameter to change the rise time of the system. This paper discusses the performance of the proposed input shapers by simulation.

Key Words : Input Shaping(입력성형), Response Time(응답속도), Virtual Mode(가상모드), Input Shaper Duration(입력성형기 지속시간), Rise Time(상승시간)

1. 서론

최근 산업용 기계류는 경량화, 고속화를 추구하고 있다. 기계의 경량화, 고속화는 기계를 구동하는 연료의 절감 및 생산성 향상이라는 장점을 얻게 되지만 시스템의 유연화로 인해 출발 또는 정지 시에 과도한 잔류진동(Residual vibration)

을 발생시킨다. 특히 감쇠가 크지 않은 시스템에서는 잔류진동 문제가 심각하게 발생할 수 있다. 잔류진동을 억제하기 위한 많은 연구들이 수행되었는데 입력성형기법(Input shaping method)은 최근 활발히 연구되고 있는 잔류진동 제어기법 중 하나이다^(1,2). 입력성형기법은 시스템의 진동특성에 따라 결정되는 입력성형기(Input shaper)와 기준입력명령을 권

* 금오공과대학교 기계공학부 (swhong@kumoh.ac.kr)
주소: 730-701 경북 구미시 양호동 1번지
⁺ 금오공과대학교 기전공학과

블루션(Convolution)하여 시스템에 인가하여 잔류진동을 억제하는 방법이다. 입력성형기법은 다양한 산업용 기계에 응용되었는데 크레인이 그 대표적인 예이다⁽³⁻⁵⁾. 또한 고속 캠운동⁽⁶⁾이나 고속 스테이지에서 발생하는 진동을 제거하기 위해 응용되는 등⁽⁷⁻⁹⁾ 많은 응용 사례가 있다. 입력성형기법은 잔류진동을 제거하는데 효과적이어서 다양한 산업용 기계류에 응용되었는데 잔류진동 제거라는 이익을 얻는 반면 응답속도의 지연이라는 손실이 발생한다. 대량생산 체계를 필요로 하는 반도체, LCD 등의 제조공정에서는 이송계에서의 이런 시간지연이 큰 결점으로 작용할 수 있다.

본 논문에서는 비감쇠 진동시스템에서 발생하는 잔류진동을 효과적으로 제거하면서 응답속도를 개선할 수 있는 입력성형 방법을 제안하고자 한다. 특히 여기서는 상승시간(Rise time)을 원하는 값으로 설정할 수 있는 방법을 제안하고자 한다.

제안된 입력성형기 설계방법은 제어하고자 하는 모드 외에 가상모드(Virtual mode)를 추가하여 다모드(Multi-mode) 입력성형기를 설계하는 것이다^(10,11). 이때 설계자가 상승시간을 고려하여 가상모드를 설정함으로써 입력성형기의 지속시간을 결정할 수 있도록 한다. 본 논문에서 사용된 다모드 입력성형기설계법은 저자들이 제안한 방법^(10,11)을 이용하였다. 크레인을 비롯하여 감쇠가 극히 적고 잔류진동이 문제가 되는 비감쇠진동계를 대상으로 제안한 새로운 입력성형의 개념에 대해 논의했고, 입력성형기를 결정하는 과정을 설명하였다. 또한 제안된 입력성형 방법의 특성을 평가하였다.

2. 가상모드를 이용한 입력성형기 설계 개념

본 논문에서 제안하고자 하는 가상모드 개념은 기본적으로 다모드 입력성형기를 기반으로 하고 있다. 일반적인 다모드 입력성형기법에 의하면 고려하고 있는 모드별로 입력성형기를 결정한 후 이를 모두 컨볼루션해야 하기 때문에 그 지속시간(Shaper duration)이 각 모드별 입력성형기 지속시간의 합이 된다. 따라서 지속시간이 크게 증가하게 된다. 입력성형의 적용에 의해 잔류진동은 제거할 수 있지만 상승시간이 증가하고 궁극적으로 시스템응답속도의 지연으로 시스템 성능이 저하되는 결과를 가져올 수 있다.

2개 이상의 모드에 의한 진동을 효과적으로 제거하면서 지속시간을 줄이기 위한 방법들이 연구되었는데 그 중의 하나가 임펄스의 수를 최소화하여 지속시간을 줄이는 방법이다^(10,11). 이 방법은 n개의 모드에 대하여 n+1개의 임펄스 열을 취하는 방법으로서 주파수대역별로 다양한 해가 구해지

는데, 특히 입력성형기의 지속시간에 관하여 의미있는 결과를 얻을 수 있다.

Fig. 1은 2개의 모드를 갖는 시스템에서 첫 번째 고유진동수를 1Hz로 두고 두 번째 고유진동수를 변화시킬 때 입력성형기 지속시간을 나타내었다. 계산에는 한 개의 비감쇠 모드만이 주된 진동모드인 경우로 한정하였으며, Fig. 2에서 볼 수 있는 바와 같이 3개의 임펄스를 갖는 입력성형기를 고려하였다. 본 연구에서는 입력성형기 지속시간의 최소화를 목표로 하고 있으므로 Fig. 1에서 굵은 선으로 나타낸 지속시간의 하한선($t = 2/(f_s + f_v)$)에 주목하도록 한다.

그림에서 확인할 수 있는 바와 같이 두 번째 고유진동수가 증가할수록 입력성형기의 지속시간이 감소하게 되며 특히 본 예제의 경우 두 번째 고유진동수가 3Hz를 넘게 되면 단일모드에 대한 고전적인 입력성형기인 ZV(Zero Vibration)⁽²⁾보다 지속시간이 낮아짐을 확인할 수 있다. 가상모드는 이와 같이 2개의 모드를 고려한 경우가 단일모드만을 고려한 경우보다 지속시간이 짧아질 수 있다는 점에 착안한다. 즉, 단일모드 시스템에 실존하지 않는 가상의 두 번째 모드가

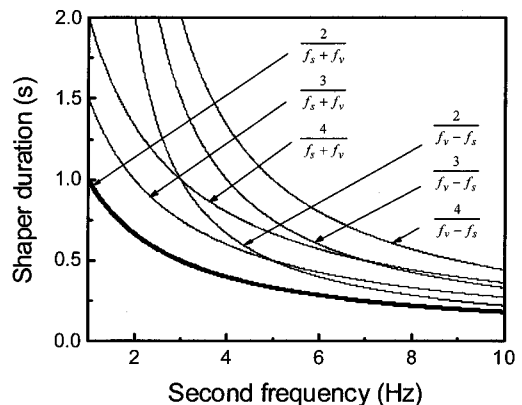


Fig. 1 Shaper duration with the second frequency varied for two mode system(1st mode = 1Hz)

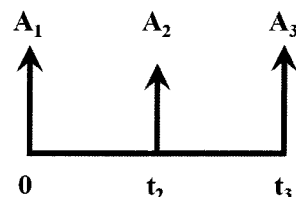


Fig. 2 Impulse amplitude and time location of the impulse input shaper

있다고 가정하여 입력성형기를 설계함으로써 입력성형기의 지속시간을 줄이는 방법이다. 이와 같이 도입된 가상모드의 고유주파수를 가상주파수라 정의하였고, 가상주파수를 증가시키면 입력성형기의 지속시간을 줄일 수 있다. 따라서 입력성형기 지속시간을 변경할 수 있는 설계변수가 된다.

3. 가상모드를 이용한 입력성형기 설계 및 특성 검토

3.1 가상모드를 이용한 입력성형기 이론

가상모드를 이용한 입력성형기 설계에는 다모드 입력성형기 계산알고리즘을 필요로 한다. 본 연구에서 사용한 다모드 입력성형기 설계기법은 참고문헌에서 제시한 방법^(10,11)을 이용하였으며 주요 내용이 부록에 정리되어 있다. 부록에서 소개한 바와 같이 가상모드를 포함한 2 모드 입력성형기 설계를 위한 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-ts_1} e^{-ts_2} \\ 1 & e^{-ts_2} e^{-ts_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

본 논문에서는 s_1 은 실제모드의 고유치를 s_2 는 가상모드의 고유치를 의미한다. 또, Fig. 2에서 보인 바와 같이 t_2, t_3 는 각각 두 번째와 세 번째 임펄스의 인가시간을 의미하며, t_3 는 입력성형기 지속시간이 된다. 비감쇠 진동계로 한정하여 고유치를 다음과 같이 둔다.

$$s_1 = j2\pi f_s, s_2 = j2\pi f_v \quad (2)$$

여기서 f_s, f_v 는 각각 실제주파수와 가상주파수이다.

식 (1)에 식 (2)를 대입하여 나오는 결과식을 실수부와 허수부로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos(2\pi f_s t_2) & \cos(2\pi f_s t_3) \\ 1 & \cos(2\pi f_v t_2) & \cos(2\pi f_v t_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3a)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(2\pi f_s t_2) & \sin(2\pi f_s t_3) \\ 0 & \sin(2\pi f_v t_2) & \sin(2\pi f_v t_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3b)$$

식 (3b)가 비당연해(Non-trivial solution)를 가질 조건에서

$$\frac{\sin(2\pi f_s t_2) \sin(2\pi f_s t_3)}{\sin(2\pi f_v t_2) \sin(2\pi f_v t_3)} = 0 \quad (4)$$

식 (4)는 두 개의 변수를 가지므로 일반해를 구하기 위해서는 추가적인 조건식이 필요하다. 여기서 임펄스 간 시간간격이 균일하다고 가정하자. 즉 $t_3 = 2t_2$ 라 두고, 식 (4)에서 행벡터가 0이 되는 부정해조건(Indefinite Condition)을 배제하여 정리하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\cos(2\pi f_s t_2) = \cos(2\pi f_v t_2) \quad (5)$$

식 (5)와 같은 조건을 만족하는 시간 t_2 를 구하면 다음과 같다.

$$t_2 = \frac{m}{f_v \pm f_s}, m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

또한, 식 (6)을 식 (3b)에 대입하여 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$A_2 = -2\cos(2\pi f_s t_2) A_3 \quad (7)$$

식 (6)에서 최소시간, 즉 $t_2 = \frac{1}{f_v + f_s}$ 을 식 (7)과 식 (3a)에 대입하면 다음과 같은 임펄스 크기를 얻을 수 있다.

$$A_1 = A_3 = \frac{1}{2(1 - \cos 2\pi f_s^*)} \quad (8a)$$

$$A_2 = -\frac{\cos 2\pi f_s^*}{1 - \cos 2\pi f_s^*} \quad (8b)$$

여기서

$$f_s^* = \frac{f_s}{f_s + f_v}$$

Fig. 3은 앞의 결과를 이용하여 구한 무차원 가상주파수와 입력성형기 무차원 최소지속시간의 관계를 보여주고 있다. 여기서 무차원 가상주파수 및 무차원 지속시간 f^*, t^* 은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$f^* = \frac{f_v}{f_s}, t^* = f_s t_3 \quad (9)$$

Fig. 3을 이용하면 임의의 시스템 고유진동수에 대해 입력성형기 지속시간을 설정할 수 있게 된다. 한편 Fig. 4는 무차원 가상주파수의 증가에 따른 입력성형기 형태의 변화를 나타낸다. Fig. 4(a)는 ZV 성형기에 해당되며 시스템의 반주기만큼 지속시간을 갖는다. Fig. 4(b)부터 가상주파수가 증

가하면서 두 번째 임펄스가 음의 방향으로 형성되고 입력성형기의 지속시간이 단축됨을 확인할 수 있다. Fig. 4 (c), (d)에서는 두 번째 임펄스의 크기가 음의 방향으로 증가하면서 지속시간이 더 단축되었다. 이와 같이 입력성형기에 음의 임펄스를 포함시키는 것은 양의 임펄스만 존재하는 입력성형

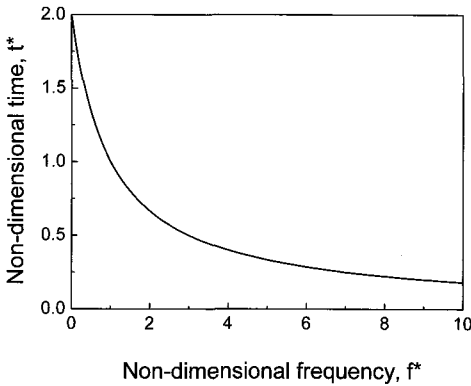


Fig. 3 Non-dimensional shaper duration with respect to non-dimensional frequency

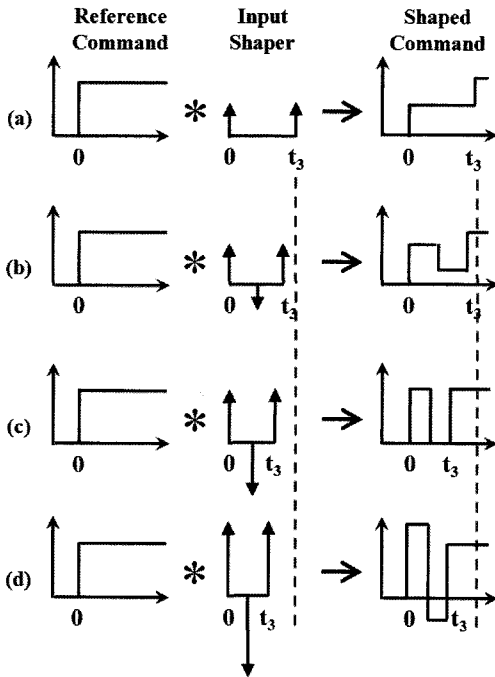


Fig. 4 Input shapers and associated shaped commands for step reference command

기보다 더 효과적인 결과를 줄 수 있고⁽⁶⁾ 이 점은 입력성형기를 설계하는데 있어 유용하다.

Fig. 3에서 확인한 바와 같이 가상모드 입력성형기 결정에 도입한 가상주파수가 증가할수록 입력성형기의 지속시간이 단축된다. 따라서, 가상주파수는 입력성형 지속시간을 결정하는 설계변수로 이용할 수 있다. 일반적으로, 단일모드 입력성형에서 많이 쓰이는 ZV성형기는 시스템의 반주기만큼의 지속시간을 갖게 되는데 가상모드 입력성형기 설계방식에 의하면 $f^* = 3 (f_v = 3f_s)$ 의 관계가 성립될 때이다. 또한 $f^* = 5 (f_v = 5f_s)$ 일 때 가상모드 입력성형기는 UMZV(Unity Magnitude Zero Vibration) 성형기⁽²⁾와 그 결과가 같아지게 된다.

그 밖에도 무차원 가상주파수가 1일 때는 ZVD(Zero Vibration and Derivative)⁽²⁾의 결과를 주게 된다. 이것은 시스템의 고유진동수가 중복인 경우로 취급됨으로서 얻어지는 결과이다.

이상 설명한 바와 같이, 제안한 설계방법은 기존의 단일모드 입력성형기를 모두 포함하여 결과를 제공하게 되므로 더욱 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

3.2 입력성형기 설계 및 특성

가상주파수가 시스템 고유진동수의 3배 이상으로 커지면 입력성형기 지속시간은 시스템에 대한 ZV성형기보다 단축되고 5배 이상에서 UMZV성형기보다 낮은 지속시간을 얻을 수 있다.

Fig. 5는 무차원 가상주파수를 0부터 10까지 증가시켰을 때 입력성형기 임펄스 크기 변화를 나타낸 그림이다. $f^* = 0.5, 2$

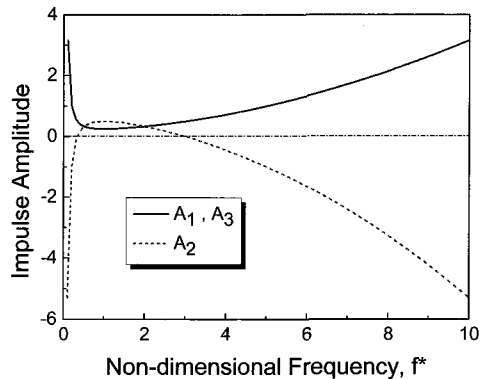


Fig. 5 Impulse amplitudes with respect to non-dimensional frequency

일 때 세 임펄스가 모두 0.333으로서 그 크기가 같다. $f^*=3$ 일 때는 ZV성형기와 동일한 결과로서 A1, A3의 크기가 0.5이고 A2의 크기는 0 이다. $f^*=5$ 일 때는 A1, A3의 크기가 1이고 A2의 크기는 -1이 되는 UMZV가 된다. 한편, $0 < f^* < 1$ 의 구간에서는 Fig. 3에서 확인한 바와 같이 입력성형기 지속시간이 단일모드 입력성형기 보다 나빠지므로 입력성형기로 유용하지 않다.

$f^* > 5$ 일 때부터는 임펄스 크기가 모두 1을 초과하게 된다. 이 구간의 값에서는 임펄스 크기의 증가로 기준입력과 임펄스의 컨볼루션으로 생성된 성형입력이 기준입력보다 그 절대치가 커지게 됨으로써 입력장치에서 포화(Saturation)가 발생할 수 있게 된다. 그러나 실제적으로 대부분의 시스템은 입력장치에 대해 어느 정도의 여유를 두게 되므로 임펄스 크기가 1을 초과하게 되더라도 일정한 부분 까지는 포화 없이 적절한 동작을 할 수 있을 것으로 생각된다.

Fig. 6은 무차원 지속시간과 임펄스 크기의 관계를 나타낸 그림이다. 지속시간을 작게 하기 위해서는 임펄스의 크기가 커져야 함을 알 수 있다. 지속시간이 증가할수록 임펄스 크기가 점차 감소하게 되고 $t^*=0.333$ 에서 임펄스의 크기가 1이 된다. 이때가 UMZV 성형기와 동일하게 된다. 그러나 지속시간이 일정값 이상의 큰 값을 택하게 되면 임펄스들의 크기는 다시 증가하게 된다. 이 구간은 기존의 입력성형기보다 지속시간이 길어지게 되는 구간으로서 실제 유용하게 사용될 수 없다.

이상의 계산을 통해 입력성형기 지속시간을 줄이기 위해 활용할 수 있는 가장 유용한 가상주파수는 f^* 가 5보다 크며 입력장치의 포화를 일으키지 않는 한계값이 됨을 알

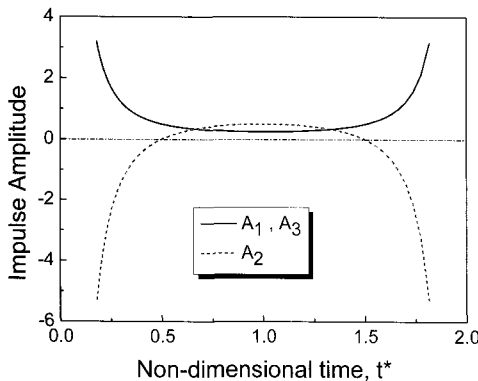


Fig. 6 Impulse amplitude with respect to non-dimensional time

수 있다. 일반적으로 입력장치가 통상의 입력에 대해 100% 이상을 허용한다면 A1, A3의 크기에 의해 지속시간 감축이 제한되는데, 입력장치가 통상의 입력에 대해 120%까지를 허용한다면 $f^* \cong 5.6, t^* \cong 0.3$ 를, 150%까지 허용한다면 $f^* \cong 6.5, t^* \cong 0.2667$ 를 얻을 수 있다.

3.3 가상모드 입력성형기에 의한 응답 특성

시스템의 실제 응답에 미치는 영향을 살펴보기 위해 실제 고유진동수가 1Hz인 비감쇠 단일모드 시스템에 대해 가상주파수 변화에 따라 설계된 입력성형기를 적용했을 때의 시스템 응답을 분석하였다. Fig. 7은 가상주파수의 변화에 따라 입력성형된 계단입력을 시스템에 가했을 때 응답의 변화를 3차원적으로 도시한 것이다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 조건에 상관없이 오버슈트나 잔류진동이 발생하지 않는 것을 알 수 있다. 특히, 가상주파수가 증가할수록 응답속도가 향상됨을 알 수 있다.

3.4 가상모드 입력성형기의 강건성 평가

가상모드를 이용하게 되면 입력성형기의 지속시간을 낮춤으로 인해 시스템 응답속도를 개선할 수 있음을 확인할 수 있다. 그러나 설계된 입력성형기가 모델링 오차에 어느 정도 강건함을 갖는지 평가할 필요가 있다. 입력성형기의 강건성(Robustness)은 민감도곡선(Sensitivity curve)을 통하여 시각화할 수 있다⁽²⁾. Fig. 8은 가상주파수가 3Hz부터 10Hz까지 변화할 때 민감도곡선을 3차원으로 도시한 것이다. 가상주파수가 3Hz이면 ZV성형기가 되고 이와 비교하여 강건성을 평가하였다. ZV성형기와 비교하여 가상주파수에 의해 민감도가 미소하게 변화됨을 알 수 있다.

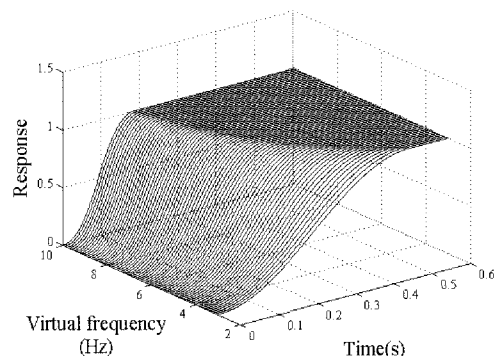


Fig. 7 3-D shaped step response with the virtual frequency varied

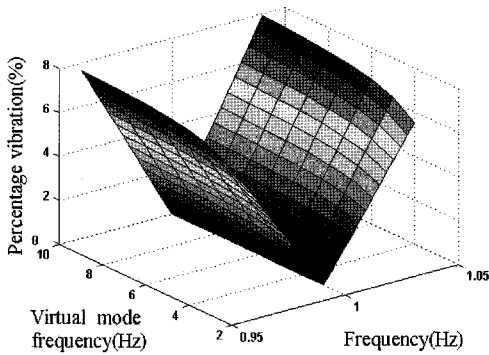


Fig. 8 3-D sensitivity curve with respect to virtual frequency and modeling error

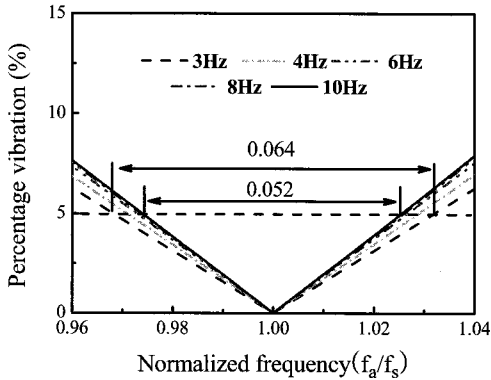


Fig. 9 5% vibration sensitivity frequency ranges for ZV shaper and the proposed input shapers

강건성에 대한 정량적 평가를 위해 5% 잔류진동 허용주파수 범위를 고려하였다. 정량화 방법에 대한 설명을 위해 Fig. 9에는 5% 잔류진동 허용주파수 범위를 확대된 민감도 곡선 위에 가상주파수별로 표시하였다. Fig. 10은 이로부터 얻어낸 5% 잔류진동 허용주파수의 범위를 가상주파수별로 나타낸 결과이다. 가상주파수가 3Hz일 때 5% 잔류진동의 허용범위는 0.064정도이고 가상주파수가 10Hz일 때 0.052까지 감소하였다. 결국 여기서는 강건성에 있어 약 13%의 감소를 보였다. 그러나 지속시간의 경우 0.5초에서 0.091초로 단축됨으로서 ZV에 비해 1/5 미만의 지속시간을 얻을 수 있으므로 강건성에서의 손실 보다는 상대적으로 응답속도 개선에 더 큰 효과를 볼 수 있다고 판단된다. 특히, Fig. 10에 의하면 가상주파수의 증가에 따라 5% 잔류진동 허용주파수가 일정한 값에 수렴하는 경향을 보이므로 가상주파수의 증가에 따른 입력성형기 강건성에서의 손실은 거의 추가되지

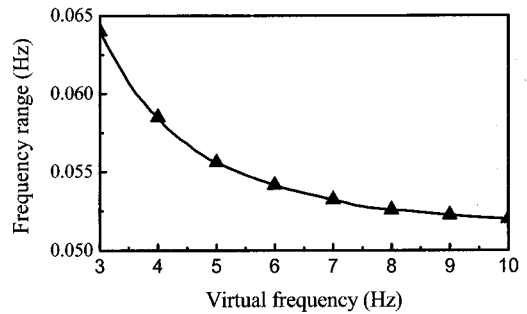


Fig. 10 Variation of the 5% vibration sensitivity frequency range with the virtual frequency varied

않음을 알 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 입력성형기 지속시간 단축을 위한 새로운 입력성형기 설계 방법을 제안하였다. 이를 위해 비감쇠 단일 모드 시스템에 대해 추가로 한 개의 가상모드를 설정하여 2 모드 시스템으로 가정하여 설계하는 방법을 제안하였다. 다모드 입력성형기 설계방법으로는 임펄스 개수를 최소화할 수 있는 새로운 입력성형 방법을 이용하였다. 도입된 가상주파수가 증가할수록 입력성형기의 지속시간을 단축할 수 있음을 이론 및 시뮬레이션을 통해 확인하였다. 또한 가상모드 도입에 따른 입력성형기 지속시간 단축효과가 강건성 감소보다 더 크게 작용하는 것을 확인하였다. 한편, 가상주파수의 증가에 따라 입력성형기의 시간길이 단축이 가능하지만 임펄스의 크기가 증가하기 때문에 시스템의 출력 한계치를 초과하지 않는 범위에서 적절한 가상주파수의 결정이 필요하다. 제안된 방법은 기존의 입력성형기 설계방법을 개선한 것이며 실험적으로 손쉽게 구현할 수 있으므로 실제 조건에서 유용하게 사용될 수 있을 것으로 생각된다.

후 기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비 지원에 의해 연구 되었으며 연구비 지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

(1) Singer, N. C. and Seering, W. P., 1990, "Preshaping

Command Inputs to Reduce System Vibration,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 112, pp. 76~82.

- (2) Singhose, W. E. and Seering, W. P., 2007, *Command Generation for Dynamic Systems*, Lulu.com, USA
- (3) Singhose, W., Porter, L., Kenison, M., and Krikkku, E., 2000, “Effects of Hoisting on the Input Shaping Control of Gantry Cranes,” *Control Engineering Practice*, Vol. 8, pp. 1159~1165.
- (4) Sorensen, K. A., Huey, J., Singhose, W., Lawrence, J., and Frakes, D., 2006, “Human Operator Performance Testing Using an Input-Shaped Bridge Crane,” *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 128, pp. 835~841.
- (5) Sorensen, K., Singhose, W., and Dickerson, S., 2007, “A Controller Enabling Precise Positioning and Sway Reduction in Bridge and Gantry Cranes,” *Control Engineering Practice*, Vol. 15, pp. 825~837.
- (6) Andresen, U. and Singhose, W., 2004, “A Simple Procedure for Modifying High-Speed Cam Profiles for Vibration Reduction,” *ASME J. of Mechanical Design*, Vol. 126, pp. 1105~1108.
- (7) Park, S. W., Hong, S. W., Choi, H. S., and Jang, J. W., 2008, “Dynamic Modeling and Input Shaping Control of a Positioning Stage,” *Trans. KSMTE*, Vol. 17, No. 2, pp. 83~89.
- (8) Park, S. W., Hong, S. W., Choi, H. S., and Singhose, W. E., 2007, “Discretization Effect of Real-time Input Shaping in Residual Vibration Reduction for Precise XY Stage,” *Trans. KSMTE*, Vol. 16, No. 4, pp.71~78.
- (9) Jang, J. W., Park, S. W., and Hong, S. W., 2008, “Command Generation Method for High-speed and Precise Positioning of Positioning Stages,” *J. of the KSPE*, Vol. 25, No. 10, pp. 122~129.
- (10) Hong, S. W., Park, S. W., and Danielson, J., 2008, “A New Method for Manufacturing Machine Vibration Reduction Using Multi-mode Input Shapers,” *Proc. of the 2008 International Symposium on Flexible Automation*, Atlanta, GA, USA.
- (11) Park, S. W., Hong, S. W., and Danielson, J., 2008, “A New Design Method of Multi-mode Input Shapers

to Eliminate Residual Vibration in Dynamic Systems,” *Submitted to J. of the KSPE*.

부록 : 다모드 입력성형기 설계 방법⁽¹⁰⁾

다모드 입력성형기는 서로 다른 크기와 시간을 갖는 다중의 임펄스들의 조합으로 나타낼 수 있으므로 n개의 모드를 고려한 입력성형기 임펄스 열은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$i_n(t) = A_1\delta(t-t_1) + A_2\delta(t-t_2) + \dots + A_{n+1}\delta(t-t_{n+1}) \quad (A1)$$

여기에서 A_k 는 $k=1, \dots, n+1$ 일 때 k번째 임펄스의 크기를 나타내고, t_k 는 $k=1, \dots, n+1$ 일 때 k번째 임펄스의 시간이다. 첫 번째 임펄스의 시간을 0이라 하면 식(A1)은 라플라스 영역에서 식 (A2)와 같이 표현할 수 있다.

$$I_n(s) = A_1 + A_2e^{-ts} + A_3e^{-2ts} \dots + A_{n+1}e^{-t_{n+1}s} \quad (A2)$$

시스템이 안정하고 관련된 고유치들이 모두 저감쇠라고 하면 식 (A3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k = -\zeta_k\omega_{ok} + j\omega_{ok}\sqrt{1-\zeta_k^2}, k=1, 2, \dots, n \quad (A3)$$

여기에서 ζ_k 와 ω_{ok} 는 각각 k번째 감쇠비와 고유진동수이며 ω_k 는 $\omega_k = \omega_{ok}\sqrt{1-\zeta_k^2}$ 로 정의되는 k번째 감쇠고유진동수이다. 각 고유치의 공액복소수 또한 시스템의 고유치가 된다.

다모드 시스템의 잔류진동을 발생시키지 않기 위해서는 가해진 입력이 시스템의 극점을 가진시키지 말아야 한다. 이를 위해 입력성형기의 영점이 시스템이 가진 극점, 즉 고유치에 대응되도록 한다. 즉, 입력성형기가 모든 모드에 대해 진동을 발생시키지 않도록 하기 위해서는 다음의 식을 만족해야 한다.

$$I_n(s_k) = 0, k=1, 2, \dots, n \quad (A4)$$

식 (A4)는 각각 2개의 실수방정식으로 분리될 수 있는 복소 비선형방정식으로 구성되었다. 따라서 식의 총개수는 2n개가 된다. 구해야 할 미지수가 2n+1이므로 해를 구하기 위한 식이 하나가 더 필요하다. 임펄스 크기의 합은 1이 되어야 하므로

$$I_n(0) = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n+1} = 1 \quad (A5)$$

식 (A4)와 (A5)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-t_2 s_1} & \dots & e^{-t_{n+1} s_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & e^{-t_2 s_n} & \dots & e^{-t_{n+1} s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ A_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A6})$$

식 (A6)은 t_k, A_k 의 미지수로 이루어진 복소 비선형행렬 방정식이다. 식 (A6)을 풀기 위한 해법의 하나로 아래와 같은 정의식이 유용하다.

$$\text{norm}(\epsilon) = \text{norm} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-t_2 s_1} & \dots & e^{-t_{n+1} s_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & e^{-t_2 s_n} & \dots & e^{-t_{n+1} s_n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ A_{n+1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad (\text{A7})$$

식 (A7)의 벡터오차 절대값을 0으로 만드는 해를 찾으려면 원하는 계수들을 얻을 수 있다.