

강성구속 조건을 갖는 구조물의 신뢰성기반 위상최적설계

김상락*, 박재용⁺, 이원구⁺, 유진식⁺, 한석영⁺⁺

(논문접수일 2008. 8. 19, 심사완료일 2008. 10. 9)

Reliability-Based Topology Optimization for Structures with Stiffness Constraints

Sang-Rak Kim*, Jae-Yong Park⁺, Won-Goo Lee⁺, Jin-Shik Yu⁺, Seog-Young Han⁺⁺

Abstract

This paper presents a Reliability-Based Topology Optimization(RBTO) using the Evolutionary Structural Optimization (ESO). An actual design involves some uncertain conditions such as material property, operational load and dimensional variation. The Deterministic Topology Optimization(DTO) is obtained without considering the uncertainties related to the uncertainty parameters. However, the RBTO can consider the uncertainty variables because it has the probabilistic constraints. In order to determine whether the probabilistic constraints are satisfied or not, simulation techniques and approximation methods are developed. In this paper, the reliability index approach(RIA) is adopted to evaluate the probabilistic constraints. In order to apply the ESO method to the RBTO, sensitivity number is defined as the change in the reliability index due to the removal of the *i*th element. Numerical examples are presented to compare the DTO with the RBTO.

Key Words : Reliability-Base Topology Optimization(신뢰성기반 위상최적화), Reliability Index Approach(신뢰도 지수 접근법), Evolutionary Structural Optimization(진화적 구조 최적화), Sensitivity number(민감도수), Reliability Index(신뢰도지수)

1. 서론

기존의 최적설계는 설계변수나 설계파라미터들을 불변의 값으로 고려하여 최적설계를 수행하기 때문에 결정론적 최적설계(deterministic design optimization)로 불린다. 하지

만 실제 설계과정에서 재료의 물성치, 하중, 치수공차 등의 각종 설계변수들은 불확실성(uncertainty)을 갖게 된다. 결정론적 최적설계는 설계과정에서 이 같은 불확실성이 목적 함수나 제약조건에 미치는 영향을 고려치 못하기 때문에 최적설계 결과가 주어진 제약조건에 대한 만족여부에 대한 신뢰성

* 한양대학교 기계공학과
+ 한양대학교 일반대학원 기계공학과
++ 교신저자, 한양대학교 기계공학부 (syhan@hanyang.ac.kr)
주소: 133-719 서울시 성동구 행당1동

을 떨어뜨리게 된다.

반면, 신뢰성 기반 최적설계(reliability-based design optimization)는 제약조건을 만족시키지 못할 확률로 정의되는 확률론적 제약조건을 이용하므로 불확실성들을 고려한 최적 설계를 수행할 수 있다. 즉 설계상의 불확실성을 고려하여 설계자가 요구하는 신뢰성을 만족시키면서 목적함수를 최소화 하는 해를 구하는 최적화 방법으로 신뢰성 기반 위상최적 화에 대한 많은 연구가 진행되고 있다⁽¹⁻⁴⁾.

확률제한조건의 위반 확률을 구하는 방법으로는 크게 추출법(sampling method)과 시스템 응답 함수를 근사화 하여 파괴 확률의 상대적 지표인 신뢰도지수(reliability index)를 구하는 방법인 급속확률적분법(fast probability integration method)이 있다.

몬테카를로 시뮬레이션(monte carlo simulation)⁽⁵⁾은 대표적인 추출법중 하나로서 시스템 응답 함수를 그대로 사용하기 때문에 다른 신뢰도 해석 기법들에 비하여 쉽고 간단하며 정확한 방법이다. 하지만 어느 정도의 정확성을 확보하기 위해서는 많은 회수의 실험이나 시뮬레이션을 필요로 하는 단점이 있다.

급속확률적분법은 시스템 응답 함수를 1차 또는 2차로 근사화 하여 파괴 확률의 상대적 지표인 신뢰도지수(reliability index)를 구하는 방법이다. 이 같은 근사화 방법을 이용한 신뢰성 해석 기법에는 신뢰도지수를 제한조건으로 하는 신뢰도지수 기반 접근법(RIA, Reliability Index Approach)과 신뢰도지수의 역함수를 사용하여 확률 조건을 계산하는 목표성능치 접근법(PMA, Performance Measure Approach)이 있다^(6,7).

위상 최적화기법중의 하나인 진화적 구조 최적화 기법^(8,9)(ESO기법, Evolutionary Structural Optimization method)은 Xie 와 Steven에 의해 제안되었으며 2차원 문제에서부터 3차원 문제에 이르기까지 최적형상을 얻을 수 있도록 한 위상최적화 방법에 관한 이론이다. ESO기법의 기본 개념은 구조물에 작용하는 외적 환경조건에 대응하여 불필요한 부재, 즉 비효율적인 부재를 제거해 나가는 것으로부터 시작하여 점차적으로 최적의 구조형태를 형성해 나가는 것이다.

본 논문에서는 ESO기법을 이용한 신뢰성 기반 위상최적화(RBTO, Reliability-Based Topology Optimization)를 수행하기 위하여 ESO기법에서 요소제거 기준이 되는 민감도수를 급속확률적분법인 RIA를 이용하여 정의하였다. 재료물성치와 작용하중이 각각 그리고 함께 불확실성을 갖는 경우에 대하여 강성제약조건을 갖는 외팔보의 신뢰성기반 위상최적화를 수행하였고 그 결과를 결정론적 위상최적화(DTO, Deterministic Topology Optimization)의 결과와 비교하였다. 본 논문에서 정의한 민감도수의 계산을 위해서

MATLAB⁽¹⁰⁾을 이용하여 구조물의 유한요소해석을 수행하고, 그 결과를 이용하여 신뢰성지수의 계산을 위해 필요한 한계상태방정식을 정의하였다.

2. 신뢰성 기반 최적설계

신뢰성 기반 최적설계는 결정론적 최적설계에서 결정론적 제약조건을 사용하여 문제를 정의하는 것과 달리 설계변수와 함께 불확실성을 고려하기 위하여 다음과 같은 확률론적 제약조건을 이용하여 정의하게 된다.

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & F(d) \\ \text{S.t.} \quad & P[g(d, X) \leq 0] \leq P_f \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 g 는 한계상태식(limit state function), d 는 설계변수이고 X 는 불확실성을 포함하는 확률변수이다. 확률제한 조건은 시스템의 실패확률이 목표실패 확률 P_f 보다 작아야 함을 의미한다. 시스템의 실패확률이란 제약조건이 만족되지 못할 확률 즉, 제약조건이 위배될 확률을 의미한다.

신뢰성 기반 최적설계에서 확률제한조건의 만족여부를 판별하기위한 방법으로는 추출법과 급속확률적분법이 있다. 추출법의 경우는 우수한 정확도를 가지지만 그 효율이 떨어지는 단점이 있기 때문에 급속확률적분법이 주로 사용되고 있다.

신뢰도지수와 실패확률의 관계 $\beta_i = -\Phi^{-1}(P_f)$ 로부터 급속확률적분법인 RIA를 사용할 경우 최적화 문제는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \text{Volume} \\ \text{S.t.} \quad & \beta_{\text{target}} - \beta \leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 β 는 현 설계에서 신뢰도지수를 의미하고 β_{target} 은 목표 신뢰도지수를 나타낸다. 이 경우 확률제한조건의 만족 여부 판별을 위하여 신뢰도지수를 계산하기 위한 내부 최적화가 필요하다.

확률변수들이 정규분포이며 서로 확률적으로 독립일 때 신뢰도 지수는 확률변수의 표준정규분포 공간에서 선형 근사화 된 한계상태방정식과 원점 사이의 최단거리로 정의된다. 신뢰도지수의 정의에 의해 신뢰도지수 산정을 위한 내부 최적화 문제는 다음과 같이 정식화 된다.

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \beta = \|u\| = \sqrt{u^T u} \\ \text{S.t.} \quad & g(u) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 u 는 정규분포인 확률변수를 표준정규분포로 변환한 것을 의미한다. 신뢰도지수는 식 (3)으로 정식화되는 최

적화문제를 풀이하여 쉽게 구해질 수 있다.

3. 진화적 구조 최적화 기법

진화적 구조 최적화 기법은 균질화법⁽¹¹⁾이나 밀도함수법⁽¹²⁾ 등의 위상최적화 기법에 비하여 그 개념이 간단하고 적용이 쉬운 위상최적화 기법이다. ESO기법의 기본 개념은 최적위상을 얻기 위해 비효율적인 요소를 점차적으로 제거해 나가는 것으로서, ESO기법은 보통의 유한요소프로그램에 쉽게 적용이 가능하고 복잡한 계산을 필요치 않는 장점이 있다.

구조물의 설계 영역을 설정하고 하중조건에 따라 발생하는 처짐량이나 설계자가 요구하는 한계 질량을 구조조건으로 하여 각 요소의 민감도수(sensitivity number)를 비교하여 작은 값 순으로 해당 요소를 제거하는 알고리즘을 반복해서 수행함으로써 최적위상을 구할 수 있다.

3.1 결정론적 위상최적설계의 민감도수 정의

정 강성 제한조건을 갖는 구조물에 대한 민감도수는 다음과 같이 정의된다. 유한요소법에서 구조물의 정적거동은 다음과 같이 표현된다^(8,9).

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad (4)$$

여기서 $[K]$ 는 강성행렬, $\{u\}$ 는 절점변위벡터이고 $\{P\}$ 는 작용하중 벡터이다. 구조물의 변형률 에너지는 다음과 같이 정의된다.

$$C = \frac{1}{2} \{P^T\} \{u\} \quad (5)$$

이 식으로부터 정강성을 최대화시키는 것은 변형률 에너지를 최소화 시키는 것과 같다는 사실을 알 수 있다. n 개의 유한요소들로 이루어진 구조물로부터 i 번째 요소가 제거되었다면, $[\Delta K] = [K^*] - [K] = -[K^i]$ 와 같이 강성행렬은 변하게 될 것이다. 강성행렬에서 $[K^*]$ 는 i 번째 요소가 제거된 후의 결과 구조물에 대한 강성행렬이며 $[K^i]$ 는 i 번째 요소의 강성 행렬이다. 요소의 제거가 하중벡터 $\{P\}$ 에는 아무런 영향을 주지 않는다고 가정하고 고차항을 무시하면 식 (4)로부터 변위벡터의 변화가 다음과 같음을 알 수 있다⁽¹³⁾.

$$\{\Delta u\} = -[K]^{-1} [\Delta K] \{u\} \quad (6)$$

또, 식 (5)와 (6)으로부터 변형률 에너지의 변화량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta C &= \frac{1}{2} \{P\}^T \{\Delta u\} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right) \{P\}^T [K]^{-1} [\Delta K] \{u\} \\ &= \frac{1}{2} \{u^i\}^T [K^i] \{u^i\} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $\{u_i\}$ 는 i 번째 요소의 변위벡터이다. 그러므로 강성제약조건을 갖는 문제에 대한 민감도수는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\alpha_i = \left(\frac{1}{2}\right) \{u^i\}^T [K^i] \{u^i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

이는 i 번째 요소의 제거로 인한 변형률 에너지의 변화를 나타내며 C 와 α_i 는 항상 양의 값을 가진다.

일반적으로 한 요소가 제거될 때, 구조물의 강성은 감소하며 따라서 변형률 에너지는 증가한다. 요소를 제거함으로써 이러한 목적을 달성하기 위한 가장 효과적인 방법은 C 의 증가를 최소화 할 수 있도록 가장 작은 α_i 의 값을 가지는 요소를 제거하는 것이다.

3.2 신뢰성 기반 위상최적설계의 민감도수 정의

변위 제약조건을 갖는 경우 신뢰도지수를 구하는데 사용되는 한계상태방정식은 식 (4)로부터 다음과 같이 정의된다.

$$g = [r] \{P\} - \delta_{allow} \quad (9)$$

여기서 $[r]$ 은 $[K]^{-1}$ 에서 최대 변위가 발생하는 노드의 자유도에 해당하는 행의 원소들로 이루어진 행벡터이다. 이때의 신뢰도지수는 식 (9)를 이용하여 식 (3)과 같이 정의되는 최적화 문제를 풀이하여 구할 수 있다.

i 번째 요소의 제거로 인한 변위벡터의 변화량을 나타내는 식 (6)으로부터 i 번째 요소가 제거되었을 때 변위 벡터는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} \{u\} &= \{u\} + \{\Delta u\} \\ &= [K]^{-1} \{P\} - [K]^{-1} [\Delta K] \{u\} \end{aligned} \quad (10)$$

이때의 한계상태방정식은 다음과 같이 정의된다.

$$g^i = [r] \{P\} - [r] [\Delta K] \{u\} - \delta_{allow} \quad (11)$$

여기서 식 (11)은 i 번째 요소가 제거되었을 때의 한계상태 방정식을 의미하게 되고, i 번째 요소의 제거되었을 때 신뢰도지수는 식 (11)을 이용하여 식 (3)과 같이 정의되는 최적화 문제를 풀이하여 구할 수 있다.

요소가 제거될 때 구조물의 강성은 감소하여 강성제약조건을 만족시킬 확률은 감소하게 된다. 요소제거로 인한 제약조건을 만족시킬 확률의 감소를 최소화하기 위해서는 요소가 제거되었을 때 신뢰도지수의 변화량이 가장 작은 값을 가지는 요소를 제거해야 함을 알 수 있다.

그러므로 신뢰성기반 위상최적화를 수행하기 위한 민감도수는 i 번째 요소가 제거되었을 때 신뢰성 지수의 변화량으로 정의 할 수 있다.

$$\alpha^i = \beta - \beta^i \quad (12)$$

여기서 β 는 현재 위상에 대한 신뢰성지수이며 β^i 는 i 번째 요소가 제거된 위상의 신뢰성지수이다.

구조물의 신뢰성기반 위상최적화는 다음과 같은 반복과정을 통하여 수행되어진다.

- 단계1. 유한요소 모델링을 수행한다.
- 단계2. 유한요소 해석을 수행한다.
- 단계3. 식 (9)를 이용하여 현재 위상의 신뢰도지수 β 를 계산한다.
- 단계4. 식 (12)를 이용하여 i 번째 요소가 제거되었을 때 β^i 를 계산하고, β 와의 차로 각 요소의 민감도수를 계산한다.
- 단계5. 제거율에 따라 가장 작은 민감도수를 갖는 요소 순으로 요소를 제거한다.
- 단계6. 확률제약조건을 만족할 때까지 단계1에서 5를 반복한다.

4. 외팔보의 위상최적화

ESO법이 신뢰성을 고려한 위상최적화에 적용가능한 지를 알아보기 위하여 Fig. 1과 같은 외팔보에 대하여 RBTO를 수행하고 DTO의 결과와 비교하였다. 외팔보의 치수는 $L=0.16m$, $h=0.10m$ 그리고 $t=0.0005m$ 이다. 재료의 물성치 $E=200$ GPa, 푸아송비 $\nu=0.3$ 이며 자유단에 작용하는 하중은 $P=3000kN$ 이다. 변위 제약조건은 최대변위가 $1.5mm$ 를 넘어서지 않아야 한다고 설정하였다. 설계영역은 총 32×20 의 사각형 요소로 나누었다. 위상최적화를 위하여 ESO기법을 이용하였으며, RBTO를 위해서는 급속확률적 분법인 RIA를 이용하였다.

신뢰성 기반 위상최적화를 수행하기 위하여 다음의 예제들에서 정의되는 확률변수들은 모두 정규분포특성을 갖고 확률적으로 서로 독립이며 평균값에 대하여 각각 10%의 표

준편차를 갖는다고 가정하였다.

DTO문제를 정식화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \text{Volume} \\ \text{S. t.} \quad & g = \delta_{\max} - 1.5 \leq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

목표 신뢰도지수를 $\beta_{\text{target}} = 3$ 으로 정의하여 신뢰성 기반 위상최적화 문제를 정식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & \text{Volume} \\ \text{S. t.} \quad & \beta_{\text{target}} - \beta \leq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)의 제약조건에서 신뢰도지수 3에 해당하는 실패확률은 $P_f = 0.135\%$ 이다. Fig. 2는 제거율 1%로 주어진 문제에 대한 DTO를 수행한 결과이다.

위상최적화 과정에서 요소들이 하나의 절점으로 연결되는 체커보드패턴이 나타나게 되는데, 체커보드패턴의 발생은 유한요소해석에서 해석오차를 야기하며 생산성을 저해하는 문제점을 가지고 있다. 본 논문에서는 이러한 체커보드패턴의 발생을 억제하기 위하여 각 절점의 민감도수의 평균을 이용하여 각 요소의 민감도수를 계산하는 체커보드 패턴 완화기법⁽¹³⁻¹⁶⁾과 체커보드 패턴 발생 유무를 판단하는 함수를 이용한 방법⁽¹⁴⁻¹⁶⁾을 이용하였다.

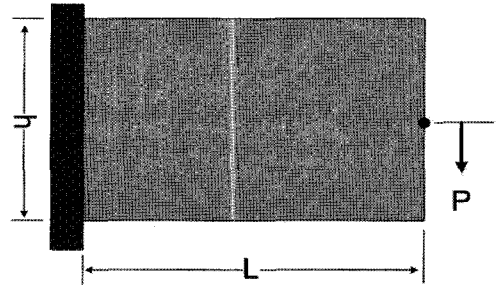


Fig. 1 Design domain

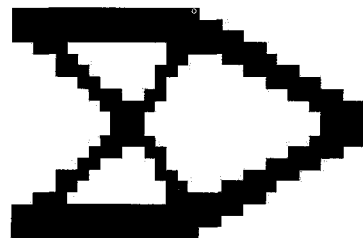


Fig. 2 Optimal topology of DTO

4.1 하나의 불확실성을 포함하는 경우의 RBTO

재료의 물성치가 불확실성을 포함하는 확률변수인 경우에 대해 RBTO를 수행한 결과를 Fig. 3에 나타내었고 그 결과 값들을 DTO의 결과와 비교하여 Table 1에 정리하였다. RBTO의 경우 신뢰도지수가 3.003으로 목표 신뢰도지수 3에 가까운 신뢰도지수를 갖는 최적 위상이 구해졌음을 알 수 있다. Table 1로부터 RBTO의 경우가 DTO의 위상에 비해 더 좋지 못한 목적함수 값을 갖게 됨을 확인할 수 있다. 이는 DTO의 결과가 신뢰도지수 0.0242인 것을 보았을 때 더 높은 신뢰성을 갖기 위해서는 좀 더 나쁜 목적함수 값을 가져야 함을 알 수 있다. Fig. 4는 RBTO 최적 위상과 동일한 체적을 갖는 경우에 대한 DTO의 최적 위상이다. Table 1과 Fig. 4로부터 RBTO가 불확실성을 고려하므로 해서 DTO에 비해 더 효과적인 위상최적화를 수행하였음을 확인할 수 있다.

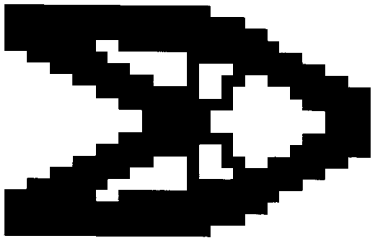


Fig. 3 Optimal topology of RBTO with 1 uncertainty variable

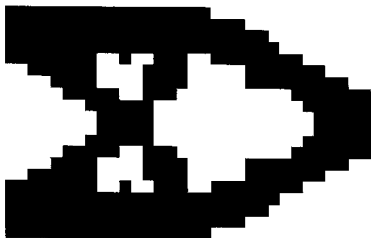


Fig. 4 Topology of DTO with the volume equal to RBTO result

Table 1 Comparison between DTO and RBTO with one uncertainty

	Volume(%)	Deflection	Reliability Index
DTO	38.44	1.4963	0.0242
RBTO	55.31	1.0495	3.0030
DTO*	55.31	1.1213	2.5244

4.2 둘 이상의 불확실성을 포함하는 경우의 RBTO

재료의 물성치와 더불어 작용하중 P가 불확실성을 포함하는 확률변수인 경우에 대하여 RBTO를 수행하였다. 이들 확률변수의 확률분포는 정규분포이며 각각 평균에 대해 10%의 표준편차를 갖고 서로 확률적으로 독립이라고 가정하였다.

RBTO를 수행한 결과는 Fig. 5와 같다. RBTO와 DTO의 최적 위상을 비교하여 Table 2에 정리하였다. Table 2로부터 확률변수가 둘 이상인 경우에도 앞서 수행된 결과와 유사하게 요구하는 신뢰도지수를 만족함을 확인하였으며 확률변수가 하나인 경우에 비하여 더 나쁜 목적함수 값을 가짐을 알 수 있다.

RBTO의 최적 위상과 동일한 체적을 갖는 DTO의 위상의 경우 더 큰 변위로 인하여 RBTO보다 더 작은 신뢰도지수를 가짐을 알 수 있다. 이 결과로부터 불확실성을 갖는 요소가 증가할수록 목적함수는 더 나쁜 값을 가지게 되며, RBTO가 DTO에 비해 더 우수한 위상을 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

5. 결론

ESO기법을 이용한 신뢰성기반 위상최적화를 수행하여 목표 신뢰도지수를 만족하는 결과를 얻었다. 위상최적화를 위하여 ESO기법을 사용하였으며 신뢰성기반 위상최적화를 수행하기 위하여 ESO기법에서 요소 제거의 기준이 되는 민감

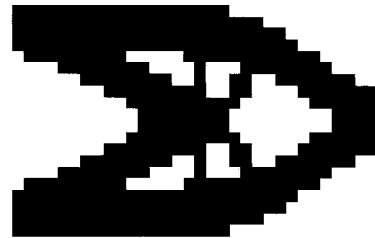


Fig. 5 Optimal topology of RBTO with 2 uncertainty variable

Table 2 Comparison between DTO and RBTO with two uncertainties

	Volume(%)	Deflection	Reliability Index
DTO	38.44	1.4963	0.0172
RBTO	60	0.9661	2.9923
DTO*	60	1.0947	2.1822

DTO*: The result of DTO with the volume equal to RBTO result.

도수를 신뢰도지수의 변화량으로 정의하여 RBTO를 수행하였다.

확률계약조건의 만족 여부판정을 위하여 한계상태방정식의 선형 근사화를 이용한 RIA를 이용하였으며 한계상태방정식은 유한요소해석의 요소방정식으로부터 유도하였다. RBTO의 경우 DTO에 비하여 좋지 못한 목적함수 값을 갖게 됨을 확인하였는데, 이는 요구하는 신뢰도지수를 만족시키기 위함임을 알 수 있었고, 재료의 물성치가 불확실성인 경우 RBTO와 DTO의 신뢰도지수의 차는 약 0.4786이고, 재료의 물성치와 작용하중이 불확실성인 경우 RBTO와 DTO의 신뢰도지수의 차는 약 0.8101로써, 두 예제의 결과로부터 불확실성이 증가하는 경우 RBTO와 DTO의 신뢰성지수의 차는 더 커짐을 확인하였다.

이 같은 결과들로부터 본 연구에서 제안한 민감도수를 이용하여 ESO기법을 이용한 신뢰성기반 위상최적화의 수행이 가능함을 확인할 수 있었다.

후 기

이 논문은 2008년도 2단계 두뇌한국 21사업에 의하여 지원되었음.

참 고 문 헌

- (1) Kim, C. I., Wang, S. M., Bae, K. R., and Moon, H. G., 2006, "Reliability-Based Topology Optimization with Uncertainties," *Int. J. KSME.*, Vol. 20, No. 4, pp. 494~504.
- (2) Bang, S. H. and Min, S. J., 2006, "Reliability-Based Topology Optimization Using Single-Loop Single-Vector Approach," *KSME.*, Vol. 30., No. 8, pp. 889~896.
- (3) Jung, H. S. and Cho, S. H., 2004, "Reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures with loading and material uncertainties," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 43, pp. 311~331.
- (4) Kim, C. I., Wang, S. M., Hwang, I. H., and Lee, J. G., 2007, "Application of Reliability-Based Topology Optimization for Microelectromechanical Systems," *AIAA J.*, Vol. 45, pp. 2926~2934.
- (5) Buslenko, N. P., Golenko, D. I., Shreider, Y. A., Sobol, I. M., and Sragowich, V. G., 1964, *The Monte Carlo Method*, Pergamon Press, New York.
- (6) Lee, J. O., Yang, Y. S., and Ruy, W. S., 2002, "A Comparative study on reliability and target-performance-based probabilistic structural design optimization," *Computers and Structure*, Vol. 80, pp. 257~269.
- (7) Youn, B. D., Choi, K. K., and Park, Y. H., 2003, "Hybrid Analysis Method for Reliability-Based Design Optimization," *ASME. J. Mech. Desing*, Vol. 125, pp. 221~232.
- (8) Chu, D. N., Xie, Y. M., Hira, A., and Steven, G. P., 1996, "Evolutionary Structural Optimization for problems with stiffness constraints," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 21, pp. 239~251.
- (9) Xie, Y. M. and Steven, G. P., 1997, *Evolutionary Structural Optimization*, Springer-Verlag, London.
- (10) Kwon, Y. W. and Bang, H. C., 2000, *The Finite Element Method Using MATLAB, Second Edition*, CRC press LLC, Florida.
- (11) Bendsoe, M. P. and Kikuchi, N., 2004, "generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 71, pp. 197~224.
- (12) Mlehnec, H. P., and Schirmacher, R., 1993, "An Engineer's Approach to Optimal Material Distribution & Shape Finding," *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 106, pp. 1~26.
- (13) Li, Q., Steven, G. P., and Xie, Y. M., 2001, "A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization," *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 22, pp. 230~239.
- (14) Polusen, T. A., 2002, "A simple scheme to prevent checkerboard patterns and one-node connected hinges in topology optimization," *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 24, pp. 396~399.
- (15) Han, S. Y., Kim, M. S., Hwang, J. S., Choi, S. H., Park, J. Y., and Lee, B. J., 2007, "Development of a Material Mixing Method for Topology Optimization of PCB Substrate," *Trans. of KSMTE.*, Vol. 16, No. 1, pp. 47~52.
- (16) Han, S. Y., Choi, S. H., Park, J. Y., Hwang, J. S., and Kim, M. S., 2007, "Topology Optimization of a Vehicle's Hood Considering Static Stiffness," *Trans. of KSMTE.*, Vol. 16, No. 1, pp. 69~74.