

## DEA에서 교차효율성의 공격적 정형화\*

임성묵\*\*

### An Aggressive Formulation of Cross-efficiency in DEA\*

Sungmook Lim\*\*

#### ■ Abstract ■

We propose a new aggressive formulation of cross-efficiency in Data Envelopment Analysis (DEA). In the traditional aggressive formulation, the efficiency score of a test DMU is maximized as the first goal while an average of efficiency scores of peer DMUs is minimized as the second goal. The proposed model replaces the second goal with the minimization of the best efficiency score of peer DMUs. We showed the model is a quasi-convex optimization problem, and for a solution method we developed a bisection method whose computational complexity is polynomial-time. We tested the model on 200 randomly generated DEA problems, and compared it with the traditional model in terms of various criteria. The experimental results confirmed the effectiveness and usefulness of the proposed model.

Keyword : Data Envelopment Analysis, Efficiency, Cross-efficiency

## 1. 서론

자료포괄분석(Data Envelopment Analysis, DEA)은 일단의 투입 요소를 소비하여 일단의 산출 요소를 생산해내는 비영리 조직의 성과를 평가하기 위한 모형으로서 Charnes et al.[8]에 의해 개발되

었다. 활용 분야도 광범위하여 학교, 병원, 은행, 공공기관 등을 비롯한 많은 조직의 제조 및 서비스 운영 성과를 비교·평가하기 위한 모형으로 널리 이용되어 왔으며, 활용 범위도 확대되어 다기준(multi-criteria) 의사결정문제를 해결하는 하나의 기법으로서 일반적으로 인식되고 있다[9]. DEA 모

논문접수일 : 2008년 01월 06일 논문게재확정일 : 2008년 11월 13일

논문수정일(1차 : 2008년 05월 29일, 2차 : 2008년 08월 08일)

\* 본 연구는 고려대학교 특별연구비에 의하여 수행되었음.

\*\* 고려대학교 경상대학 경영학부

형을 활용한 다양한 응용 연구로는 교육 프로그램 [13], 정보기술 투자[17], 마케팅[10], 조립 라인 균형 문제[15], 야구 선수[18], 은행[14], 병원[6] 등을 예로 들 수 있다.

DEA는 다수의 투입 요소와 산출 요소를 가지는 동질의 의사결정단위(Decision Making Unit, DMU)들에 대해 그 효율성을 평가하는 모형으로써, 산출 요소의 가중 합을 투입 요소의 가중 합으로 나눈 값을 효율성 점수(efficiency score)로 정의하고 그 값이 1인 DMU를 효율적이라고 한다. 투입·산출 요소에 부여되는 가중치는 평가 대상이 되는 DMU의 입장에서 가장 유리한 방향으로 설정하는데, DEA에서는 이러한 가중치를 구하는 모형으로 선형계획법을 활용한다. DEA는 선형계획법을 이용하여 조직의 효율성을 산출합과 동시에, 비효율적인 조직에 대해서는 벤치마킹 대상을 제공한다. 또한, 비효율적인 조직이 효율적이 되기 위해 투입 요소 및 산출 요소에 어느 정도의 개선이 이루어져야 하는지에 대한 정보도 제공한다. 그러나 DEA가 조직의 효율성에 대한 진단 도구로서의 역할은 하지만 비효율적인 조직이 효율적으로 바뀌기 위해 필요한 전략적 대안을 제시해주지는 못한다[20].

한편, DEA를 통해 개선의 목표로 삼을 수 있는 벤치마킹 대상이 도출될 수는 있지만 한계점 또한 존재한다. 벤치마킹 대상 설정과 관련하여 기존 문헌들에서 언급되고 있는 문제점 중 하나는 비효율적인 조직과 그 벤치마킹 대상 간에 본질적으로 운영 측면의 동질성이 결여될 수도 있다는 점이다. 이러한 문제점을 극복하기 위해, 서로 유사한 특성을 가지는 DMU들을 서로 군집화한 후 한 군집 내에서 가장 우수한 성능을 보이는 DMU를 동일 군집 내 다른 DMU들의 벤치마킹 대상으로 설정하는 클러스터링 방법이 제안되기도 하였다[12, 21]. 두 논문에서는 DMU들을 군집화하는 기준으로 교차효율성(cross-efficiency)[16]을 활용하였는데, 두 개의 DMU A와 B가 주어졌을 때 교차효율성은 다음과 같이 정의된다. DMU A가 자신에게 가장

유리한 가중치로 DMU B를 평가하여 얻어진 효율성 값을 'DMU A에 의한 DMU B의 교차효율성'이라고 한다. 자기 자신에 의한 자기 자신의 교차효율성이 바로 전통적인 DEA에서의 단순효율성(simple efficiency)이 된다. 그리고 하나의 DMU의 교차효율성은 전체 DMU의 개수 만큼의 길이를 가지는 하나의 벡터로 표현될 수 있는데, 이는 자신을 포함한 모든 DMU를 평가 주체로 하여 구해지기 때문이다. 위에서 언급한 두 연구에서는, 각 DMU들의 교차효율성 벡터에 대해 다중상관분석을 수행하여 서로 유사한 DMU들을 군집화하였다.

교차효율성은 효율적인 DMU 간의 성능 서열을 판별하거나, 전반적인 성능 관점에서 DMU의 효율성을 평가하여 비합리적인 방식으로 효율적이라는 판정을 받는 특이한 DMU를 배제시키고 진정으로 효율적인 DMU를 선별하는 방법에도 활용되었다. DEA가 가지는 단점 중 하나는 효율적이라고 판명되는 DMU의 수가 상대적으로 많다는 것이다. Charnes and Cooper[7]는 DMU의 전체 개수가 투입 요소 및 산출 요소 전체 개수의 3배 이상이어야만 대체적으로 효율적인 DMU와 그렇지 않은 DMU의 개수 간의 균형이 이루어진다고 하였다. 따라서 효율적이라고 판명된 DMU들 간에도 성능 비교가 필요한 경우가 상황에 따라 발생할 수 있는데, 이 때 교차효율성을 분석하여 그들 간의 성능 서열을 도출하기도 한다[3]. 한편, 전통적인 DEA에서는 투입·산출 요소에 부여되는 가중치에 최소한의 제약만 부과하는데, 이에 따라 어떤 의사결정단위는 자신에게 유리한 투입·산출 요소에 비정상적으로 큰 가중치를 주고 나머지 요소들은 완전히 무시하는 등의 비합리적인 방식을 취함으로써 효율적인 조직으로 평가받을 수도 있다. 이러한 유형의 의사결정단위를 Doyle et al. [12]은 매버릭(maverick)이라고 불렀으며, 효율성 점수가 1보다 작아 비효율적이라고 판명된 의사결정단위들 중에서도 전반적 성능 관점에서 사실상 이들보다 더 우수한 것들이 존재할 수 있다. 교차효율성은 이러한 매버릭을 분별하고 전반적으로

성능이 우수한 DMU를 판별하는데 유용하다[16].

교차효율성을 통해 DMU들을 평가하는 방식이 유용하기는 하나 한계점 또한 존재한다. 즉, 선형 계획법을 통해 구해지는 투입·산출 요소의 가중치가 유일하지 않고, 이에 따라 교차효율성 또한 유일하지 않으며 이는 교차효율성을 활용한 DMU 성능 평가 방법의 유효성을 해치는 요인이 된다. 이러한 문제는 주어진 DMU의 효율성 점수를 가장 크게 만들어주는 투입·산출 요소의 가중치를 구하기 위해 형성하는 선형계획법 모형에서 평가 대상이 되는 해당 DMU만을 고려할 뿐, 모형을 통해 구해지는 가중치로 나머지 DMU들은 평가할 때 어떤 결과가 나올지는 전혀 고려치 않기 때문에 발생한다. Sexton et al.[16]과 Doyle et al.[12]은 평가 대상인 DMU의 단순효율성을 최대화함과 동시에 해당 DMU를 제외한 나머지 DMU들로 구성된 평균 DMU의 교차효율성을 최소화하도록 하는 2단계 선형계획법 모형을 제안하였고 이를 공격적 정형화(aggressive formulation) 방법이라고 하였다. 이 방법은 평가 대상인 자신에게는 가장 유리하지만 나머지 DMU들에는 평균적으로 최대한 불리하도록 투입·산출 요소들의 가중치를 설정한다는 자연스러운 가정을 기반으로 하고 있으며, 이 과정에서 평가 대상 DMU가 어떤 투입·산출 요소를 강조해야 다른 DMU들과의 차별성을 부각시킬 수 있는지 식별할 수 있다는 장점이 있다[11]. 한편, Talluri[19]는 평가 대상인 하나의 DMU와 나머지 DMU들을 차례로 쌍을 지어 평가하는 모형을 제안하였는데, 평가 대상인 DMU는 자신의 단순효율성을 최대화함과 동시에 짝이 지어지는 일련의 DMU들의 교차효율성은 최소화하였다. Doyle et al.[12]의 모형과 달리, 이 모형에서는 짝이 지어지는 경쟁 상대에 따라 평가 대상 DMU가 취하는 투입·산출 요소 가중치가 달라진다는 특징이 있다.

앞에서 살펴보았듯이, 교차효율성은 DEA에서 중요한 의미를 가지며 다양한 용도로 활용될 수 있다. 즉, 단순효율성을 대체하거나 보완할 수도 있고, 매버릭을 구별하여 DMU들 간의 실질적 효

율성 서열을 결정하는데 활용될 수도 있다. 또한, 평가 대상 DMU가 다른 DMU와의 차별성을 극대화하기 위해 강조해야 할 자신의 강점과 약점을 식별하는데도 사용될 수 있다[20].

본 연구에서는 DEA에서의 교차효율성이 가지는 중요도에 주목하고, Doyle et al.[12]의 공격적 정형화 방법을 수정하여 보다 자연스럽고 실용적으로 의미 있는 방식의 새로운 모형과 그 해법을 제안하고자 한다. 즉, 평가 대상인 DMU를 제외한 나머지 DMU들의 평균 교차효율성을 최소화하는 것이 아니라, 나머지 DMU들 중 제일 우수한 DMU의 교차효율성을 가장 나쁘게 만드는 방식으로 교차효율성을 산출하는 모형을 제안한다. 이는 자신을 부각시키고자 할 때 나머지 DMU 전체를 비교 대상으로 하기보다는 그들 중 제일 우수한 DMU만을 나쁘게 만들어 그 격차를 벌이는 방식이 더 효과적일 수 있다는 이해를 바탕으로 한다.

논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 DEA 모형, 단순효율성 및 교차효율성의 정의 등 관련 배경 이론을 소개하고, 제 3장에서는 본 연구에서 제안하는 새로운 교차효율성의 공격적 정형화 방법을 설명한다. 제 4장에서는 제안한 모형에 대한 다항 시간 복잡도의 해법을 개발하고, 제 5장에서는 Doyle et al.[12]의 모형과 제안한 모형을 여러 가지 기준을 이용하여 비교 실험하고 그 특성을 분석한다. 마지막 제 6장에서는 결론을 제시한다.

## 2. 배경 이론

### 2.1 DEA

DEA는 복수의 투입 요소와 산출 요소를 동일하게 가지는 동질의 의사결정단위 집합에 대해, 각 DMU의 상대적 효율성을 측정하는 분석 모형이다.  $n$ 개의 DMU가 있고  $m$ 개의 투입 요소,  $s$ 개의 산출 요소가 있을 때, 평가 대상이 되는 DMU  $p$ 의 상대적 효율성 점수는 Charnes et al.[8]에 의해 제안된 다음과 같은 선형계획법 모형을 풀어 구할 수 있다.

$$(P) \max_{u,v} \sum_{k=1}^s v_k y_{kp}$$

$$s.t. \sum_{j=1}^m u_j x_{jp} = 1$$

$$\sum_{k=1}^s v_k y_{ki} - \sum_{j=1}^m u_j x_{ji} \leq 0, \forall i,$$

$$u_j \geq 0, v_k \geq 0, \forall j, k.$$

여기서  $y_{ki}$ 는 DMU  $i$ 가 생성하는 산출 요소  $k$ 의 양,  $x_{ji}$ 는 DMU  $i$ 가 사용하는 투입 요소  $j$ 의 양,  $v_k$ 는 산출 요소  $k$ 에 부과되는 가중치,  $u_j$ 는 투입 요소  $j$ 에 부과되는 가중치를 가리킨다. 이 문제를 평가 대상을 바꿔가며  $n$ 번 풀면 모든 DMU들의 상대적 효율성 점수를 구할 수 있으며, 각각의 DMU에 대해 그 효율성 점수를 최대화시킬 수 있는 산출 요소 및 투입 요소의 가중치들이 구해진다. 효율성 점수, 즉 문제 (P)의 최적 목적함수 값은 0보다 크고 1보다 작거나 같다. 하나의 DMU에 대해 그 효율성 점수가 1인 경우 해당 DMU는 효율적이라고 하고, 1미만인 경우는 비효율적이라고 한다. 모든 비효율적 DMU에 대해, 성과 개선을 위한 벤치마킹 대상으로 삼을 수 있는 효율적 DMU들의 집합, 즉 참조집합(reference set)을 구할 수 있는데 다음의 쌍대 문제를 풀어 찾을 수 있다.

$$(D) \min_{\theta, \pi} \theta$$

$$s.t. \sum_{i=1}^n \pi_i x_{ji} - \theta x_{jp} \leq 0, \forall j$$

$$\sum_{i=1}^n \pi_i y_{ki} - y_{kp} \geq 0, \forall k$$

$$\pi_i \geq 0, \forall i$$

여기서  $\theta$ 는 효율성 점수이고,  $\pi$ 는 쌍대변수이다. 이 문제를 통해 DMU  $p$ 보다 더 적은 투입 요소를 사용하면서도 더 많은 산출 요소를 생성할 수 있는 DMU 결합체(DMU들의 선형 결합)를 식별할 수 있고,  $\pi$ 가 그 선형 결합 계수에 해당한다. DMU  $p$ 는 이 DMU 결합체를 벤치마킹 대상으로 삼아 성과를 개선시킬 수 있다[9].

계산상의 효율성을 이유로 쌍대 문제 형태의 모

형이 더 많이 사용된다. 원 문제는 분석 대상이 되는 DMU의 수 만큼에 해당하는 제약식이 포함되는데 반하여, 쌍대 문제의 경우는 투입 요소와 산출 요소의 개수만큼의 제약식이 포함된다. 일반적으로 DMU의 수보다 투입 및 산출 요소의 수가 더 적기 때문에, 계산 관점에서 볼 때 쌍대 문제가 훨씬 간편하다. 그러나 쌍대 문제 형태로만 DEA 모형을 다루게 되면 원 문제 모형의 의사결정변수인 투입·산출 요소에 대한 가중치가 가지는 다양성과 의미에 대해서는 소홀하게 되는 문제도 있다.

위에서 살펴본 가장 기본적인 DEA 모형인 CCR 모형[8]이 제안된 이후, 다양한 형태로 변형된 모형이 개발되었다. CCR 모형은 의사결정단위의 규모수익이 불변(constant return to scale)이라는 가정 하에서 효율성을 평가함으로써 규모의 효율성과 순수한 기술적 효율성을 구분하지 못하는 단점이 있었다. 이러한 문제점에 착안하여, Banker, Charnes and Cooper[2]는 규모수익의 가변성(variable return to scale)을 반영할 수 있는 방법을 제안하였는데 이는 BCC 모형이라 일컬어지며, BCC 모형에서의 효율성 값은 주어진 생산 규모 하에서의 순수 기술 효율성을 의미한다. 또한 순수 규모의 효율성을 평가하기 위한 방법이 제시되었는데, 이는 CCR 모형에서 얻어지는 효율성을 BCC 모형에서 얻어지는 효율성으로 나눔으로써 추정되어진다[9]. 한편, DEA 모형은 그 목적에 따라 투입지향(input-oriented) 모형과 산출지향(output-oriented) 모형으로 구분되어 사용된다. 투입지향 모형은 주어진 수준의 산출 요소를 최소한의 투입 요소를 사용하여 생산하는 것이 목적인 반면, 산출지향 모형은 주어진 투입 요소를 가지고 산출 요소를 최대화하는 것을 목적으로 한다. 또한, DMU의 순위 결정 방법의 하나로 super-efficiency가 개발되기도 하였으며[1], 다기준 의사결정 문제(multiple criteria decision making problem)에 사용할 수 있는 순수 산출 요소(또는 투입 요소) 모형도 존재한다[14].

## 2.2 단순효율성(simple efficiency)와 교차효율성(cross-efficiency)

DMU  $p(=1, \dots, n)$ 가 선택한 투입 요소  $j(=1, \dots, m)$ 에 대한 가중치를  $u_{jp}$ 라고 하고, 산출 요소  $k(=1, \dots, s)$ 에 대한 가중치를  $v_{kp}$ 라고 하자. 이 때, DMU  $p$ 가 선택한 가중치 값들을 적용하여 DMU  $q$ 의 효율성을 평가할 경우 얻어지는 교차효율성  $e_{pq}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$e_{pq} = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq}}{\sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq}}$$

여기서  $q$ 가  $p$ 와 동일한 경우, 즉  $e_{pp}$ 는 DMU  $p$ 의 단순효율성이 된다.

단순효율성은 자신이 자신을 평가한 효율성이고, 교차효율성은 다른 DMU들이 자신을 평가한 효율성이라고 해석할 수 있다. DMU  $p$ 의 단순효율성은 다음과 같이  $e_{pp}$ 를 최대화하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \max_{u, v, p} \quad & e_{pp} \\ \text{s.t.} \quad & e_{pq} \leq 1, \quad q=1, \dots, n, \\ & \sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jp} = 1, \\ & u_{jp} \geq 0, \quad v_{kp} \geq 0, \quad \forall j, k. \end{aligned}$$

한편, DMU  $p$ 가 자신이 선택한 가중치를 이용하여 다른 DMU들을 평가할 때 그 결과는  $e_{pq}(q=1, \dots, n, q \neq p)$ 가 될 것이다.

DEA 모형 (P)를 하나의 평가 대상 DMU  $p$ 에 대해 풀면 투입 요소와 산출 요소에 대한 최적 가중치를 구할 수 있는데, 이 때 동일한 최대 목적함수 값(최대 효율성 점수)을 주는 여러 가지 대안 가중치들이 존재할 수도 있다. 여러 가지 대안 가중치 중에서 어떤 것을 선택하느냐에 따라 다른 DMU들에 대한 교차효율성은 크게 달라질 수 있다. Sexton et al.[16]은 평가 대상 DMU의 단순효율성을 최대값으로 유지한 채 나머지 DMU들의

평균 교차효율성을 최소화 또는 최대화하는 대안 가중치를 찾는 모형을 제시하였다. 그 모형에서는 다음과 같은 두 가지 목적함수를 순차적으로 최적화한다.

첫 번째 목적함수:  $\max_{u, v, p} e_{pp}$ ,

두 번째 목적함수:

$$\min(\text{or } \max)_{u, v, p} \left( \sum_{q \neq p} e_{pq} \right) / (n-1)$$

두 번째 목적함수의 경우에는 첫 번째 목적함수의 최적값을 해치지 않는 범위 내에서  $e_{pq}(q \neq p)$ 의 평균값을 최소화(또는 최대화)하고자 한다. 두 번째 목적함수를 최소화하는 모형을 공격적 정형화(aggressive formulation)라고 부르며 평가 대상 DMU가 자신에게는 가장 유리하지만 나머지 다른 DMU들에게는 평균적으로 불리하도록 투입·산출 요소들의 가중치를 설정하는 방식이다. 이와 반대로, 두 번째 목적함수를 최대화하는 모형을 호의적 정형화(benevolent formulation)라고 부르며 평가 대상 DMU에 가장 유리하면서 나머지 DMU들에게도 평균적으로 가장 유리한 가중치를 찾는 방식이다. 응용 상황에 적합하도록 두 가지 방법 중 하나의 방식을 취하면 되는데, 다음과 같은 두 가지 측면을 고려할 때 공격적 정형화가 보다 일반적이고 자연스럽다. 교차효율성이 개발된 동기 중 하나는 비정상적인 가중치를 사용하여 효율적이라고 판명되는 DMU(일명 매버릭)를 방지하는 데 있는데, 이러한 목적 하에서는 호의적 정형화 보다는 공격적 정형화가 더 적합하다. 매버릭은 자신에게 가장 유리하게 설정한 가중치에 의해서는 효율적이라고 판명될지라도 다른 DMU가 설정한 가중치에 의해서는 그 효율성 점수가 상당히 낮아질 가능성이 있는 DMU이다. 호의적 정형화에서는 투입·산출 요소의 가중치를 선정할 때 평가 대상 이외의 나머지 DMU들에게도 최대한 유리하도록 하는 것을 두 번째 목표로 하고 있고, 이러한 호의(benevolence)는 매버릭에게도 혜택이 돌아가므로 그것이 낮은 효율성 점수를 부여받을 가능성이 제

한다. 반면, 공격적 정형화에서는 나머지 DMU들에게 최대한 불리하도록 가중치를 설정하는 것을 두 번째 목표로 하므로, 매버릭이 낮은 평가를 받을 가능성이 보다 확대된다. 공격적 정형화가 보다 타당한 두 번째 이유는 평가 대상이 되는 DMU들이 대부분의 경우 서로 경쟁하고 있다는 사실 때문이다. DEA는 절대적 효율성을 측정하는 방법론이 아니라 평가 대상이 되는 DMU들 간의 상대적 효율성을 측정하는 방법론이고, 이들 DMU들은 서로 더 나은 평가를 받기 위해 경쟁하는 경우가 대부분이라고 할 수 있다. 이런 경우, 특정 DMU가 자신에게 가장 유리한 투입·산출 요소 가중치를 선정할 때, 나머지 DMU들에게는 최대한 불리하도록 하고자 하는 것은 경쟁 환경에서 지극히 자연스럽다.

교차효율성의 공격적 정형화에서 두 번째 목적함수는 분수 형태 항들의 합으로 구성된 비선형식이므로 선형계획법을 적용할 수 없다. Sexton et al.[16]은 분수 항의 분자 부분의 합과 분모 부분의 합 간의 차이를 최소화하는 형태의 목적함수를 구성하여 원래의 목적함수를 대체하는 방안을 제안하였고, Doyle et al.[12]은 분자 부분의 합과 분모 부분의 합 간의 비율을 최소화하는 형태의 목적함수를 대체 사용하는 방식을 제안하였다. 각각의 목적함수는 형태는 다음과 같다.

Sexton et al. :

$$\begin{aligned} \min_{u, v, p} b_p &= \sum_{q \neq p} \left( \sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq} - \sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq} \right) \\ &= \sum_{k=1}^s (v_{kp} \sum_{q \neq p} y_{kq}) - \sum_{j=1}^m (u_{jp} \sum_{q \neq p} x_{jq}). \end{aligned}$$

$$\text{Doyle et al. : } \min_{u, v, p} c_p = \frac{\sum_{k=1}^s (v_{kp} \sum_{q \neq p} y_{kq})}{\sum_{j=1}^m (u_{jp} \sum_{q \neq p} x_{jq})}.$$

Sexton et al.이 제안한 목적함수는 선형이므로 선형계획법으로 풀릴 수 있고, Doyle et al.의 모형도 분모를 1로 만드는 제약식을 추가함으로써 선형화 될 수 있다.

### 3. 교차효율성에 대한 새로운 공격적 정형화 방법

제 2장에서 살펴본 바와 같이 Sexton et al.과 Doyle et al.은 평가 대상인 DMU  $p$ 의 가중치를 결정할 때 자신의 단순효율성을 우선 최대화하고, 그 효율성 값을 유지한 채 다른 DMU들의 교차효율성 값을 평균적으로 최소화하는 가중치를 구하는 방식을 제안하였다. 본 연구에서는 이러한 방식을 수정하여, 평가 대상인 자신을 제외한 나머지 DMU들 중 가장 우수한 DMU의 교차효율성을 최소화하는 가중치를 구하는 방식을 제안한다.

새로운 방식을 제안하기에 앞서 DEA에서의 교차효율성이 가지는 효용을 생각해 볼 필요가 있는데, Doyle et al.[12]은 교차효율성의 효용성을 크게 세 가지로 보았다. 첫째, 교차효율성은 효율적인 DMU 간의 성능 서열을 판별하거나, 전반적인 성능 관점에서 DMU의 효율성을 평가하여 비합리적인 방식으로 효율적이라는 판정을 받는 특이한 DMU를 배제시켜 진정으로 효율적인 DMU를 선별하는 방법에 활용될 수 있다. 둘째, 평가 대상 DMU가 다른 DMU와의 차별성을 극대화하기 위해 강조해야 할 자신의 강점과 약점을 식별하는데도 사용될 수 있다. 셋째, 벤치마킹 대상을 선정할 때 서로 유사한 특성을 가지는 DMU들을 서로 군집화하는 과정에서 활용될 수 있다.

평가 대상인 자신을 제외한 나머지 DMU들의 교차효율성 중 가장 높은 값을 최소화하는 방식, 즉 본 연구에서 제안하는 방식은 위에서 기술한 교차효율성의 효용성 중 첫 번째와 두 번째를 강화하는데 기여할 수 있다. 첫 번째 효용성에의 기여도는 다음과 같이 설명될 수 있다. 비합리적인 방식으로 효율적이라는 판정을 받는 특이한 DMU(일명 매버릭)가 교차효율성을 통해 효과적으로 구별되어질 수 있는 이유는 자신에게 유리한 투입·산출 요소 가중치 뿐만 아니라 다른 DMU들이 선택한 투입·산출 요소 가중치를 사용하여서도 평가 받기 때문이다. 그러나 기존의 공격적 교

차효율성 산정 방식, 즉 자신에게는 가장 유리하지만 나머지 DMU들에게는 평균적으로 불리하도록 투입·산출 요소의 가중치를 산정하는 방식으로는 매버릭을 구별해 내는데 문제가 있을 수 있다. 즉, 매버릭을 구별해내기 위해서는 매버릭의 교차효율성을 최대한 낮게 되도록 해야 하는데, 나머지 DMU들의 교차효율성을 평균적으로 불리하게 만들다보면 그 효과가 모든 DMU로 분산되어 매버릭의 교차효율성이 낮게 만들어질 가능성이 제한될 수 있고 여전히 높은 값을 유지할 수도 있다. 반면, 본 연구에서 제안하는 방식을 사용하면 자신을 제외한 나머지 DMU들의 교차효율성 중 가장 높은 값을 최소화하는데 모든 노력이 집중되고, 이로 인해 매버릭의 교차효율성이 낮게 만들어질 가능성이 보다 확대될 수 있다. 제안하는 방식의 이러한 효과는 제 5장에서 소개할 실험 결과를 통해 사례를 들어 구체적으로 설명하도록 한다.

두 번째 효율성에의 기여도는 다음과 같이 설명될 수 있다. 교차효율성이란 자신의 효율성 입장에서 가장 유리한 투입 요소 및 산출 요소의 가중치를 이용하여 다른 DMU들을 평가한 것이다. 그리고 이 가중치는 자신을 부각시키기 위해 어떤 측면을 강조해야 하는지에 대해 중요한 정보를 제공한다고 볼 수 있다. 그렇다면, 이러한 가중치를 선택할 때 자신의 효율성을 최대화시키는 동시에 다른 DMU들의 평균 효율성을 낮추고자하는 것은 당연한 선택이 될 수 있으며 이는 이전의 연구와 관련이 있다. 그러나 많은 경우, 다른 DMU들의 평균 효율성을 낮추는 것보다도 자신을 제외한 나머지 DMU들 중 가장 효율적인 DMU의 효율성을 최대한 낮추는 것이 더 큰 의미를 가질 수 있다. 효율성 점수로서 DMU들의 서열을 매겼다고 했을 때, 효율성이 1위인 DMU는 2위와의 격차를 최대한 크게 하는 것이 자신의 우수성을 부각시키는 효과적인 방법일 것이다. 자신을 제외한 나머지 DMU들의 효율성을 평균적으로 최소화하는 방식으로는 2위와의 격차를 통제하는데 한계가 있다. 예를 들어, 5개의 DMU로 구성된 집합에 대해 DEA

를 수행하여 DMU A의 효율성 점수가 1이 되었다고 하고, DMU A의 효율성 점수를 1로 만들어 주는 투입·산출 요소 가중치 대안이 2가지 존재한다고 하자. 첫 번째 가중치 대안으로 나머지 4개의 DMU들의 효율성 점수를 계산했을 때 각각 1.0, 0.5, 0.3, 0.1이 나왔고, 두 번째 가중치 대안으로 계산하였을 때 각각 0.6, 0.5, 0.5, 0.4가 나왔다고 하자. 그러면, 첫 번째 대안의 경우 나머지 DMU들의 평균 효율성은 0.475이고 두 번째 대안의 경우 0.5가 된다. 평균 효율성 측면으로 볼 때에는 첫 번째 가중치 대안이 더 효과적이지만, 2위와의 격차 측면으로 볼 때에는 두 번째 가중치 대안이 더 효과적이라고 볼 수 있다. 여기서 첫 번째 가중치 대안을 택했다면, 효율성 점수가 1.0인 DMU로 인해 DMU A의 차별적 우수성이 다소 무디어지게 된다. 이를 고려할 때 DMU A가 자기 자신을 더욱 부각시키는 방법으로 2위와의 격차를 벌이는 방식을 취하는 것은 또 다른 현실적 용도를 가질 수 있다.

제안하는 모형에서는 제 2장에서 기술한 Sexton et al.의 모형의 두 번째 목적함수를 다음으로 대체한다.

$$\min_{u, v, p} \max_{q \neq p} e_{pq} = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq}}{\sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq}}$$

목적함수 안쪽의 최대화 부분은 평가 대상인 DMU  $p$ 를 제외한 나머지 DMU들의 교차효율성 중 가장 큰 값을 구하는 것이고, 그 값을 최소화하는 것이 바깥쪽 부분에 해당한다. 이 목적함수는 선형이 아니므로 선형계획법으로는 직접적으로 풀 수 없다. 그러나 이 문제는 일련의 선형 가능해 문제로 변환시킬 수 있고, 이에 따라 일련의 선형계획법을 풀어 최적해를 구할 수 있다(구체적인 해법에 대해서는 제 4장에서 논의함).

본 연구에서 제안하는 교차효율성 산출 방법은 2단계로 구성된다. 평가 대상 DMU  $p$ 를 평가자로 하여 나머지 DMU들의 교차효율성을 구한다고 했을 때, 첫 번째 단계에서는 DMU  $p$ 의 단순효율성

을 구하고, 두 번째 단계에서는 DMU  $p$ 의 단순효율성을 그대로 유지한 채 나머지 DMU들 중 가장 우수한 DMU의 효율성을 최소화하는 투입·산출 요소 가중치를 구한다.

평가 대상인 DMU  $p$ 의 단순효율성을 구하는 첫 번째 단계에서는 다음과 같은 CCR 모형의 선형계획법 문제 (P1)을 푼다.

$$(P1) \quad \max_{u, v, v_p} e_{pp} \\ \text{s.t.} \quad e_{pq} \leq 1, \quad q=1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jp} = 1, \\ u_{jp} \geq 0, \quad v_{kp} \geq 0, \quad \forall j, k.$$

이 문제를 풀어 얻어진 DMU  $p$ 의 단순효율성 점수  $e_{pp}^*$ 을 그대로 유지한 채, 두 번째 목적함수의 값을 최소화하는 문제는 다음 (P2)와 같다.

$$(P2) \quad \min_{u, v, v_p} \max_{q \neq p} e_{pq} = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq}}{\sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq}} \\ \text{s.t.} \quad e_{pq} \leq 1, \quad q=1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jp} = 1, \\ u_{jp} \geq 0, \quad v_{kp} \geq 0, \quad \forall j, k, \\ e_{pp} = e_{pp}^*.$$

마지막 제약식은 DMU  $p$ 의 단순효율성을  $e_{pp}^*$ 로 유지하기 위해 추가된 것이고, 나머지 제약식은 동일하게 유지된다.

## 4. 해 법

(P2)는 목적함수가 선형이 아니므로 선형계획법으로 직접 풀 수 없다. 그러나 제약식들은 모두 선형이고, 최소화 대상인 목적함수의 최대화 부분

$$f(u, v, v_p) = \max_{q \neq p} e_{pq} = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq}}{\sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq}}$$

은  $n-1$ 개의 선형-분수함수(linear-fractional function)들에 대한 점마다 최대(pointwise maximum)로서 준볼록(quasi-convex) 함수이므로, 결국(P2)는 준볼록(quasi-convex) 최적화 문제가 된다. 여기서 분자와 분모가 모두 선형함수인 선형-분수함수는 준볼록임과 동시에 준오목(quasi-concave), 즉 준선형(quasi-linear)이고, 준볼록함수들의 점마다 최대는 준볼록이라는 사실이 활용되었다.

한편, 준볼록 최적화 문제를 푸는 하나의 일반적인 방법을 살펴보도록 하자([4], pp.145-146 참조). 이 방법은 준볼록함수의 하위레벨집합(sublevel set)을 볼록부등식(convex inequality)들의 모임(family)으로 표현할 수 있다는 사실을 기반으로 한다. 임의의 준볼록함수  $f: R^k \rightarrow R$ 의  $t$ -하위레벨집합( $t$ -sublevel set)  $\{z \in R^k: f(z) \leq t\}$ 은 볼록 집합이고, 매개변수  $t(\in R)$ 를 가지는 볼록함수 모임(family),  $\phi_t: R^k \rightarrow R$ 가 존재하여 다음의 동치관계가 성립한다.

$$f(z) \leq t \Leftrightarrow \phi_t(z) \leq 0.$$

즉, 준볼록함수  $f$ 의  $t$ -하위레벨집합이 0-하위레벨집합이 되는 볼록함수 모임  $\phi_t$ 가 존재한다. 이러한 함수  $\phi_t$ 는  $s \geq t$ 을 만족하는  $s$ 와  $t$ 에 대해 다음의 성질을 가져야 한다는 것은 자명하다.

$$\phi_s(z) \leq 0 \Rightarrow \phi_t(z) \leq 0, \quad \forall z \in R^k.$$

이 성질은 각각의  $z$ 에 대해  $\phi_t(z)$ 가  $t$ 에 대한 비증가(nonincreasing) 함수일 때, 즉  $s \geq t$ 이면  $\phi_s(z) \leq \phi_t(z)$ 일 때 성립한다.

준볼록 최적화 문제의 표준형은 다음과 같다.

$$(CO) \quad \min \quad f_0(z) \\ \text{s.t.} \quad f_i(z) \leq 0, \quad i=1, \dots, m, \\ a_i^T z = b_i, \quad i=1, \dots, p.$$

여기서 부등 제약식 함수  $f_1, \dots, f_m$ 는 볼록, 목적함수



$f_0$ 는 준블록,  $a_i \in R^k$ 와  $b_i \in R$ 는 상수,  $x \in R^k$ 는 의사 결정변수이다. 또한 준블록함수  $f_0$ 의  $t$ -하위레벨 집합이 블록함수 모인  $\phi_t$ 의 0-하위레벨집합이 된다고 하자. 이 문제의 최적 목적함수 값을  $p^*$ 이라고 할 때,  $t$ -매개변수 가능해 문제(feasibility problem)

$$(FG_t) \text{ find } z$$

$$\text{s.t. } \phi_t(z) \leq 0,$$

$$f_i(z) \leq 0, \quad i=1, \dots, m$$

$$a_i^T z = b_i, \quad i=1, \dots, p.$$

의 해가 존재한다면  $p^* \leq t$ 이 성립하고, 반대로 해가 존재하지 않는다면  $p^* > t$ 임을 알 수 있다. 부등 제약식 함수는 모두 블록이고 등식 제약식은 선형이므로, 가능해 문제 (FG<sub>t</sub>)는 블록 가능해 문제이다. 따라서 준블록 최적화 문제 (CO)의 최적 목적함수 값  $p^*$ 가 주어진 값  $t$ 보다 크지 작은지는 블록 가능해 문제 (FG<sub>t</sub>)를 풀어 알 수 있다. 만일 블록 가능해 문제 (FG<sub>t</sub>)에 해가 존재한다면  $p^* \leq t$ 임을 알 수 있고, (FG<sub>t</sub>)의 임의의 가능해  $z$ 는 (CO)의 가능해가 되고  $f_0(z) \leq t$ 이 성립한다. 만일 (FG<sub>t</sub>)에 해가 존재하지 않는다면,  $p^* > t$ 이다.

이러한 논리를 이용하여, 매 단계에서 블록 가능해 문제를 푸는 이분법(bisection) 기반의 준블록 최적화 해법을 개발할 수 있다. 주어진 준블록 최적화 문제에 가능해가 존재한다고 가정하고, 최적 목적함수 값  $p^*$ 가 포함되는 임의의 구간  $[l, u]$ 을 가지고 해법을 시작한다. 현재 구간의 중간점  $t = (l+u)/2$ 에서 블록 가능해 문제 (FG<sub>t</sub>)를 풀어, 최적 목적함수 값과 그 중간점과의 대소를 판단하고 이에 따라 구간을 수정한다. 이를 통해 최적 목적함수 값을 여전히 포함하고 있지만 길이는 절반으로 줄어든 새로운 구간이 생성된다. 이러한 과정을 구간의 길이가 충분히 작아질 때까지 반복한다.

위에서 설명한 일반적인 해법을 적용하여 (P2)에 대한 해법을 구성할 수 있다. 우선, 준블록 목적함수  $f(u_p, v_p)$ 의  $t$ -하위레벨집합이 0-하위레벨집합이 되는  $t$ -매개변수 블록함수  $\phi_t$ 를 찾아야 하는데, 이는 다음의 관계를 통해 구할 수 있다.

$$f(u_p, v_p) = \max_{q \neq p} e_{pq} = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq}}{\sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq}} \leq t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq}}{\sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq}} \leq t, \quad \forall q \neq p$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq} - t \sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq} \leq 0, \quad \forall q \neq p$$

$$\Leftrightarrow \max_{q \neq p} \left\{ \sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq} - t \sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq} \right\} \leq 0.$$

즉,  $\phi_t(u_p, v_p) = \max_{q \neq p} \left\{ \sum_{k=1}^s v_{kp} y_{kq} - t \sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jq} \right\}$ 로 두면 된다. 여기서  $\phi_t$ 는 선형함수들의 점마다 최대이므로 블록함수가 되고, 이는  $\phi_t$ 가 블록이어야 한다는 조건에 부합한다. 그러면 이분법 기반 해법에서 반복해서 풀어야 하는  $t$ -매개변수 블록 가능해 문제는 다음과 같다.

$$(FS_t) \text{ find } u_p \text{ and } v_p$$

$$\text{s.t. } e_{pq} \leq 1, \quad q=1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^m u_{jp} x_{jp} = 1,$$

$$u_{jp} \geq 0, \quad v_{kp} \geq 0, \quad \forall j, k,$$

$$e_{pp} = e_{pp}^*,$$

$$\phi_t(u_p, v_p) \leq 0.$$

여기서 첫 번째 제약식은 마지막 제약식과 중복적이므로 제거될 수 있다. 또한 마지막 제약식은  $n-1$ 개의 선형 부등 제약식으로 바꿀 수 있으므로, (FS<sub>t</sub>)는 사실상 선형 가능해 문제가 된다.

이제 (P2)를 풀 수 있는 이분법 기반 해법을 다음과 같이 구성할 수 있다.

**[준블록 최적화 문제 (P2)를 풀기 위한 이분법 기반 해법]**

초기조건 :  $p^*$ 를 포함하는 구간  $[l, u]$  ( $l \leq p^*$ ,  $u \geq p^*$ ), 허용오차(tolerance)  $\epsilon > 0$ .

단계 1 : 현재 구간의 중간점  $t$ 를 구한다. 즉,  $t := (l+u)/2$ .

단계 2 : 블록 가능해 문제 (FS<sub>l</sub>)를 푼다.  
 단계 3 : (FS<sub>l</sub>)에 가능해가 존재하면  $u := t$ 로 하고, 그렇지 않으면  $l := t$ 로 둔다.  
 단계 4 :  $u - l < \epsilon$ 이면 해법을 종료하고, 그렇지 않으면 단계 1로 돌아간다.  
 단계 5 : 최종적으로 구해진 (FS<sub>l</sub>)의 가능해를 (P2)의 최적해로 하고 해법을 종료한다.

구간  $[l, u]$ 는 항상 최적 목적함수 값  $p^*$ 를 포함한다. 즉, 해법 매 단계에서  $l \leq p^* \leq u$ 이 성립한다. 교차효율성은 항상 0보다 크고 1보다 작거나 같으므로, 초기 구간을  $[0, 1]$ 로 두는 것이 가장 쉬운 방법이다. 해법의 매 반복마다 구간의 길이는 반으로 줄어들기 때문에, 초기 구간의 길이가  $u - l$ 이라고 했을 때 해법의  $k$ 번 반복 후에는 그 길이가  $2^{-k}(u - l)$ 이 된다. 따라서 해법의 종료에 필요한 반복 회수는  $\lceil \log_2((u - l)/\epsilon) \rceil$ 이 된다. 매 반복에서는 블록 가능해 문제(사실상 선형 가능해 문제)를 푸는데 내부점 해법을 적용할 경우 다항시간 내에 풀 수 있으므로, 전체 해법은 다항 시간의 계산복잡도(polynomial-time computational complexity)를 가진다는 것을 알 수 있다.

## 5. 실험을 통한 모형 검증

본 연구에서 제안한 새로운 교차 효율성 계산법의 성능과 특성을 파악하기 위하여 DEA 문제를 임의로 생성시켜 실험해 보았다. 의사결정단위(DMU)의 수는 10, 20, 30, 40, 50개로 하였으며 투입 요소 및 산출 요소의 수는 각각 5개 또는 10개로 변화시켜 보았다. 투입 요소 및 산출 요소의 값은 1과 100사이의 임의의 정수로 발생시켰다. 의사결정단위의 수( $n$ ), 투입 요소의 수( $m$ ), 산출 요소의 수( $s$ )에 따른 조합으로 총 20개( $5 \times 2 \times 2$ ) 유형의 문제를 각각 10개씩, 전체 200개의 DEA 문제를 생성시켰다.

제안한 방법과의 비교 대상으로는 공격적 정형화 방법을 취하지 않고 기본 CCR 모형인 (P1)만 푸

는 경우와 Doyle et al.이 제안한 공격적 정형화 모형이다. 세 가지 방법을 비교하는 기준으로는 다음과 같은 세 가지를 선정하였다.

$$\text{기준 (1)} : \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n e_{ij}$$

$$\text{기준 (2)} : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\max_{j \neq i} e_{ij})$$

$$\text{기준 (3)} : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((\max_{j \neq i} e_{ij}) - e_{ii})$$

여기서  $e_{ij}$ 는 DMU  $i$ 가 설정한 투입·산출 요소 가중치를 이용하여 계산한 DMU  $j$ 의 효율성 점수로서, 모든  $i$ 와  $j$ 에 대해  $e_{ij}$ 를 계산하면 하나의 행렬 형태가 구성된다. 앞으로 이를 교차효율성 행렬이라고 부르기로 한다. 교차효율성 행렬의  $i$ 번째 대각 요소는 DMU  $i$ 의 단순효율성이 된다. 기준 (1)은 교차효율성 행렬에서 대각 요소를 제외한 모든 값들에 대한 평균이며, 기준 (2)는 교차효율성 행렬에서 각 행의 단순효율성을 제외한 값들 중 최대값들에 대한 평균이다. 기준 (3)은 각 행의 단순효율성을 제외한 값들 중 최대값과 그 행의 단순효율성과의 차이에 대한 평균이다. 다른 DMU의 효율성 점수를 최대한 낮추고자하는 공격적 접근법의 관점에서 볼 때, 위의 세 가지 기준 모두 낮을수록 좋다.

여기서 기준 (1)은 Dolye et al.이 제안한 모형에게 유리한 기준이고, 기준 (2)와 기준 (3)은 본 연구에서 제안한 모형에게 유리한 기준인 것은 당연하다. 물론 세 가지 방법을 공정하게 비교할 수 있는 다른 기준을 선정하는 것이 가장 좋겠으나 그러한 단일 기준을 찾기는 어려웠다. 이에 본 실험에서는 제안하는 모형이 Doyle et al.의 모형에 비해 기준 (2)과 기준 (3)의 관점에서 얼마나 우수한지와 기준 (1)의 관점에서는 얼마나 열등한지를 서로 대비시킴으로써 두 가지 모형을 비교하고자 한다.

비교하고자 하는 모든 모형의 해법은 MATLAB [22]으로 구현하였다. 선형계획법을 풀기 위해 *linprog* 함수를 사용하였으며 단체법(the simplex method)

을 사용하도록 설정하였다. 제안하는 교차효율성 계산법의 단계 4에서 사용하는  $\epsilon$ 의 값은  $10^{-5}$ 으로 하였다. 20가지 문제 유형을 대상으로 세 가지 모형을 세 가지 기준에 대해 비교 실험한 결과는 <표 1>에 정리하였다. 표의 가장 왼쪽 열에는 20

가지 문제 유형이 표시되어 있고, 비교하는 세 가지 모형, 즉 기본 CCR 모형, 본 연구에서 제안하는 모형, Doyle et al.의 모형을 각각 'Arbitrary', 'Worst', 'Doyle3'라는 이름으로 줄여서 나타내었다. 표 내부에는 10개씩 임의로 생성된 각 유형의

<표 1> 세 가지 모형의 비교 실험 결과

문제 유형	기준 (1)				기준 (2)				기준 (3)			
	Arbitrary	Worst	Doyle3	Lose*	Arbitrary	Worst	Doyle3	Gain*	Arbitrary	Worst	Doyle3	Gain*
$n=10$ $m=s=5$	0.6271	0.2676	0.2561	4.5	0.9972	0.4547	0.6590	44.9	0.0246	-0.5179	-0.3136	39.4
$n=10$ $m=5, s=10$	0.6681	0.2468	0.2336	5.7	0.9882	0.3778	0.6784	79.6	-0.0065	-0.6169	-0.3162	48.7
$n=10$ $m=10, s=5$	0.6809	0.1638	0.1578	3.8	0.9986	0.2613	0.5547	112.3	-0.0006	-0.7380	-0.4445	39.8
$n=10$ $m=10, s=10$	0.7023	0.1364	0.1362	0.1	0.9967	0.2104	0.5018	138.5	-0.0033	-0.7896	-0.4982	36.9
$n=20$ $m=s=5$	0.5815	0.3167	0.2945	7.5	0.9946	0.6001	0.8400	40.0	0.0468	-0.3478	-0.1079	69.0
$n=20$ $m=5, s=10$	0.6764	0.3026	0.2630	15.1	0.9970	0.4911	0.7908	61.0	0.0035	-0.5024	-0.2027	59.7
$n=20$ $m=10, s=5$	0.6368	0.2113	0.1994	6.0	0.9991	0.3816	0.7464	95.6	0.0075	-0.6101	-0.2452	59.8
$n=20$ $m=10, s=10$	0.7039	0.1751	0.1614	8.5	0.9992	0.2891	0.7030	143.2	0.0003	-0.7099	-0.2960	58.3
$n=30$ $m=s=5$	0.5263	0.3175	0.2936	8.1	0.9990	0.6628	0.8654	30.6	0.0735	-0.2627	-0.0601	77.1
$n=30$ $m=5, s=10$	0.5740	0.3023	0.2773	9.0	0.9967	0.5901	0.8584	45.5	0.0395	-0.3671	-0.0988	73.1
$n=30$ $m=10, s=5$	0.6274	0.2104	0.1886	11.6	1.0000	0.4125	0.7989	93.7	0.0074	-0.5801	-0.1937	66.6
$n=30$ $m=10, s=10$	0.6811	0.1852	0.1628	13.8	0.9995	0.3415	0.7798	128.3	-0.0005	-0.6585	-0.2202	66.6
$n=40$ $m=s=5$	0.4839	0.3187	0.2947	8.1	0.9999	0.7208	0.9166	27.2	0.1111	-0.1680	0.0278	116.5
$n=40$ $m=5, s=10$	0.5541	0.3167	0.2881	9.9	0.9977	0.6395	0.8946	39.9	0.0471	-0.3110	-0.0559	82.0
$n=40$ $m=10, s=5$	0.5852	0.2104	0.1836	14.6	0.9998	0.4587	0.8438	84.0	0.0085	-0.5326	-0.1475	72.3
$n=40$ $m=10, s=10$	0.6622	0.1880	0.1631	15.3	0.9988	0.3738	0.8220	119.9	0.0021	-0.6228	-0.1747	71.9
$n=50$ $m=s=5$	0.4938	0.3164	0.2900	9.1	0.9993	0.7260	0.9273	27.7	0.0985	-0.1748	0.0265	115.2
$n=50$ $m=5, s=10$	0.5336	0.3252	0.2949	10.3	0.9996	0.6796	0.9154	34.7	0.0583	-0.2617	-0.0259	90.1
$n=50$ $m=10, s=5$	0.5711	0.2195	0.1882	16.6	0.9999	0.4871	0.8667	77.9	0.0152	-0.4976	-0.1180	76.3
$n=50$ $m=10, s=10$	0.6262	0.2084	0.1785	16.8	0.9999	0.4204	0.8452	101.0	0.0072	-0.5723	-0.1474	74.2
평 균	0.6098	0.2470	0.2253	9.7	0.9980	0.4789	0.7904	76.3	0.0270	-0.4921	-0.1806	69.7

주) \* 기준 (1) Lose :  $\frac{|Worst - Doyle3|}{|Doyle3|} \times 100(\%)$ ; 기준 (2), 기준 (3) Gain :  $\frac{|Doyle3 - Worst|}{|Worst|} \times 100(\%)$ .

문제를 세 가지 모형으로 풀어 산출된 기준 (1), 기준 (2), 기준 (3)의 값들을 평균한 결과를 나타내었다. 예를 들어, 문제 유형( $n = 10, m = s = 5$ )에 해당하는 10개의 문제를 임의로 생성하고 'Arbitrary' 모형을 적용하여 푼 후 기준 (1)의 값을 각각 측정하여 이를 평균한 값이 0.6271이었고, 동일한 10개의 문제에 대해 'Worst' 모형을 적용하여 푼 후 기준 (3)의 값을 각각 측정하여 이를 평균한 값이 -0.5179이었다. 세 가지 기준별 해당 열의 가장 오른쪽 열('Lose'와 'Gain'으로 표시)에는 'Worst' 모형이 'Doyle3' 모형에 비해 얼마나 열등한지 또는 우수한지를 기준 값 증감의 백분율로 표시하였다. 즉, 'Lose' 열의 각 행에는 해당 문제 유형에 대해 'Doyle3' 모형이 산출한 기준 (1)의 평균 값과 비교하여 'Worst' 모형이 산출한 기준 (1)의 평균 값이 얼마나 더 상승했는지를 보여주고 있고, 'Gain' 열의 각 행에는 해당 문제 유형에 대해 'Worst' 모형이 산출한 기준 (2) 및 기준 (3)의 평균 값과 비교하여 'Doyle3' 모형이 산출한 기준 (2) 및 기준 (3)

의 평균 값이 얼마나 더 상승했는지를 보여주고 있다. 마지막으로, 표의 최하단에는 각 열별 평균을 표시하였다.

실험 결과를 관찰해 볼 때, 'Arbitrary'는 세 가지 기준 모두에서 'Worst'와 'Doyle3'에 비해 전반적으로 크게 열등함을 보이고 있어 이후 비교 대상에서 제외한다. 'Worst'와 'Doyle3'을 기준 (2)의 관점에서 비교해 보면, 'Doyle3' 모형이 평균적으로 76.3% 큰 값을 산출하고 기준 (3)의 관점에서도 69.7% 큰 값을 보이고 있다. 반면, 기준 (1)의 관점에서 비교하면 'Worst' 모형이 'Doyle3' 모형에 비해 평균적으로 9.7% 큰 값만을 보이고 있다. 상기 비교 실험 결과에 대해 Microsoft Excel을 이용하여 통계적 검정을 실시하였고, 그 결과는 <표 2>에 정리하였다. <표 2>의 상단 왼쪽에 표시된 결과표는 기준 (1)의 관점에서 'Worst' 모형이 'Doyle3' 모형보다 동등하거나 우수하다는 귀무가설(대립가설은 그 반대)에 대해 쌍체 비교  $t$ -검정을 실시한 결과를 보여주고 있으며, 상단 오른쪽

<표 2> 세 가지 기준에 대한 세 가지 모형 간 차이에 대한 통계적 검정

기준 (1)	t-검정 : 쌍체 비교		기준 (2)	t-검정 : 쌍체 비교	
	Worst	Doyle3		Worst	Doyle3
평균	0.24695	0.22527	평균	0.478945	0.79041
분산	0.003956	0.003372	분산	0.024244	0.013945
관측수	20	20	관측수	20	20
가설 평균차	0		가설 평균차	0	
자유도	19		자유도	19	
t 통계량	10.17094		t 통계량	-16.0914	
P(T<=t) 단측 검정	2E-09		P(T<=t) 단측 검정	7.95E-13	
t 기각치 단측 검정	1.729133		t 기각치 단측 검정	1.729133	

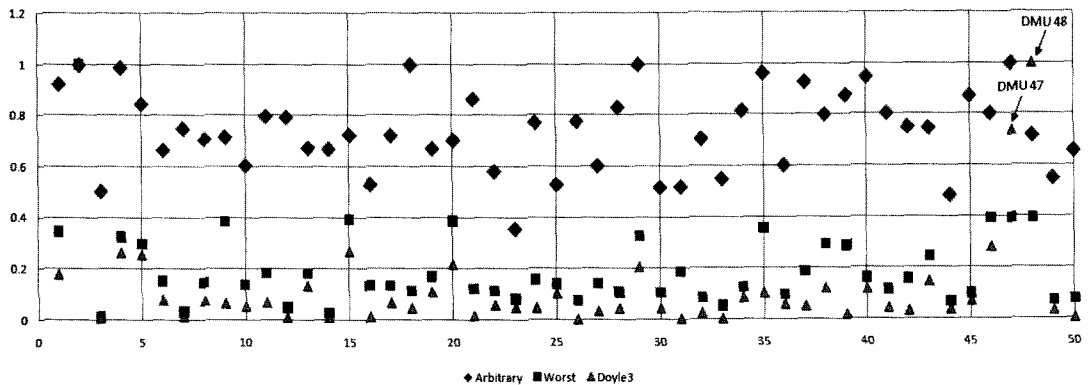
기준 (3)	t-검정 : 쌍체 비교	
	Worst	Doyle3
평균	-0.49209	-0.18061
분산	0.035156	0.02025
관측수	20	20
가설 평균차	0	
자유도	19	
t 통계량	-16.0922	
P(T<=t) 단측 검정	7.94E-13	
t 기각치 단측 검정	1.729133	

및 하단에 표시된 두 개의 결과표는 기준 (2)과 기준 (3)의 관점에서 'Doyle3' 모형이 'Worst' 모형보다 동등하거나 우수하다는 귀무가설에 대해 쌍체 비교  $t$ -검정을 수행한 결과를 각각 보여준다. 모든  $t$ -검정에서 유의확률(significance probability,  $p$ -value)이 1%에 크게 못 미치므로, 모든 귀무가설을 기각할 수 있다.

기준 (2)와 기준 (3)의 관점에서는 당초 예상했던 대로 'Worst' 모형이 절대적으로 우수하다는 결과가 나왔지만 이러한 결과가 'Doyle3' 모형에게 유리한 기준 (1)을 크게 훼손한다면 그 의미가 상당히 퇴색된다. 그러나 기준 (1)의 관점에서 평가해 볼 때에도 'Worst' 모형이 'Doyle3' 모형에 비해 열등한 정도가 비교적 근소함을 알 수 있다. 이와 같은 실험 결과를 종합하면, 'Worst' 모형은 'Doyle3' 모형이 주된 최적화 목표로 삼고 있는 기준 (1)을 크게 훼손시키지 않으면서, 또 다른 측면의 중요한 교차효율성 가치 척도인 기준 (2)와 기준 (3)을 비교적 큰 폭으로 개선시킬 수 있다는 것을 확인할 수 있다. 이러한 사실은 본 연구에서 제안한 모형이 'Doyle3' 모형에 비해 우수하거나 최

소한 또 다른 대안으로 사용될 수 있다고 주장할 수 있는 근거가 된다.

한편, 'Worst' 모형을 통해 산출되는 교차효율성이 구체적으로 어떤 형태를 가지는지 살펴볼 필요가 있다. 이를 위해 실험 대상 문제 200개 중 네 개를 무작위로 골라 특정 DMU에 의한 교차효율성이 세 가지 모형별로 어떻게 달라지는지 살펴보았다. 우선, DMU의 개수는 50개( $n=50$ ), 투입 요소 및 산출 요소의 개수는 각각 10개( $m=s=10$ )인 임의의 한 문제('문제 1'로 표시)를 선택하였고, 두 번째( $p=2$ ) DMU에 의한 교차효율성  $e_{2j}$  ( $j=1, \dots, 50$ )을 세 가지 모형별로 산출하고 그 결과를 비교하였다. [그림 1]은 세 가지 모형별로 산출된 모든 교차효율성 값들을 나타낸 것이고, 교차효율성 값들의 평균값과 최대값은 <표 3>에 표시하였다. 단 평균값과 최대값을 계산할 때 자신에 대한 교차효율성인 단순효율성, 즉  $e_{22}$ 는 제외하였다. [그림 1]의 그래프에서 수직축은 교차효율성 값  $e_{2j}$ 을 나타내고, 수평축은 50개 DMU의 일련번호, 즉  $j$ 를 나타낸다. 또한, 세 가지 모형별 구분은 점의 색깔 및 모양으로 나타내었다.



[그림 1] '문제 1'에 대한 세 가지 모형별 전체 교차효율성

<표 3> '문제 1'에 대한 세 가지 모형별 교차효율성의 평균과 최대값

교차효율성	Arbitrary	Worst	Doyle3
평균	0.7331	0.1789	0.1139
최대	1.0000	0.3913	1.0000

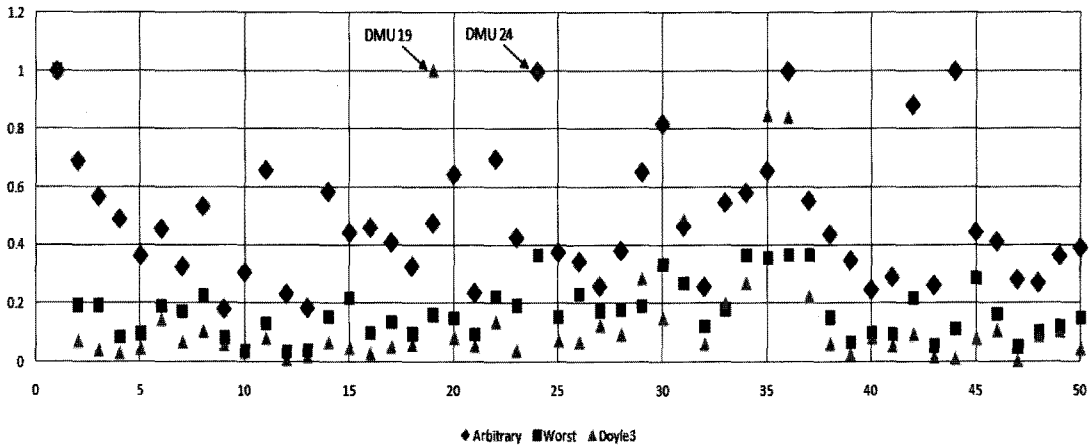
주) \* 평균 및 최대 계산 시 단순효율성  $e_{22}$ 는 제외.

[그림 1]의 결과를 보면, 'Doyle3' 모형을 적용한 결과 DMU 2를 제외한 나머지 DMU들의 교차효율성이 다른 모형들에 비해 평균적으로 더 낮기는 하지만 최대 교차효율성 점수가 1에 달한다는 것을 알 수 있다. 반면, 'Worst' 모형을 적용하면 평균 교차효율성은 0.1789로 근소하게 높아지지만 최대 교차효율성은 0.3913으로 크게 낮아진다. 만일 DMU 48과 DMU 47이 매버릭에 해당한다면 'Doyle3' 모형으로는 걸러내지 못할 수도 있지만, 'Worst' 모형을 적용하면 그럴 가능성을 크게 줄일 수 있다. 또한, 'Doyle3' 모형을 적용할 때 평가 대상인 DMU 2는 강력한 경쟁자인 DMU 48과 DMU 47로 인해 그 차별적 우수성이 부각되지 못할 수 있는 반면, 'Worst' 모형을 적용하면 DMU 2의 우수성이 보다 더 부각될 수 있다.

두 번째로 임의의 선택된 문제('문제 2'로 칭함)는 DMU의 개수가 50개( $n=50$ ), 투입 요소 및 산출 요소의 개수는 각각 5개( $m=s=5$ )인 문제이고, 첫

번째( $p=1$ ) DMU에 의한 교차효율성  $e_{1j}(j=1, \dots, 50)$ 을 세 가지 모형별로 산출하고 그 결과를 비교하였다. 그 결과는 [그림 2]와 <표 4>에 나타내었다.

'문제 2'의 결과도 '문제 1'의 경우와 유사하다. 'Doyle3' 모형을 적용한 결과 DMU 1을 제외한 나머지 DMU들의 교차효율성이 다른 모형들에 비해 평균적으로 더 낮기는 하지만 최대 교차효율성 점수가 1에 달하는 반면, 'Worst' 모형을 적용하면 평균 교차효율성은 0.1687로 근소하게 높아지지만 최대 교차효율성은 0.3637로 크게 낮아진다. '문제 1'과 유사한 상황으로, 만일 DMU 19과 DMU 24이 매버릭에 해당한다면 'Doyle3' 모형으로는 걸러내지 못할 수도 있지만 'Worst' 모형을 적용하면 그럴 가능성을 크게 줄일 수 있다. 또한, 'Doyle3' 모형을 적용할 때 평가 대상인 DMU 1은 강력한 경쟁자인 DMU 19와 DMU 24로 인해 그 차별적 우수성이 부각되지 못할 수 있는 반면, 'Worst' 모형을 적용하면 DMU 1의 우수성이 보다 더 부각될 수 있다.

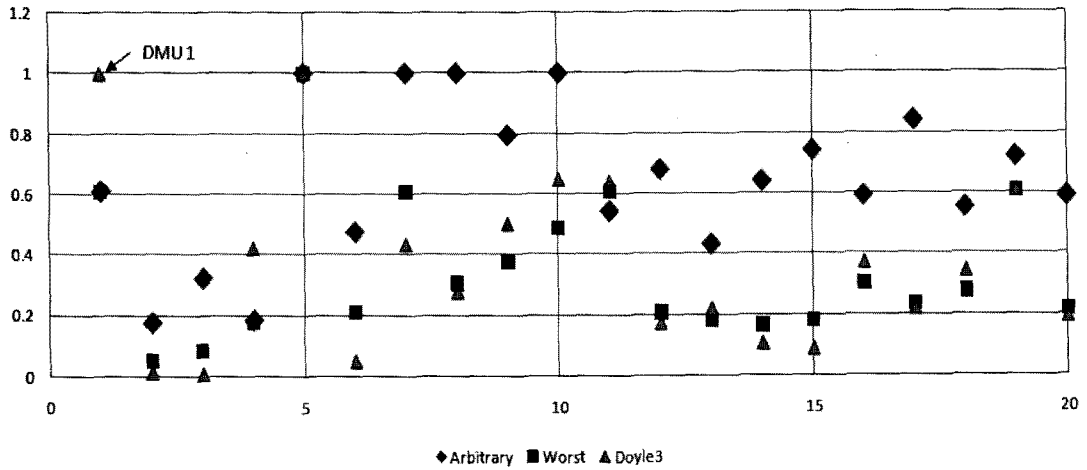


[그림 2] '문제 2'에 대한 세 가지 모형별 전체 교차효율성

<표 4> '문제 2'에 대한 세 가지 모형별 교차효율성의 평균과 최대값

교차효율성	Arbitrary	Worst	Doyle3
평균	0.4730	0.1687	0.1602
최대	1.0000	0.3637	1.0000

주) \* 평균 및 최대 계산 시 단순효율성  $e_{11}$ 는 제외.



[그림 3] '문제 3'에 대한 세 가지 모형별 전체 교차효율성

<표 5> '문제 3'에 대한 세 가지 모형별 교차효율성의 평균과 최대값

교차효율성	Arbitrary	Worst	Doyle3
평균	0.6264	0.3092	0.3316
최대	1.0000	0.6067	1.0000

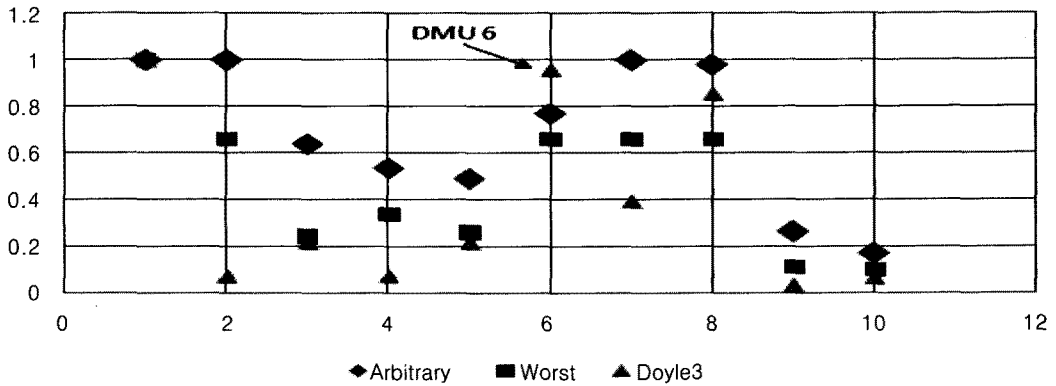
주) \* 평균 및 최대 계산 시 단순효율성  $e_{55}$ 는 제외.

세 번째로 임의 생성된 '문제 3'은 DMU의 개수가 20개( $n=20$ ), 투입 요소 및 산출 요소의 개수는 각각 5개( $m=s=5$ )인 문제이고, 다섯 번째( $p=5$ ) DMU에 의한 교차효율성  $e_{5j}(j=1, \dots, 50)$ 을 세 가지 모형별로 산출하고 그 결과를 비교하였다. 그 결과는 [그림 3]과 <표 5>에 나타내었다.

<표 5>를 보면, 'Doyle3' 모형을 적용한 결과로 얻어진 평균 교차효율성이 'Worst' 모형의 경우보다 크다. 이러한 결과가 나타난 이유는 Doyle et al.이 제안한 'Doyle3' 모형에서 평균 교차효율성을 최소화할 때 비선형 목적함수를 선형함수로 근사시켜 최적해를 구하기 때문이다. 즉, 근사 해법을 사용함으로써 인해 평균 교차효율성의 최소화라는 원래의 두 번째 목적함수가 최적값에 이르지 못했기 때문이다(제 2장 마지막 단락 참조). '문제 3'의 경우는 'Worst' 모형을 통해 도출된 평균 교차효율성이 'Doyle3' 모형을 통해 도출된 값보다

오히려 더 작게 되는 경우에 해당한다. 더군다나 최대 교차효율성 기준에서 볼 때, 'Worst' 모형이 'Doyle3' 모형보다 크게 앞서고 있음을 알 수 있다. 한편, 만일 DMU 1이 매버릭에 해당한다면 'Doyle3' 모형으로는 걸러내지 못할 수도 있지만 'Worst' 모형을 적용하면 그럴 가능성을 크게 줄일 수 있다. 또한, 'Doyle3' 모형을 적용할 때 평가 대상인 DMU 5는 강력한 경쟁자인 DMU 1로 인해 그 차별적 우수성이 부각되지 못할 수 있는 반면, 'Worst' 모형을 적용하면 DMU 5의 우수성이 보다 더 부각될 수 있다.

마지막으로 임의 선택된 '문제 4'는 DMU의 개수가 10개( $n=10$ ), 투입 요소 및 산출 요소의 개수는 각각 5개( $m=s=5$ )인 문제이고, 첫 번째( $p=1$ ) DMU에 의한 교차효율성  $e_{1j}(j=1, \dots, 50)$ 을 세 가지 모형별로 산출하고 그 결과를 비교하였다. 그 결과는 [그림 4]와 <표 6>에 나타내었다.



[그림 4] '문제 4'에 대한 세 가지 모형별 전체 교차효율성

〈표 6〉 '문제 4'에 대한 세 가지 모형별 교차효율성의 평균과 최대값

교차효율성	Arbitrary	Worst	Doyle3
평균	0.6505	0.4120	0.3206
최대	1.0000	0.6619	0.9600

주) \* 평균 및 최대 계산 시 단순효율성  $e_{11}$ 는 제외.

'Doyle3' 모형을 적용한 결과 DMU 1을 제외한 나머지 DMU들의 교차효율성이 다른 모형들에 비해 평균적으로 더 낮기는 하지만 최대 교차효율성 점수가 0.96에 달하는 반면, 'Worst' 모형을 적용하면 평균 교차효율성은 0.412로 근소하게 높아지고 최대 교차효율성은 0.6619로 크게 낮아진다. 한편, 만일 DMU 6이 매버릭에 해당한다면 'Doyle3' 모형으로는 걸러내지 못할 수도 있지만 'Worst' 모형을 적용하면 그럴 가능성을 크게 줄일 수 있다. 또한, 'Doyle3' 모형을 적용할 때 평가 대상인 DMU 1은 강력한 경쟁자인 DMU 6으로 인해 그 차별적 우수성이 부각되지 못할 수 있는 반면, 'Worst' 모형을 적용하면 DMU 1의 우수성이 보다 더 부각될 수 있다.

이상과 같이 얻어진 결과를 보면, 'Arbitrary' 모형을 통해 얻어진 교차효율성 값들이 'Worst' 모형과 'Doyle3' 모형에 의해 구해진 교차효율성 값들에 비해 전반적으로 크게 나타나는 것을 볼 수 있는데, 이는 공격적 정형화 모형이 가지는 유효성

을 잘 보여준다. 'Worst' 모형과 'Doyle3' 모형의 차이도 분명히 관찰할 수 있다. 'Doyle3' 모형에서는 큰 교차효율성 값이 종종 나타나서 최대값이 1이거나 1에 근접한 값이 나왔지만, 'Worst' 모형에서는 최대값이 1보다 크게 낮은 수준으로 통제되고 있음을 볼 수 있다. 반면, 교차효율성의 평균값 측면에서는 'Doyle3' 모형이 약간 우수하지만 'Worst' 모형과 큰 차이가 발생하지는 않았다. 이러한 결과로 볼 때, 본 연구에서 제안한 'Worst' 모형은 교차효율성의 공격적 정형화에 있어서 효과적인 대안이 될 수 있음을 알 수 있다.

## 6. 결론

교차효율성은 DEA가 가지는 한계점을 극복하기 위해 제안된 것으로, 단순효율성을 대체하거나 보완하기도 하고, 매버릭을 구별하여 DMU들 간의 실질적 성능 서열을 결정하는데 활용될 수도 있으며, 평가 대상 DMU가 다른 DMU와의 차별



성을 극대화하기 위해 강조해야할 자신의 강점과 약점을 식별하는데도 사용되어 오는 등 DEA의 다양한 측면에서 활용도가 높다. 이러한 교차효율성의 높은 유용성에 비해 그 값이 다소 임의적으로 결정될 수 있다는 점은 한계점으로 지적되었다. 즉, 기본 CCR 모형인 (P1)을 풀어 나온 최적해(최적 가중치)는 유일하지 않고 대안해가 다수 존재할 수 있으며, 어떤 최적해가 출력되느냐에 따라 교차효율성은 크게 달라질 수 있다. 이러한 한계점을 극복할 수 있고 효율성을 기준으로 DMU들이 서로 경쟁하는 상황 하에서 보다 유의미하고 적합한 교차효율성 산출 방법이 필요하게 되었고, 이를 배경으로 제안된 방법이 교차효율성의 공격적 정형화 방법이다.

본 연구에서는 Doyle et al.이 제안한 평균 교차효율성을 최소화하는 공격적 정형화 방법을 수정하여 보다 자연스럽고 실용적으로 의미 있는 방식의 새로운 공격적 정형화 모형을 제안하고 그 해법을 제시하였다. 즉, 평가 대상인 DMU를 제외한 나머지 DMU들의 평균 효율성을 최소화하는 것이 아니라, 나머지 DMU들 중 제일 우수한 DMU의 효율성을 최소화하는 방식으로 교차효율성을 산출하는 모형을 제안하였다. 이 모형은 목적함수가 준볼록함수인 준볼록 최적화 문제로서, 본 연구에서는 다항 시간 복잡도를 가지는 이분법 기반 해법을 제시하였다.

제안한 모형의 성능을 분석하기 위해 무작위로 생성한 DEA 문제를 대상으로 세 가지 모형을 비교 실험하였다. 그 결과, 자신을 제외한 나머지 DMU들의 교차효율성 중 최대값을 최소화한다는 측면에서는 Doyle et al.의 모형에 비해 월등히 우수하였고, 나머지 DMU들이 교차효율성 평균을 최소화한다는 측면에서는 약간 뒤떨어졌지만 큰 차이는 발생하지 않았다. 이러한 결과를 근거로, 제안한 모형의 유효성을 확인할 수 있었다.

제안한 모형은 교차효율성의 효용성을 더욱 강화하는데 기여할 수 있다. 첫째, 매버릭 분별 능력을 보다 제고하여 진정으로 효율적인 DMU를 선

별하는 방법에 활용될 수 있다. 기존의 평균 교차효율성을 최소화하는 방식으로는 매버릭의 분별에 한계가 있을 수 있는데, 그러한 상황은 제 5장에서 제시한 사례를 통해 확인할 수 있었다. 둘째, 평가 대상 DMU가 다른 DMU와의 차별성을 극대화하기 위해 강조해야할 자신의 강점과 약점을 식별하는데 있어 보다 현실적인 상황을 반영할 수 있다. 한 개체가 다수의 다른 개체들과 경쟁하는 상황에서, 자신의 성능과 다른 개체들의 평균 성능과의 차이보다는 다른 개체들 중 가장 우수한 개체와의 격차를 크게 하는 것이 자신을 부각시키는데 더욱 효과적인 경우가 많다. 이러한 경우 본 연구에서 제안한 모형은 의미 있게 활용될 수 있을 것이다.

## 참 고 문 헌

- [1] Andersen, P. and N.C. Petersen, "A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis," *Management Science*, Vol.39, No.10(1993), pp.1261-1264.
- [2] Banker, R., A. Charnes, and W.W. Cooper, "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis," *Management Science*, Vol.30, No. 9(1984), pp.1078-1092.
- [3] Boussofiene, A., R.G. Dyson, and E. Thanassoulis, "Applied data envelopment analysis," *European Journal of Operational Research*, Vol.52, No.1(1991), pp.1-15.
- [4] Boyd, S. and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [5] Brockett, P. and B. Golany, "Using rank statistics for determining programmatic efficiency differences in data envelopment analysis," *Management Science*, Vol.42, No. 3(1996), pp.466-472.
- [6] Chang, H.H., "Determinants of hospital efficiency: the case of central government

- owned hospitals in Taiwan," *The International Journal of Management Science*, Vol.26, No.2(1998), pp.307-317.
- [7] Charnes, A. and W. Cooper, "Data Envelopment Analysis," in H.E. Bradley (Ed.) *Operational Research '90*, pp.641-646. Pergamon Press, Oxford, 1991.
- [8] Charnes, A., W.W. Cooper, and E. Rhodes, "Measuring the efficiency of decision making units," *European Journal of Operational Research*, Vol.2, No.6(1978), pp.429-444.
- [9] Cooper, W.W., L.M. Seiford, and K. Tone, *Data envelopment analysis : a comprehensive text with models, applications, references and DEA-solver software*, Kluwer academic publishers, Boston, 2000.
- [10] Donthu, N., E.K. Hershberger, and T. Osmonbekov, "Benchmarking marketing productivity using data envelopment analysis," *Journal of Business Research*, Vol.58, No. 11(2005), pp.1474-1482.
- [11] Doyle, J.R. and R.H. Green, "Cross-evaluation in DEA : Improving discrimination among DMUs," *INFOR*, Vol.33, No.3(1995), pp. 205-222.
- [12] Doyle, J. and R. Green, "Efficiency and Cross-efficiency in DEA : Derivations, Meanings and Uses," *Journal of Operational Research Society*, Vol.45, No.5(1994), pp.567-578.
- [13] Grosskopf, S. and C. Moutray, "Evaluating performance in Chicago public high schools in the wake of decentralization," *Economics of Education Review*, Vol.20, No.1(2001), pp.1-14.
- [14] Luo, X., "Evaluating the profitability and marketability efficiency of large banks - an application of data envelopment analysis," *Journal of Business Research*, Vol.56, No. 8(2003), pp.627-635.
- [15] McMullen, P.R. and G.V. Frazier, "Using simulation and data envelopment analysis to compare assembly line balancing solutions," *Journal of Productivity Analysis*, Vol.11, No.2(1998), pp.149-168.
- [16] Sexton, T.R., R.H. Silkman, and A.J. Hogan, "Data Envelopment Analysis : critique and extensions," In *Measuring Efficiency : An Assessment of Data Envelopment Analysis*. (Silkman, R.H., Ed.) pp.73-104. Jossey-Bass, San Francisco, 1986.
- [17] Shafer, S.M. and T.A. Byrd, "A framework for measuring the efficiency of organizational investments in information technology using data envelopment analysis," *The International Journal of Management Science*, Vol.28(2000), pp.125-141.
- [18] Sueyoshi, T., K. Ohnishi, and Y. Kinase, "A benchmark approach for baseball evaluation," *European Journal of Operational Research*, Vol.115, No.3(1999), pp.429-448.
- [19] Talluri, S., "A benchmarking method for business-process reengineering and improvement," *The International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, Vol.12, No.4(2000), pp.291-304.
- [20] Talluri, S., "Data envelopment analysis : models and extensions," *Decision Line*, Vol. 31(2000), pp.8-11.
- [21] Talluri, S. and J. Sarkis, "Extensions in efficiency measurement of alternate machine component grouping solutions via data envelopment analysis," *IEEE Transactions on Engineering Management*, Vol.44, No.3 (1997), pp.299-304.
- [22] The MathWorks, Inc., MATLAB(software package), <http://www.mathworks.com>, 2004.