East Asian Math. J. 24 (2008), No. 5, pp. 527-545

시각화를 이용한 증명교육

강미광 · 김명지

ABSTRACT. One of the education purpose of the section "Figures" in the eighth grade is to develop students' deductive reasoning ability, which is basic and essential for living in a democratic society. However, most of middle school students feel much more difficulty or even frustration in the study of formal arguments for geometric situations than any other mathematical fields. It is owing to the big gap between inductive reasoning in elementary school education and deductive reasoning, which is not intuitive, in middle school education. Also, it is very burden for students to describe geometric statements exactly by using various appropriate symbols. Moreover, Usage of the same symbols for angle and angle measurement or segments and segment measurement makes students more confused. Since geometric relations is mainly determined by the measurements of geometric objects, students should be able to interpret the geometric properties to the algebraic properties, and vice verse.

In this paper, we first compare and contrast inductive and deductive reasoning approaches to justify geometric facts and relations in school curricula. Convincing arguments are based on experiment and experience, then are developed from inductive reasoning to deductive proofs. We introduce teaching methods to help students's understanding for deductive reasoning in the textbook by using stepwise visualization materials.

It is desirable that an effective proof instruction should be able to provide teaching methods and visual materials suitable for students' intellectual level and their own intuition.

1. 서론

수학교육의 목표 중 하나는 논리적으로 사고하는 태도와 능력을 기르고 민주시민으로서 합리적인 의사결정을 할 수 있는 능력을 갖추게 하는 것이다. 이러한 수학적인 힘을 갖추게 하는 가장 좋은 방법 중 하나는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 길러주는 것으로 직관과 관찰로부터 귀납과 유추 능력을 개발

2008년 11월 투고, 2008년 12월 심사 완료

이 논문은 2007학년도 동의대학교 교내연구비에 의해 연구되었음(과제번호2007AA097)

2000 Mathematics Subject Classification: 97D40

Key words: 귀납적 추론, 연역적 추론, 시각화, 비형식적 증명

하고, 연역적 추론능력을 발달시키는 일일 것이다. 추론이란 이미 알고 있는 사실로부터 새로운 사실을 논증에 의해 이끌어내는 과정으로, 여기서 논증이란 사회적으로 인정되고 합의된 것으로 어떤 명제가 참임을 자기 자신을 포함해서 다른 사람을 확신시키고 이해시키기 위한 도구이다. 특히 다양한 의견이 혼재하고 이해관계가 서로 충돌하는 이 사회에서 민주주의가 제대로 발전하기 위해서는 타당한 논증에 의한 사회적 합의가 필요하므로 합리적이면서도 논리적인 추론 능력은 현대사회의 모든 시민이 갖추어야 할 필수적인 자질이다. 그리고 이러한 올바른 추론능력과 논리적 사고는 학교에서의 수학교육을 통해 배양되어야 하므로 학교교육에서 학생들의 추론교육은 매우 중요하다.

우리나라 교육과정에서 8학년 도형영역의 목표 중 하나는 간단한 도형의 성질을 증명하도록 함으로써 증명의 본질을 이해하고 논리적으로 추론하는 능력을 기르도록 하는 것이다. 도형 영역에 있어서 연역적인 추론의 방법을 활용하는 이유는 도형의 성질은 시각적으로 확인할 수 있으므로 연역적 추론을 연습하기에 적합한 소재인 동시에 연역적 추론을 이용하면 도형의 개념이나 성질이 체계적으로 정리되는 장점이 있기 때문이다.

그러나 중학교 학교 수업에서 학생들이 가장 어려워하는 부분 중의 하나가 도형의 증명부분으로, 국내외의 선행연구 결과(류성림, 1993; 우정호, 1994; 이종희 · 김선희, 2002; Fischbein, 1982; Miyazki, 2000)를 보더라도 연역적 추론을 통한 증명능력은 매우 낮은 것으로 나타나 있다. 학교현장에서 교과목표에 따라 증명에 관한 문제를 낼 경우, 학생들이 거의 손을 대지 못하므로 변별력이 없어 제대로 평가가 이루어지기 힘들다. 그래서 평가의 어려움으로 인해 증명과정의 빈칸 채우기 내지 정리의 내용을 묻는 것으로 대처하는 경우가 많다.

학교수학에서 학생들이 연역적이고 형식적인 증명을 어려워하는 이유는 수학적 증명은 학생들이 이전에 학습했던 수학의 내용과는 근본적으로 다른 수준으로의 도약이자 수학에 대한 인식의 구조적 변화를 요구하기 때문이다(우정호, 1998). 실제로 학생들에게 증명교육은 이제까지 수학적 대상이 실세계에서 경험하는 사건과는 달리 수학적 대상이 정신적 구성물로 이루어지고 실험적 검증대신에 형식적으로 진술된 법칙이 통용되는 수학 세계로의 진입을 의미한다. 그러므로 학생들은 이제 구체적 대상 대신에 형식적으로 추상화된 대상의 존재를 가정해야 하고 수학적 사실을 경험적 검증대신에 형식적 증명을 통한 연역적 검증으로 통용되는 수학의 규칙을 따라야 하므로 이러한 비약을 쉽게 받아들이지 못한다. 또한 Fischbein(1982)는 연역적 증명방법을 학생들이 힘들어하는 이유를 그들의 직관과 일치하지 않아 증명의 의미와 필요성을 제대로 이해하지 못했기 때문으로 지적한다. 즉, 수학적인 명제의 타당성을 연역적 추론에 의해 정당화하려는 전통적인 형식적 증명 방식이 시각적이고 경험적으로 확인하려는 학생들의 직관적 사고방법과

는 차이가 있기 때문이라는 것이다. 그러므로 중학교에서 증명교육이 제대로 이루어지기 위해서는 학생들의 직관이나 경험에서 출발하여 통찰력과 사고력을 바탕으로 점진적인 형식화가 이루어지도록 해야 하며 학생들이 증명의 가치와 필요성을 충분히 인지할 수 있도록 지도되어야 할 것이다(박주희, 2001; Battista & Clements, 1995).

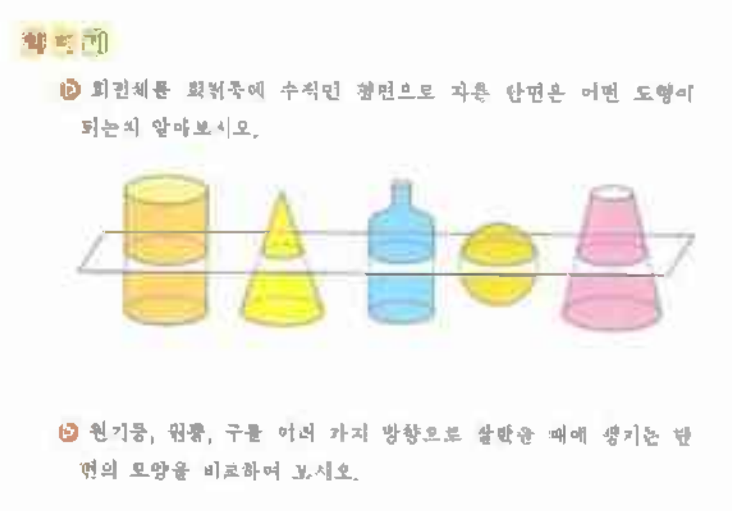
이 논문에서는 초등교육의 귀납적 추론과 중등교육의 연역적 추론인 증명이 자연스럽게 연결될 수 있도록 그 간격을 메워줄 수 있는 시각화된 비형식적 증명 방법을 중학교 증명교육의 개선방안으로 제시하고자 한다. 이는 완전히 형식화된 증명 이전에 연역적 논리 구조와 기본적인 아이디어를 직관적으로 의미 있게 통찰하는 방법을 먼저 익힘으로써 연역적 추론에 대한 거부감을 없애고 필요성을 느끼게 하고자 함이다. 그리고 학생들이 동일한 수학적 개념이더라도 다양한 표상을 통해 나타내고 사고하는 방법을 개발시키기 위해, 중학교 교육과정에 있는 대수적 내용을 기하적으로 해석, 표현하는데 시각적인 방법을 활용하고자 한다.

2. 학교에서의 증명교육

2.1. 추론교육과 증명교육

추론이란 이미 알고 있는 판단으로부터 새로운 판단을 이끌어 내는 사유작용으로 문제해결과 함께 수학의 가장 근본적인 측면이다. 학교수학에서 추론이란 명제로부터 명제를 이끌어내는 간접적인 인식수단을 의미하며, 추론능력은 수학을 이해하는데 핵심적인 역할을 한다. 수학적으로 추론한다는 것은 마음의 습관이므로 많은 상황에서 꾸준히 사용함으로써 개발되어야 하며 체계적인 추론은 학년 수준에 따라 요구되는 엄밀함의 정도는 다르지만 모든 내용 영역에서 그리고 모든 학년 수준에서 추론교육은 연속적으로 다루어져야 한다. 그리하여 중등학교를 마칠 무렵에는 학생들의 수학적 증명, 즉 가정에서부터 논리적이고 엄밀하게 연역하여 결론에 이르는 논증을 이해하고 실제로 할 수 있어야 하며 그러한 논증의 가치를 음미해야 한다(류희찬 외, 2007).

추론은 귀납추론, 유비추론, 연역적 추론으로 구분할 수 있으며 귀납추론은 부분적이거나 특수한 사실로부터 전체적이고 보편적인 사실 또는 다수의 연속적인 변화에서 일반적 법칙을 이끌어 내는 추론이다. 다음은 우리나라 6단계에서 회전체의 성질을 지도하기 위해 제시된 귀납추론의 예이다.



<그림 1> 회전체의 성질

유비추론은 어떤 대상이나 집합에서 성립하는 사실이 이와 유사한 대상 또는 집합에 대해서도 성립하리라고 추론하는 것으로, 삼각형, 사각형, 원과 같은 평면도형의 성질이 각각 사면체, 직육면체, 구 등의 입체도형에도 역시 성립할 것이라 추리해보는 것이다. 귀납추론과 유비추론은 주로 경험과학에서 새로운 법칙을 발견하는 방법이자 기존에 알고 있는 지식으로부터 새로운 아이디어를 구성하기 위한 기본적이면서도 강력한 매커니즘으로 현행 초등학교 수학교육과정에서 사용하는 추론 방법이다.

연역적 추론은 이미 알고 있는 일반적인 사실이나 원리를 전제로 하여 개별적인 특수한 사실이나 원리로서의 결론을 이끌어내는 방식으로, 수학에서 증명이란 이 연역적 추론을 의미한다. 이러한 연역추론에는 연역법과 세 종류의 삼단논법(syllogism), 추이법칙, 수학적 귀납법 등의 직접증명법과 귀류법, 전환법, 동일법 등의 간접증명법이 있다. 현행 중학교 수학과 교육과정에서는 도형 단원에서 주로 직접증명법만을 사용해 도형의 성질을 증명하고 중학교 과정의 증명교육은 7단계에서 7%, 8단계에서 58%, 9단계에서 35%정도 이루어지고 있다(중앙교육진흥 연구소 교과서 7, 8, 9단계).

수학에서 귀납추론과 유비추론은 가정이 '참' 일 때 이끌어내는 결론도 반드시 '참'이라는 보장은 할 수 없는 반면에 연역적 추론은 가정이 '참'이면 결론은 항상 '참'이므로 현 중학교 증명교육에서는 '참'인 사실로 유도하고 정당화를 제시하는 방법으로 주로 연역적 추론을 이용하고 있다.

2.2. 증명의 역할과 증명교육

관점에 따라서 증명의 역할이 다소 달라지긴 하지만 대체로 가장 많이 공감하는 부분은 어떤 사실이 참임을 보여줄 수 있는 정당화의 수단이자 자기 자신과 남을 확신시키기 위한 설명이라는 것일 것이다. Bell(1976)은 증명이란 어떤 명제가 참임을 주장하기 위한 근거가 되는 정당화, 어떤 명제가 참인 이유에 대한 통찰을 제공하도록 기대되는 설명, 그리고 여러 가지 결과를 공리. 주요개념 및 정리, 따름정리 등을 연역적 체계로 조직화하는 체계화로 보았고, De Villers(1991)은 여기에 새로운 결과를 발견하거나 발명하는 발견과 확신 또는 이해의 수단이 되는 의사소통의 역할을 추가시켰다. 반면에 준경험주의의 Lakatos는 전제가 되는 공리가 참이라는 보장이 없으므로 증명은 결론이 참이라는 정당화의 기능보다는 이미 주장된 정리를 비판함으로써 정리를 개선하고 발견하는 역할이 진정한 기능이라 주장한다. 이처럼, 수리철학에서는 수학적 지식의 본질을 어떻게 보느냐에 따라 증명에 대한 관점도 달라지며, 절대주의는 증명을 수학명제가 참임을 밝히는 정당화의 수단으로 보고 사회적 구성주의는 확신과 설명의 수단으로 본다.

한편, 박은조(2004)가 조사한 교사의 증명에 대한 의식조사에 따르면, 증명을 '가정으로부터 결론을 이끌어내는 연역'이라 답하는 교사가 72.8%이고 '다른 사람을 확신 · 이해시키기 위한 설명'은 9.6%, '사고실험'은 3.2%인 것으로 나타났다. 이는 증명지도에 있어 여전히 절대주의 수리철학의 영향이 지속되고 있고, 그로인해 유클리드 기하를 중심으로 연역적이고 형식적인 엄밀한 증명을 강조해 오고 있음을 알 수 있다. 실제 증명지도에 대한 도입 방법에도 연역적이고 형식적인 기호사용을 강조하는 종합적 접근이 63.2%로 가장 많은 비중을 차지하였다. 이처럼 대부분의 교사들은 증명의 다양한 역할이 있음에도 불구하고 증명을 입증의 수단이자 논리적인 수학적 사고 과정을 기르기 위해 필요 불가결 하다고 생각하여 연역적 추론 교육만을 강조하는 경향이 있다.

증명은 결론이 참이기 위해서 우선 만족되어야 할 선행조건을 탐색하는 분석적 방식과 그러한 선행조건을 공리와 정리에 근거하여 가정으로부터 이끌어 내는 종합적 방식이 통합된 역동적 사고 과정이다. 또한 반성적 사고와 이해력 증진을 위한 중요한 도구로써의 가치를 가지고 있으므로 증명교육은 수학과 수학적 사고에서 아주 중요한 역할을 한다.

그러나 학교수학에서 증명교육이 차지하는 중요성의 비중에 비해 학생들의 증명능력은 매우 낮은 수준이다. 최현호와 한태식(1990)의 연구에 따르면 중학교 2학년 학생 중 60%가 연역적인 증명이 불가능한 반 힐레의 수준 0과 수준 1에 머무르고 있고 25%의 학생만이 연역적인 증명이 가능한 수준 3과 수준4에 이르고 있으며, 3개의 중학교 3학년을 대상으로 한 연구(류성림, 1993)에서도 상위 학생 23%정도를 제외한 나머지 학생들은 연역적인 증명을 하는데 있어 많은 장애를 가지고 있다고

하였다. 학생들은 긍정식 삼단논법에 의하여 결론이 유도 될 수 있음을 알고 있지만, 그렇지 않은 경우 결론의 진위성에 의하여 추론에 영향을 받으며 특히 도형의 정의를 성질과 혼돈하여 증명의 기호화나 명제의 가정과 결론에 구분에 어려움을 겪는다고 한다(서동엽, 1999). 또한 증명이 가정에서 결론에 이르는 추론의 연결 관계임을 인식하지만 증명 문제를 대하게 되면 가정에서 어떻게 전개해야 할지 몰라 시작하지 못하는 경향이 있으며 이미 알고 있는 정리나 정의, 성질을 활용하는 능력이 부족하다. 이러한 경향은 우리나라뿐만 아니라 세계 모든 학생들이 겪는 어려움이기도 하다.

Brandford(1908)는 증명은 감각-지각과 추상적인 사고의 결합이므로 이러한 수준의 상승은 자연스럽게 일어나야 함을 강조하며 증명수준을 실험적 증명, 직관적 증명, 과학적 증명으로 3단계로 구분하였다. 첫 번째 수준인 실험적 증명은 타당성의 근거를 주로 감각지각에서 찾으며 근사적으로 특정한 사실만을 보여주는 정당화 수준이지만 다음 단계인 증명의 본질을 이해시키기 위해 반드시 거쳐야 하는 단계이고, 일반적으로 타당한 내용을 감각으로 지각할 수 있는 매개체를 통하여 정당화하는 활동으로 증명의 본질인 일반성과 보편성을 내포하는 단계를 두 번째 직관적 증명이라 하였다. 실험적 증명과 세 번째 단계인 과학적 증명의 경계를 확실히 구분 지으면서 그 사이의 간격을 메워주는 단계이다. 세 번째 단계인 과학적 증명은 공리나 이미 증명된 정리로부터 논리적 추론만을 사용하여 완전하게 연역하는 증명단계로 이러한 3단계를 통하여 증명을 지도하면 증명의 본질에 대한 학생들의 이해도를 향상시키고 경험적 확인과 연역적 증명의 차이점을 확연히 구분 짓게 할 수 있다고 하였다.

Wittmann(1988; 홍진곤; 권선일 2004 재인용)은 증명이라고 말할 수 있는 기준은 형식적이고 연역적 체계를 갖추고 있는가, 그렇지 않는가의 문제가 아니라 일반적이고 보편적인 정당화에 도달하고 있는가의 여부로 결정되는 것으로 보고 Brandford의 감각적 증명단계는 이미 증명으로서의 의미를 가지고 있다고 보았다. 또한 Blum과 Kirsch(1991; 서동엽, 1999 재인용)는 '전형식적 증명'을 '정확하지만 형식적으로 표현된 증명은 아닌 비형식적인 연역의 고리'로서 정의하고 결론은 구체적인 경우로부터 직접적으로 일반화될 수 있어야 하며 형식화된다면 정확한 수학적 증명에 대응하는 것이라 하며 '전형식적 증명'을 통한 증명 지도 방법을 제안하였다.

2.3. 시각화를 이용한 수학교육

수학교육관점에서의 직관은 수학적인 문제 해결 상황에서 분석적인 지적 과정에 의존하지 않고 직접적으로 문제해결의 단서를 발견하는 정신작용으로 초등학교 시절 1에서 100까지의 자연수 합을 구하는 문제를 등차수열의 합을 구하는 방법으로

쉽게 답을 찾아내었다는 Gauss의 일화처럼 통찰, 영감 등의 형태로 문제해결과정에서 중요한 역할을 하고 있다(이대현; 박배훈, 2001). 즉, 직관은 수학학습과정에서 학습내용에 대한 즉각적인 이해가 가능하도록 해주며 나아가 수학적 문제해결과정에서 문제의 조건이나 구조에 대한 통찰을 바탕으로 즉각적인 판단 및 해결을 가능하게 한다.

수학교육에서 직관의 한 종류인 시각화는 눈에 보이지 않는 것을 볼 수 있는 형태로 만들어 보여주는 것 즉, 모든 수학적 개념이나 원리 또는 문제해결들을 기하학적 도형의 표현으로 형상화하는 것 뿐 아니라 시각적인 도형 또는 눈에 보이는 이미지를 통한 문제이해의 활동이 이루어지는 것을 의미한다. 이러한 시각화는 추상적인 수학적 지식을 가르치는데 효과적이며, 나아가 학생들의 인지적 측면뿐 아니라 심리적, 정의적 측면까지 영향을 준다. 또한, 시각화의 역할에 대해 Polya(1557)역시 "그림은 기하문제의 대상이 될 뿐 아니라 처음에 전혀 기하적이 아닌 모든 문제 풀이에 중요한 도움이 된다"고 하여 그 중요성을 말하였으며, Einstein도 Hadamard에게 보낸 편지에서 자신은 시각적이고 역동적인 표상을 선호하며 형식적인 단어나 기호들은 그 다음 단계에서 찾아야 한다고 했다(황효연, 2008 재인용). 이처럼 시각적인 표상이 창조적인 아이디어를 구상하기에는 언어적, 논리적인 표상보다 더 적합하다고 할 수 있다. 따라서 실험적, 귀납적인 정당화 방식과 수학적, 형식적인 증명 사이에 논리적으로나 심리적으로의 큰 간극이 시각화된 이미지를 통해 연결될 뿐 아니라 완전히 형식화된 증명 이전 단계에서 비형식적인 증명으로서의 정당화를 제시해 줄 수 있으리라 생각된다.

실제로 현행 수학과 교육과정의 7단계에서 집합의 연산을 지도하기 위해 벤다이어그램을 이용하고 있으며 8단계의 인수분해와 피타고라스 정리에서도 이들의 기하적 표현과 함께 의미를 중요시하고 있으며 연립일차방정식의 해와 함수는 그래프를 통한 시각적 표현을 활용하고 있다. 이러한 시각화는 역사적으로도 커다란 비중을 차지하여 왔다. 비록 유클리드 공리체계가 확립되면서, 보편적 진리추구를 위한 수학이 강조되고, 직관이나 이미지의 불신이 시각화의 약화를 초래 하였으나 유클리드 이전의 수학은 수나 그림에 의존한 직관을 중시하였다. 그리고 최근 다시 시각적이고 직관적인 측면을 강조하는 추세로 수학의 시각적인 면과 기호적인 면의 균형이 중시되고 있다.

과거 시각적인 도구들이 극히 제한되었던 시대와는 달리 다양한 시각적 매체를 접할 수 있는 현대 학생들에게 시각화를 통한 수학수업은 수학에 대한 거부감을 없애고 문제해결에 있어 창조적인 아이디어를 구상하는데 많은 도움을 줄 수 있으므로 학교수학교육에서 교사는 이를 잘 활용하도록 해야 할 것이다.

3. 시각화를 이용한 증명교육 개선방안

현 교육과정에서는 '맞꼭지각의 크기는 서로 같다'라는 명제에 대한 연역적 증명을 시작으로 8-(나)단계에서는 증명에 대한 학생들의 부담감을 줄여주기 위해 삼각형, 평행사변형, 마름모 등 이미 초등학교에서 귀납적 추론을 통해 살펴보았던 평면도형의 성질을 바탕으로 연역적 증명을 지도하고 있다. 현재의 교육과정은 7학년의 첫 단원에서만 집합의 정의와 연산을 다루고 추론의 기초가 되는 정의의 의미와 추론 방법은 생략한 채 중학교 8학년 도형단원에서 명제, 가정과 결론의 정의를 예와 함께 국지적인 개념정도만을 지도하고 있다. 그런 다음 증명을 연역적 추론으로 다루고 있으므로 학생들은 왜 자명한 사실들을 증명해야 하는지, 자신이 하고 있는 증명방법이 어떤 근거에서 옳은지, 사용가능한지에 대한 확신이 없는 경우가 많다. 따라서 우리는 여기서 중학교 과정에서 나오는 연역적 추론을 시각화를 이용하여 학생들의 눈높이에 맞는 교수방안을 생각해 보고자한다.

(1) '맞꼭지각의 크기는 서로 같다.'

최초의 수학자로 탈레스를 꼽는 이유는 실험을 통해 쉽게 알아낼 수 있는 기초적인 기하적 사실을 논리적인 추론으로 입증했기 때문이다. 이 명제에 대한 증명은 연역적 논증이 가지고 있는 질서 정연함과 완비성, 설득력과 같은 지적인 아름다움을 가지고 있으면서도 간결하므로 대개의 교과서가 이를 연역적 추론의 시작의 대상으로 하고 있다.

위의 명제에 대한 연역적 추론을 위해 현 교육과정에서는 맞꼭지각은 어떤 고정된 각에 대해 보각관계에 있다는 기하적 성질을 각의 크기가 가지는 대수적 성질을 이용하여 다음과 같이 증명하고 있다(강행고 외8인, 2001).

8단계-(나)

[명제] '맞꼭지각의 크기는 서로 같다.'

증명.

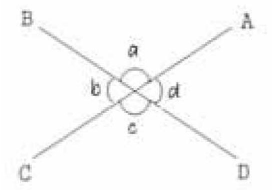
오른쪽 그림에서

$\angle a + \angle b = 180°$ 이고 $\angle b + \angle c = 180°$ 이므로

$\angle a = 180° - \angle b$ 이고 $\angle c = 180° - \angle b$이다.

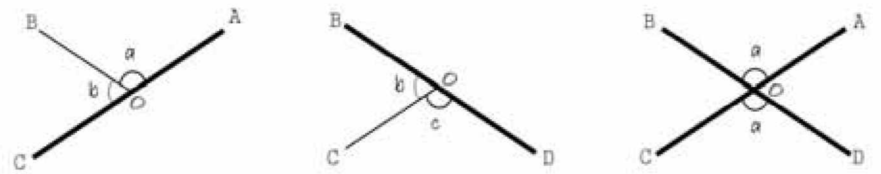
따라서 $\angle a = \angle c$이다.

마찬가지로 $\angle b = \angle d$이다.



대부분의 중학교 교과서에서 기하학적 도형인 각과 사칙연산이 가능한 대수적 사실인 각의 크기를 같은 기호로 사용하고 있으며, 간략히 하는 의미에서 $\angle AOB$를 $\angle a$로 표현하며 왼쪽의 증명과정에서 $\angle a$는 $\angle a$의 크기를 나타내고 있다.

다음은 위의 연역적 증명과정에서 나타난 대수적 성질을 학생들에게 시각적으로 보여주기 위한 기하학적 표현이다. 이를 위해, <그림 2-1>과 <그림 2-2>가 각각 그려진 OHP 필름 2장을 준비한다.



<그림 2-1> <그림 2-2> <그림 2-3>

① $\angle a$와 $\angle b$의 합은 평각으로 180°이고 <그림2-2>와 같이 $\angle b$와 $\angle c$의 합 역시 평각으로 180°이므로 모든 직선은 평각이다'를 인식하게 하는 것이므로 선분 AC와 선분 BD를 시각적으로 굵게 표현한다. <그림 2-1>의 $\angle AOB$와 $\angle BOC$가 서로 보각이라는 기하적 사실에서 $\angle a+\angle b=180^\circ$이 성립하고 <그림 2-2>에서 $\angle DOC$는 $\angle BOC$의 보각이라는 기하적 성질은 $\angle b+\angle c=180^\circ$라는 대수적 사실로 해석된다.

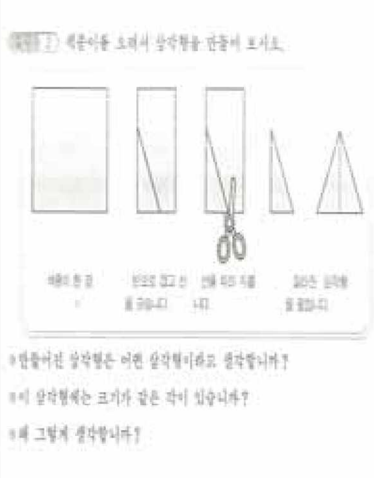
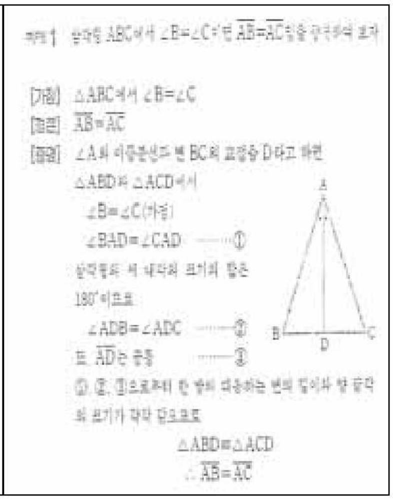
② 대수적 등식 $\angle a+\angle b=180^\circ=\angle c+\angle b$ 에서 양변에 같은 수 $\angle b$를 빼더라도 등식은 성립하므로 $\angle a=180^\circ-\angle b=\angle c$이다. 학생들에게 위의 증명을 시각적으로 지도할 때는 <그림 2-2>를 뒤집어 선분 BD가 선분 CA와 겹치도록 하면 $\angle a$와 $\angle c$가 같음을 기하적으로 보여줄 수 있다.

③ <그림 2-1>과 <그림 2-2>에 있는 각각의 점 B와 O,, C가 <그림 2-3>처럼 서로 겹쳐지도록 배열한다.

'$\angle a=180^\circ-\angle b$'라는 대수적 사실을 종종 '$\angle AOC$ 에서 $\angle BOC$를 빼면 $\angle AOB$이 나온다'라는 말을 관습적으로 쓰고 있으나 기하적으로 각의 뺄셈 은 정의되어있지 않다. '각이 서로 같다'라는 용어도 따로 정의하지 않고 대수적 의미에서 각의 크기가 같을 때를 암묵적으로 사용하고 있기 때문에 학생들은 대수적인 식에서는 등식의 성질을 쉽게 받아들이는 반면 기하적 표현에서는 덜 익숙한 탓인지 직관적으로 받아들이지 못하는 경향이 있다.

(2) '두 밑각의 크기가 같으면 이등변 삼각형이다'

위의 수학적 내용을 초등학교 4단계와 중학교 8단계에서는 다음과 같이 접근하고 있다.

<table>
<tr>
<td>귀납적 추론 4-(나)</td>
<td></td>
<td>연역적 추론 8-(나)</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

여기서 연역적 추록은 삼각형의 합동을 이용해 논리적으로 증명하고 있으나 학생들이 감각적으로 이 명제를 음미하고 받아들이기에는 부족한 감이 있으므로 다른 방법을 사용하여 증명하고자 한다.

먼저, 이등변삼각형의 성질인 '두 밑각의 크기가 같으면 이등변 삼각형이다'라는 명제의 증명을 위해서는 '두 밑각의 크기가 같다'라는 가정의 의미가 제대로 전달되어야 하므로 각에 대한 정확한 이해가 우선되어야 한다. '두 개의 반직선으로 이루어진 도형'이 각이라는 것을 강조하기 위해 <그림 3-1>에서처럼 각의 모형을 길이가 조절되는 안테나를 이용해 만들었고 '밑각의 크기가 같다'라는 대수적 의미를 기하적으로 파악하기 위해 똑같은 모양을 두 개 준비하였다. 각의 크기가 같은 두 개의 각을 밑각으로 가지는 삼각형이 실제로 이등변 삼각형이 되는지를 먼저 예측하고 실험한 다음 그에 대한 연역적 방법을 생각하고자 한다.

<그림 3-1>

⇒

<그림 3 -2>

⇒

<그림 3-3>

① 이등변삼각형의 성질을 보이기 위한 실험적 활동을 위해 <그림 3-1>과 같이 각의 크기가 같은 두 개의 도형(각)을 준비하고 직접 두 도형을 겹쳐보게 함으로써 두개의 반직선이 이루는 각의 크기가 서로 같음을 보여준다.

② 두 각을 밑각으로 가지는 삼각형을 만들기 위해 두 각의 한 변씩을 겹쳐 밑변을 만든다.

③ 두개의 반직선을 연장하여 <그림 3-2>와 같이 두 반직선이 한 점 A에서 만나 구성된 삼각형의 두변의 길이가 같을지를 예측해 보고 그 이유를 생각해 보도록 한다.

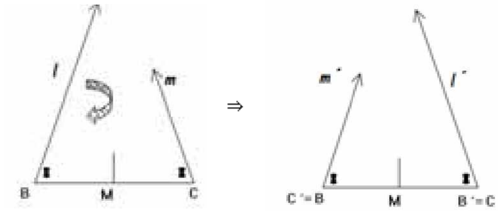
④ 실제로 $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 의 길이가 같은지를 삼각형을 분해하여 비교해 본다.

⑤ 나아가 자신의 생각이나 아이디어를 되도록 남에게 정확하고 간결하게 잘 전달 될 수 있도록 글로 표현해 보게 한다.

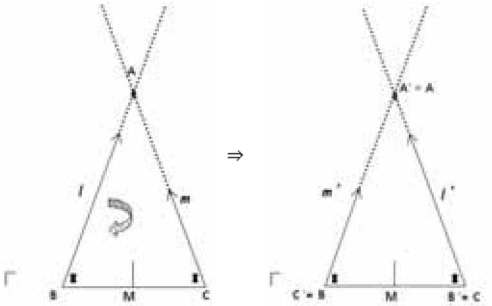
[다른 증명법]

다음은 $\angle B$와 $\angle C$의 크기가 같으므로 $\angle B$가 $\angle C$와 겹쳐지도록 할 수 있다는 생각에서 출발한 아이디어이다.

① 겹치도록 접는다는 것은 $\overline{BC}$의 중점 M을 지나는 수직이등분선에 의한 선대칭으로 생각할 수 있으므로 <그림 4-1>와 같이 선대칭에 의한 점 B, C의 상을 B',C'라 두고 반직선 l, m의 상을 l', m'라 둔다.



<그림 4-1>



<그림 4-2>

② $C'=B$, $B'=C$이고 $l'=m$, $m'=l$이므로, 여기서 A를 l과 m의 교점이라 두면 A'는 l'와 m'의 교점이 된다. <그림 4-2>에서 $l'=m$이고 $m'=l$이므로 l와 m'의 교점 A'는 결국 m과 l의 교점이 되어야한다. 그러므로 $A'=A$이다.

③ <그림 4-2>에서 △ABC에서 선대칭은 합동변환이므로 $\overline{AB}$와 $\overline{A'B'}$의 길이는 같고, $\overline{A'B'}=\overline{AC}$이므로 △ABC는 이등변 삼각형이다.

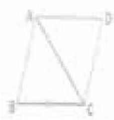
(3) '평행사변형에서 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.'

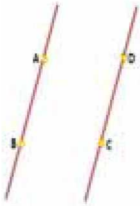
다음은 평행사변형의 성질 중 하나인 '두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다"라는 명제를 증명하기 위해 초등학교와 중학교 교육과정에서 다루는 증명방법과 시각적 표현이다.

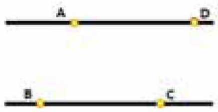
귀납적 추론 4-(나)		연역적 추론 8-(나)	평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같음을 알아보자. 즉, 평행사변형ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$ 임을 증명하여 보자. 

위의 연역적 추론에 대해서 아래와 같은 3장의 OHP 필름을 이용하면 학생들의 이해를 쉽게 하고, 능동적인 참여를 유도할 수 있을 것으로 기대된다.

① 주어진 평행사변형 $ABCD$에서 대각선 AC와 각 대변을 연장하여 <그림 5-1>, <그림 5-2>, <그림 5-3>과 같이 하나의 직선과 두 쌍의 평행선을 그려놓은 세장의 OHP 필름을 준비한다.





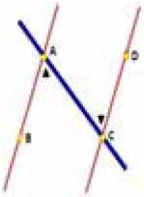


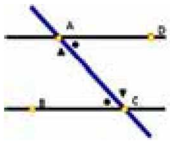
<그림 5-1> <그림 5-2> <그림 5-3>

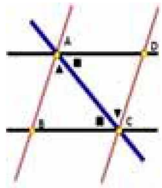
② <그림5-2>의 평행선상의 점 A와 C가 <그림 5-1>의 점 A와 C를 겹쳐지도록 하면 <그림 6-1>의 도형이 생긴다. 여기서 $\angle BAC$와 $\angle DAC$의 관계를 알아본다.

③ <그림 5-3>의 평행선상의 점 A와 C가 <그림5-1>의 점 A, C와 겹쳐지도록 하면 <그림 6-2>의 도형이 생긴다. 여기서 $\angle BCA$와 $\angle DCA$의 관계를 알아본다.

④ <그림 5-1>, <그림 5-2>, <그림 5-3>에서 각 장의 A와 C가 각각 겹쳐지도록 배열하면 <그림 6-3>과 같은 도형이 만들어 진다. 여기서 △ABC와 △CDA가 서로 합동임을 유도하게 하고 대응하는 변의 길이가 같다는 결론을 이끌어 낸다.


<그림 6-1>

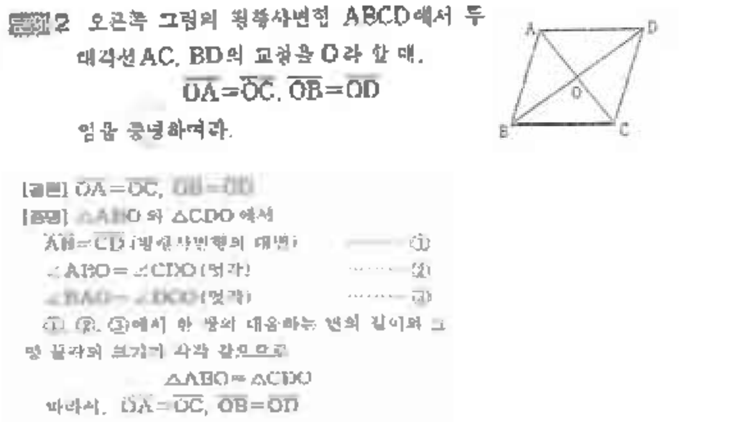

<그림 6-2>


<그림 6-3>

⑤ 이제까지 전개한 과정이나 자신의 아이디어를 남에게 되도록 정확하고 간결하게 전달될 수 있도록 글 또는 기호를 사용하여 표현하게 한다.

(4) ‘평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.’

연역적 추론 8-(나)


예제 2 오른쪽 그림의 평행사변형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라 할 때,

$\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$

임을 증명하여라.

[결론] $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$

[증명] △ABO와 △CDO에서

$\overline{AB}=\overline{CD}$ (평행사변형의 대변) ……①

∠ABO=∠CDO (엇각) ……②

∠BAO=∠DCO (엇각) ……③

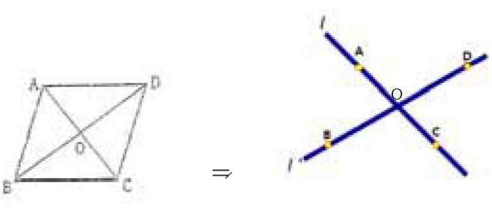
①, ②, ③에서 한 쌍의 대응하는 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 각각 같으므로

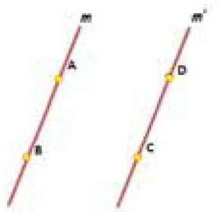
△ABO≡△CDO

따라서, $\overline{OA}=\overline{OC}$, $\overline{OB}=\overline{OD}$

위의 연역적 추론은 △ABO와 △CDO가 합동임을 유도하기 위해 평행사변형에서 ‘대변의 길이는 서로 같다’라는 사실을 이용하고 있다. 이 연역적 추론을 아래의 OHP 필름을 이용하여 다음과 같이 설명하면 이 정리가 가지는 본질적인 평행사변형의 성질을 더 풍부하게 경험하도록 할 수 있을 것이다.

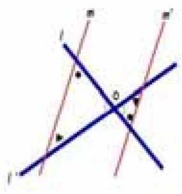
① 평행사변형 $ABCD$의 두 대각선과 한 쌍의 평행선에 연장선을 그은 2장의 OHP를 준비한다. $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$를 연장한 직선을 l, l'라 하고, $\overline{AB}$와 $\overline{DC}$를 연장한 평행선을 각각 m, m'라 둔다.



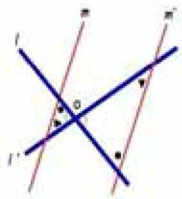


<그림 7-1> <그림 7-2>

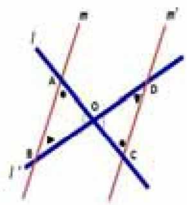
② 평행선 m, m'가 그려진 <그림 7-2>는 고정시킨 다음 <그림 7-1>을 <그림 7-3>, <그림 7-4>와 같이 교점 O를 m' 또는 m에 가깝도록 두었을 때 만들어지는 두 삼각형의 관계에 대해 알아본다. 이 두 삼각형은 서로의 내각이 각각 엇각과 맞꼭지각의 관계에 있으므로 세 내각이 서로 같다.



<그림 7-3>



<그림 7-4>



<그림 7-5>

③ $\overline{AB}$와 $\overline{DC}$의 길이가 같아질 때, $\triangle$ABO와 $\triangle$DCO의 관계를 조사한다. 즉, <그림 7-5>와 같이 l, l'와 m, m'에 있는 네 점 A, B, C, D가 서로 겹치도록 두었을 때, 두 삼각형의 관계를 알아본다. 여기서 $\overline{AB}$와 $\overline{DC}$는 평행사변형의 대변이므로 $\overline{AB}$의 길이는 $\overline{DC}$의 길이와 같다. 즉, $\triangle$ABO와 $\triangle$DCO는 서로 합동이므로 $\overline{AO}$와 $\overline{DO}$의 길이는 각각 $\overline{CO}$, $\overline{BO}$의 길이와 같으므로 결론을 유도해 낼 수 있다.

④ 평행한 두 선분 $\overline{AB}$와 $\overline{DC}$의 길이가 같을 때, 사각형 ABCD는 항상 평행사변형이 되는지를 조사하고 평행사변형의 결정조건을 생각해 보도록 한다.

4. 결론

도형영역의 증명과정을 자세히 살펴보면 기하적 내용과 대수적 사실이 명확한 구분 없이 통용되고 있다. 실제로 '각', '선분'은 기하적 도형이고 '각의 크기', '선분의 길이'는 연산이 가능한 대수적인 수로 엄연히 속한 영역이 다르지만 같은 기호를 사용하여 전개하고 있다. 그리고 두 도형의 기하적 동치는 도형을 이루고 있는 '각'과 '선분'의 대수적인 성질인 '각의 크기'와 '선분의 길이'가 대수적 동치일 때로

7-(나)에서 암묵적으로 도입하고 있다. 그러므로 도형단원에서의 기하적 명제의 증명과정은 대수적 명제로 치환하여 증명한 다음 다시 기하적 명제로 번역되고 있는 경우가 많다. 이처럼 교과서에서 대수적 표현과 기하적 표현이 혼용되어 사용되고 있기 때문에 학생들은 그만큼 은연중에 혼란을 일으키기 쉽고 자신감을 잃기 쉽다.

예를 들어 '이등변 삼각형에서 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분 한다'라는 기하적 명제를 증명하고자 하면 이를 먼저 기호로 사용하여 명확하게 표현할 수 있어야 한다. 문장을 수학적 기호로 표현할 수 있는 능력을 갖추기 위해서는 많은 시간과 노력이 필요하지만 우리나라 교육과정은 여기에 많은 시간을 할애하고 있지 않으므로 학생들은 도형과 관련된 명제를 적절한 기호를 사용하여 표현하는 데도 많은 어려움을 가진다. 또한 이를 기호로 사용하여 예제로 나타낸 교과서(강행고 외, 2001)를 그대로 인용하면 다음과 같다.

'△ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때, $\angle A$의 이등분선과 $\overline{BC}$가 만나는 점을 M이라고 하면 $\overline{AM}$은 $\overline{BC}$의 수직이등분선임을 증명 하여라'

가정에서 나타난$\overline{AB}=\overline{AC}$는 '선분 AB의 길이=선분 AC의 길이'라는 대수적 등식으로 $\overline{AB}$는 선분 AB의 길이를 나타내고 결론에서 나타난 $\overline{AM}$은 기하적 도형인 선분 AM을 나타낸다. 이와 같이 한 문장 안에서도 선분과 선분의 길이가 혼용되고 있기 때문에 도형단원에서 취급하는 연역적 추론은 학습 장애의 복병이 곳곳에 나타나는 단원이라 학생들은 수학에 대한 부정적인 이미지나 거부감을 가지기 쉽다.

도형단원에서 연역적 추론을 다루는 본래의 의도는 전통적으로 유클리드 기하가 연역적 증명교육의 소재로 사용되어온 측면도 있지만, 그 외에도 도형의 성질을 시각적으로 확인할 수 있으므로 다른 영역보다 수월할 것이라는 의도에서 증명교육을 여기서 다루고 있지만 서술적 내용을 기호를 사용한 수학적 내용으로 전환하여 정확하게 나타내기가 쉽지 않다. 그러므로 학교교육에서 증명교육의 출발점을 유클리드 기하보다는 초등 정수론을 다루자는 주장도 다시 한번 고려해 볼 일이다. 초등정수론은 자연수에 대한 성질을 구성하고 있는 전제가 기하에 비해 훨씬 적어 이해하기 쉬우며, 증명되어진 대부분의 성질이 명백한 것이 아니면서 다양한 전략을 구사할 수 있다는 장점을 갖고 있기 때문이다.

기하영역에서 증명교육은 어려운 일임이 분명하지만 학생들의 추론능력 개발은 그들이 살아나가야 할 민주주의 사회 의 구성원이 갖추어야 할 기본 자질이다. 그러므로 교사는 증명교육이 현재 우리나라의 교육과정의 울타리 안에서 제대로 이루어지게 하기 위해서는 학생들이 가지는 학습장애를 이해하고 이를 극복하기 위해서 그들 정서와 지적수준에 맞는 학습자료와 교수방법들을 강구해야 할 것이다. 이 논문에서는 학생들이 귀납적 추론능력에서 연역적 추론능력을 갖추기까지의 과정에서 시각화가 도움을 줄 수 있는 방안들을 예를 통해 제시해 보았다. 시각적 이

미지는 단순히 학생들의 이해를 돕는 것 뿐 아니라 학생의 창의적인 생각과 개방적인 사고를 위한 기회를 제공하며 시각적 표현을 통해 학습에 대한 자연스러운 사고를 유발시킬 수 있다. 이처럼, 시각적 이미지는 학생들을 쉽게 접근시키는 친밀감을 가지고 있으면서도 단순한 암기식의 학습이 아니라 사고력을 요하므로 증명교육뿐만 아니라 학교수학의 전반적인 분야에서 효과적인 교수방법으로 활용될 수 있다.

참고문헌

[1] 교육인적 자원부(2006). 수학 4-나

[2] 강행고 외8인 (2000). 중학교 수학 7-가, 나. (주)중앙교육진흥연구소

[3] 강행고 외8인 (2001). 중학교 수학 8-가, 나. (주)중앙교육진흥연구소

[4] 강행고 외8인 (2002). 중학교 수학 9-가, 나. (주)중앙교육진흥연구소

[5] 노은하 (2005). 중학교 기하 증명지도에 있어 시각화 활동을 통한 경험적 방법에 관한 연구, 공주대학교 교육정보대학원 석사학위 논문

[6] 류성림. (1993) 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문

[7] 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역, NCTM 지음 (2007). 학교수학을 위한 원리와 규 준, 경문사

[8] 박은조 (2004). 수학교사들의 증명에 관한 인식조사. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문

[9] 박주희 (2001), 점진적 구성의 증명지도를 위한 학습 프로그램 개발 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육>, 12, PP185-200

[10] 박지경 (2005). 수·연산 영역에서의 시각화 자료에 관한 연구, 부산교육대학교 교육대학원 석사학위 논문

[11] 서동엽 (1999), 증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 - 중학교 수학을 중심으로-. 서울대학교 박사학위 논문.

[12] 우정호 (1994), 증명지도의 재음미. 대한수학교육학회 논문집, **4(1)**, pp.3-24

[13] 우정호 (1998), 학교 수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부

[14] 우정호 외7인 (2006), 수학 과학 학습과 직관. 경문사

[15] 이대현 (1999), 창의적인 문제해결과정에서의 직관과 논리의 역할, 한국학교수학학회지 시리즈A <수학교육>, **38(2)** pp.159

[16] 이대현, 박배훈 (2001) 수학교육에서 직관과 그 오류에 관한 고찰, 한국학교수학학회지 시리즈A <수학교육>, **40(1)** pp.15

[17] 이대현 (2006), 직관의 즉각성 요인과 효과에 대한 고찰, 한국학교수학학회지 시리즈A <수학교육>, **45(3)** pp.263

[18] 이종희, 김선희 (2002), 학교현장에서 수학적 추론에 대한 실태조사. 한국수학교육학회 시리즈 A<수학교육>, **41(3)**, pp.273-289.

[19] 최현호, 한태식 (1990) 기하영역의 Van Hiele이론과 증명능력에 관한 연구, 수학교육 논총 제8집. 대학수학회, pp219-241

[20] 홍진곤, 권석일 (2004), 전형식적 증명의 교수학적 의미에 관한 고찰, 한국학교수학학회지 시리즈A <수학교육>, **43(4)** pp.381

[21] 황효연 (2008), 한국수학의 시각화에 관한 연구(수학 10-나를 중심으로), 서강대학교 교육대학원 석사학위논문

[22] Battista, M. T. & Clements, D. H. (1995), Geometry and proof, *Mathematics Teacher*, 88(10), 48-54

[23] Bell, Alan W. (1976)., A Study of Pupil's Proof-Explanations in Mathematical Situations, *Educational Studies In Mathematics*, Vol. 7, No.1/2, pp.23-40.

[24] Branford, B. (1908). A Study of Mathematical Education. Oxford; Clarendon press.

[25] Fischbein. E .(1981). *Intuition and Axiomatics In Mathematical Education*. Reidel Publishing co., Dordrecht. England.

[26] Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 3, No.2, pp.9-18.

[27] De Villers, Michael (1991). Pupil's Needs for Conviction and Explanation within the Context of Geometry, *Proceeding of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematical Education*, pp.255-262.

[28] Miyazki, M. (2000). Levels of Proof in Lower Secondary school Mathematics, Educational Studies in Mathematics 41, pp47-68

[29] Piaget, Jean, Trans(1928). by Marjorie Warden, *Judgment and Reasoning in the Child*, London, Routledge & Kegan Paul Ltd.

[30] Polya G. (1957). *Induction and Analogy in Mathematics*. New Jersey: Princeton university press.

Meekwang Kang
Dongeui University, 995 Eomgwangno Busanjin-Gu, Busan, Korea, 614-714
E-mail: mee@deu.ac.kr

Myungjee Kim
Dongeui University, 995 Eomgwangno Busanjin-Gu, Busan, Korea, 614-714
E-mail: jico48@hanmail.net