East Asian Math. J. 24 (2008), №. 5, pp. 521-526

Morley 정리의 한 증명방법과 그 활용에 대한 연구

이상근 · 이춘구

ABSTRACT. In this study, we'll check the proof of Morley's theorem that calculate the sides XY, YZ and ZX of Morley's triangle. We may now consider calculate area of Morley triangle and observation that, for example, in triangle ABC, length of sides XY, YZ and ZX are $8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, respectively. Therefore, compare with the area of Morley's triangle XYZ and the area of triangle ABC.

1. 서론

수학과 교육과정(교육부, 1998, p.29)에 의하면, 수학교육의 목표들 중의 하나는 '수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결'하는 것이다.

각은 평면도형을 구성하는 기본 요소들 중의 하나로, 역사적으로 많은 수학자들의 탐구대상이 되어왔다. 예를 들어, 각의 이등분선 탐구, 각의 삼등분선 탐구, 각의 작도 가능성 탐구 등등이다. 이들 중에서 가장 유명한 문제 중의 하나는 유클리드적 도구인 자와 컴퍼스를 이용하여 주어진 각을 삼등분하는 문제이다. 많은 수학자들이 이 문제의 해결을 위해 노력했으며, 그 과정에서 많은 수학적 방법 및 도구들이 발명되었다(예를 들어, 원적곡선 삽입방법, 콘코이드 곡선, 토마호크 등). 그러다가, 19세기에 반첼이 증명한 '유리수 계수를 가지지만 유리근을 갖지 않는 삼차방정식의 근은 유클리드적 도구를 이용하여 작도할 수 없다'는 정리로부터, 임의의 각은 삼등분 될 수 없다는 것이 증명되었다.

임의의 각의 삼등분에 관련된 최근의 연구 방향으로, 종이접기를 이용한 각의 삼등분선 구하기를 들 수 있다. 신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002)는 유클리드적 도구를 이용해 작도가능한 수들의 집합보다 종이접기를 이용해 표현할 수 있는 수들의 집합이 더 크다는 것을 대수적으로 보이면서, 임의의 각의 삼등분선을 접는 한 방법을 소개하였다. 이상근 · 이춘구(2007, 2008).각의 '삼등분 선들의 다양한 위

2008년 12월 투고, 2008년 12월 심사 완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key words: Morley 정리, 삼각형의 넓이

치와 방정식의 탐구'와 '각의 이등분선 삼등분선의 방정식'을 계산하였다. 삼각형의 세 내각의 교점에 대한 연구는 미국 수학자 Frank Morley(1860-1937)에 의해서 1899년에 발표되었으며 국내에서 실행된 연구를 찾아보기는 어렵다.

본 연구는 삼각형의 내각의 삼등분선 중 이웃한 삼등분선의 교점을 연결한 도형의 넓이를 구하는 문헌연구이다. 먼저 삼각형의 내각의 삼등분선의 교점을 연결한 삼각형(몰리삼각형)이 정삼각형임을 사인법칙과 코사인 법칙을 활용한 증명을 상세히 분석하고 삼각형과 그 내부에 생기는 몰리삼각형의 넓이를 계산하고, 그 넓이를 비교할 것이다.

본 연구로 얻어진 결과는 중등학교 수학에 관련된 교과내용지식의 영역을 넓힐 수 있으며, 삼각형의 내각의 삼등분과 관련된 문제를 삼각함수를 이용한 문제해결과 작도와 관련된 흥미로운 심화학습 자료가 될 것으로 기대된다.

2. Morley 정리의 한 증명 방법 분석

(1) Morley 정리

삼각형ABC에서 세 내각의 삼등분선을 생각하고 그 결과를 추측하여 증명한 것은 1899에 미국 하버드대학의 수학자 Frank Morley이다. Morley's miracle이라고 불리기도 하는 정리에 대한 증명은 여러 가지이지만 그 중에서 증명[1] 하나를 소개하고 분석해 보자.

[Morley의 정리] $\triangle ABC$의 세 각의 삼등분선이 서로 이웃한 것끼리 만나는 점을 각각 X, Y, Z 라 하면 $\triangle XYZ$는 정삼각형이다.

본 연구에서 소개하려고하는 정리에 대한 증명의 주요한 생각은 다음 2가지이다.

1. 삼각형AZB, BXC, CYA에서 변AB, BC, AC와 이웃한 각을 알고 있다. 사인법칙으로 선분AZ, BZ, BX, CX, CY 와 AY을 얻을 수 있다.
2. 코사인 법칙을 적용하여 삼각형AYZ, BXZ 와 CXY에서 선분 XZ, XY 와 YZ를 비교하여 결정할 수 있다.

삼각형의 내각을 삼등분하는 것을 고려하여 그림 1과 같은 삼각형 ABC에서 세 각의 크기를 각각 3α, 3β, 3γ이라 하고, 삼각형ABC의 외접원의 반지름을 R이라 하자.

1) A. Letac, *Solution (Morley's triangle)*, Problem No. 490, Sphinx, 9(1939) 46. (http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml ; D. O. Shklyarsky, N. N. Chentsov, Y .M. Yaglom, *Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*, v. 2, problem 97, Moscow, 1952.).

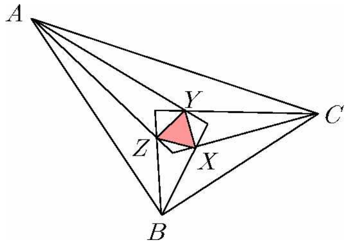

그림1

삼각형의 내각 합이 180° 이므로 $\alpha+\beta+\gamma=60°$ 을 얻을 수 있다. 그리고 삼각형ABC에서 변의 길이와 각, 외접원의 반지름에 관한 사인법칙을 이용하면

$$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin 3\alpha}=\frac{\overline{AC}}{\sin 3\beta}=\frac{\overline{AB}}{\sin 3\gamma}$$

로 표현될 수 있으므로 $\overline{AB}=2R\sin 3\gamma$, $\overline{AC}=2R\sin 3\beta$, $\overline{BC}=2R\sin 3\alpha$이 된다.

그림1과 같이 삼각형ABC의 세 내각의 삼등분선 중 이웃하는 삼등분선이 만나는 점을 각각 X, Y, Z라 할 때, 이 세 점이 만드는 삼각형XYZ의 특성을 알아보기 위해 각 변XY, YZ, XZ의 길이를 사인 법칙과 코사인 법칙을 이용해서 계산해 보자.

먼저 외접원의 반지름과 변을 이용하여 변BX와 변BZ의 길이를 계산해보자. 삼각형ABC에서 $\overline{BC}$와 삼각형BCX에서 $\sin(\angle BXC)$를 계산하면 $\overline{BC}=2R\sin 3\alpha$이고, $\sin(\angle BXC)=\sin(\pi-\beta-\gamma)=\sin(\pi-(60°-\alpha))=\sin(60°-\alpha)$이므로

$$\overline{BX}=\frac{\overline{BC}\sin(\angle BCX)}{\sin(\angle BXC)}=\frac{\overline{BC}\sin\gamma}{\sin(\angle BXC)}=\frac{2R\sin 3\alpha\sin\gamma}{\sin(60°-\alpha)}$$

와 같이 나타난다. 여기서 $\sin 3\alpha$를 삼각함수의 3배각의 공식과 식의 변형을 이용하여 $\sin\alpha$를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sin(3\alpha) &= 3\sin(\alpha)-4\sin^3(\alpha)\\
&= 4\sin(\alpha)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sin^2(\alpha)\right]\\
&= 4\sin\alpha[\sin^2(60^o)-\sin^2(\alpha)]\\
&= 4\sin\alpha[\sin(60^o)+\sin\alpha][\sin(60^o)-\sin\alpha]\\
&= 4\sin\alpha\left\{2\sin\left[\frac{(60^o+\alpha)}{2}\right]\cos\left[\frac{(60^o-\alpha)}{2}\right]\right\}\left\{2\cos\left[\frac{(60^o+\alpha)}{2}\right]\sin\left[\frac{(60^o-\alpha)}{2}\right]\right\}\\
&= 4\sin\alpha\left\{2\sin\left[\frac{(60^o+\alpha)}{2}\right]\cos\left[\frac{(60^o+\alpha)}{2}\right]\right\}\left\{2\sin\left[\frac{(60^o-\alpha)}{2}\right]\cos\left[\frac{(60^o-\alpha)}{2}\right]\right\}\\
&= 4\sin\alpha\sin(60^o+\alpha)\sin(60^o-\alpha)
\end{aligned}$$

이 결과를 이용하여 $\overline{BX}$를 다시 표현하면

$$\overline{BX}=\frac{2R\sin 3\alpha\sin\gamma}{\sin(60^\circ-\alpha)}=8R\sin\alpha\sin\gamma\sin(60^o+\alpha)$$

이다. 비슷한 방법으로 $\overline{BZ}=8R\sin\gamma\sin\alpha\sin(60^o+\gamma)$로 나타내어진다.

다음은 몰리삼각형의 한 변의 길이를 계산하기 위하여 삼각형BXZ에서 코사인 제2법칙을 적용해 보자. $\angle ZBX$의 크기는 β이므로

$$\overline{XZ}^2=\overline{BX}^2+\overline{BZ}^2-2\,\overline{BX}\,\overline{BZ}\cos\beta$$

을 적용하여 $\overline{XZ}$를 얻을 수 있다. 여기에 $\overline{BX}$, $\overline{BZ}$ 대신에 각각

$$8R\sin\alpha\sin\gamma\sin(60^o+\alpha),\ 8R\sin\gamma\sin\alpha\sin(60^o+\gamma)$$

을 대입하고 외접원의 반지름과 변을 이용하여

$$\begin{aligned}\overline{XZ}^2=64R^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma[&\sin^2(60^o+\alpha)+\sin^2(60^o+\gamma)\\&-2\sin(60^o+\alpha)\sin(60^o+\gamma)\cos\beta]\end{aligned}$$

이 된다. 여기서 $(60^o+\alpha)+(60^o+\gamma)+\beta=180^o$이 됨에 착안하여 $\overline{XZ}^2$식의 변형을 생각해보자. 외접원의 반지름이 1이고 내각이 각각 $(60^o+\alpha)$, $(60^o+\gamma)$, β인 삼각형PQR에 사인법칙을 적용하여 변의 길이를 나타내면

$$\overline{PQ}=2\sin\beta,\ \overline{PR}=2\sin(60^\circ+\beta),\ \overline{QR}=2\sin(60^\circ+\gamma)$$

와 같이 된다. 코사인 제2법칙에 의해서

$$\sin^2\beta=\sin^2(60^o+\alpha)+\sin^2(60^o+\gamma)-2\sin(60^o+\alpha)\sin(60^o+\gamma)\cos\beta$$

와 같이 표현할 수 있다. 이것을 $\overline{XZ^2}$에 대입하면

$$\overline{XZ}^2=64R^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma\sin^2\beta,\quad \overline{XZ}=8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

이 된다. 이것은 α, β, γ에 대한 대칭식이므로 $\overline{YZ}$, $\overline{XY}$도 같은 식으로 표현될 수 있고 $\overline{XY}=\overline{YZ}=\overline{XZ}$ 임을 알 수 있다. 따라서 삼각형XYZ은 정삼각형이다.

(2) 몰리 삼각형의 넓이 탐구

몰리의 정리를 증명하는 여러 방법들 중에서 중등학교 학생들이 읽고 이해할 수 있는 방법으로 증명 된 것을 자세히 분석하고 설명하였다. 이 증명과정에서 얻은 몰리삼각형의 변의 길이 $\overline{XY}=\overline{YZ}=\overline{XZ}=8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$를 활용하면 몰리삼각형의 넓이를 계산할 수 있다. 그 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\overline{XY})(\overline{YZ})\sin 60^\circ&=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{XY}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2\\&=16\sqrt{3}R^2(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2\end{aligned}$$

이다.

주어진 삼각형ABC의 넓이와 몰리삼각형XYZ의 면적을 비교해 보자. 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}(\overline{AB})(\overline{AC})\sin 3\alpha$와 같이 표현되므로 몰리삼각형과 비교할 수 있

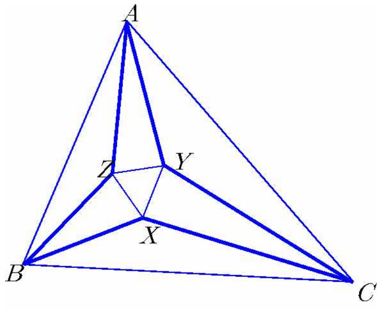

그림2

도록 변의 길이를 각을 이용하여 나타내 보면

$$\overline{AB}=2R\sin3\gamma,\ \overline{BC}=2R\sin3\alpha,\ \overline{AC}=2R\sin3\beta$$

이므로 삼각형 ABC와 삼각형 XYZ의 넓이는 각각

$$S(\triangle ABC)=2R^2\sin3\alpha\sin3\beta\sin3\gamma$$

$$S(\triangle XYZ)=16\sqrt{3}R^2(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2$$

이다.

$$\sin3\alpha=4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$$

$$\sin3\beta=4\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)$$

$$\sin3\gamma=4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right)$$

를 이용하면

$$\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle XYZ)}=\frac{2R^2(\sin3\alpha)(\sin3\beta)(\sin3\gamma)}{16\sqrt{3}R^2(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2}$$

$$=\frac{4^3\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right)}{8\sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\cdots ①$$

이다.

3. 결론

본 연구는 주어진 삼각형의 세 각의 삼등분선 중 이웃한 삼등분선의 교점을 연

결한 도형(몰리삼각형)의 넓이를 구하는 문헌연구이다.

몰리삼각형이 정삼각형임을 증명하는 한 방법을 분석하고, 몰리정리에 대한 증명들 중에서 변의 길이를 사인법칙과 코사인 법칙, 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 증명한 것을 이해하기 쉽게 설명하였다.

몰리삼각형의 변의 길이와 주어진 삼각형의 세 각의 삼등분 각과 외접원의 반지름 이용하여 몰리삼각형의 넓이가 $16\sqrt{3}R^2(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2$임을 표현하였다. 그리고 주어진 삼각형과 그의 몰리삼각형 넓이의 비는 일정하지 않다는 것을 보였다.

참고문헌

[1] 교육인적자원부(2006). 고급수학, 서울;(주)지학사.

[2] 교육인적자원부(1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

[3] 신현용 · 한인기 · 서봉건 · 최선희(2002). 종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용, 수학교육논문집 13(2), pp. 457-475.

[4] 이상근 · 이춘구(2008). 각의 삼등분선들의 다양한 위치와 방정식의 탐구, 수학교육논문집 22(1), pp. 79-89.

[5] 이상근 · 이춘구(2007). 각의 이등분선 및 삼등분선의 방정식 탐구, 수학교육논문집 21(3), pp. 515-525.

[6] http://mathworld.wolfram.com/MorleysTheorem.html

[7] http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley

Lee, Sang Keun
Dept. of Math. Edu. and Education Research Institute,
Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail : sklee@gnu.ac.kr

Lee, Chun Goo
Gyeongnam Science high school, 668-851, Korea
E-mail : chunn92@hanmail.net