East Asian Math. J. 24 (2008), No. 5, pp. 497-507

어떤 수열의 합에 대한 두 가지 접근 방법

윤석주 · 한인기

ABSTRACT. Two proving methods are investigated. One method uses the mathematical induction and the other uses the progression of difference.Two methods are analysed and compared. As a result, we get a generalization of these series.

1. 서론

수열과 수열의 항들의 합을 지칭하는 급수는 중등학교 수학교과서 뿐만 아니라, 수학의 발전에서도 중요한 역할을 하였다. 그리고 고중숙([1], p.313)은 '수열과 급수는 수학적으로 흥미있을 뿐 아니라 응용성도 풍부하여 일상적인 경제생활에서도 널리 이용된다'고 하였다. 즉 수열과 급수는 실세계에서 수학의 응용, 모델링과 관련하여 중요한 도구로 활용될 수 있다.

우리나라 수학교과서에서는 고등학교 수학 I에서 수열과 급수를 다루는데, 합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$는 고등학교 수준에서 수열의 합과 관련하여 다룰 수 있는 급수들이다. 우정호 외 5인([3])의 수학교과서에서는 합 $\sum_{i=1}^{n} i$를 등차수열의 합의 공식, 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$을 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$을 이용하여 구하였으며, 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$는 수학적 귀납법과 관련하여 문제로 제시하였다. 한편 박두일 외 8인([2])의 수학교과서에서는 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$은 연습문제로 제시하였지만, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$은 다루지 않았다.

2008년 12월 투고, 2008년 12월 심사 완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key words: 수열, 수학적 귀납법, 계차수열, 급수.

기술한 것들 이외의 다른 수학교과서들을 분석해 보면, 합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$의 취급이 일정하지 않으며, 이들 사이의 관련성 및 일반화 가능성에 대해 기술되어 있지 않음을 알 수 있다. 그러나 추상화된 대상을 연구하는 수학교과의 특성을 감안하면, 이들 대상의 관련성을 바탕으로 일반화를 시도하는 것은 수학탐구의 중요한 방향이 될 것이다.

본 연구에서는 합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$을 수학적 귀납법과 수열의 차를 바탕으로 방법유추를 통해 증명하고, 증명방법을 확장하여 일반화된 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$을 증명할 것이다. 이를 통해 이 합들 사이의 관련성을 밝히고, 수학적 귀납법을 활용한 증명방법과 계차수열을 이용한 증명방법의 차이점을 밝힐 것이다.

2. 수학적 귀납법을 이용한 접근

수학적 귀납법은 수학탐구의 중요한 도구들 중의 하나로, Kolmogorov([4], p.11)는 '수학적 귀납법에는 '만약 ...', '그러면 ...'이라는 표현이 많이 있기 때문에, 많은 학생들은 수학적 귀납법의 실제적인 내용을 잘 알지 못한다. 수학적 귀납법의 원리를 정확히 이해하고, 사용하는 것은 수학에 필요한 논리적인 성숙도를 판가름하는 좋은 기준이 될 수 있다'고 주장하면서, 논리적 사고력의 계발, 신장에서 수학적 귀납법의 중요성을 강조하였다.

합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$을 수학적 귀납법으로 증명하고, 증명방법을 확장하여 일반화된 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$을 증명하자.

(1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$의 증명

증명. (1) $n=1$인 경우를 조사하자. 등식의 우변에 $n=1$을 대입하면, $\frac{1\cdot 2}{2}=1$이므로, 등식이 성립한다.

(2) $n=k$인 경우에 등식 $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$이 성립한다고 가정하자.

(3) $n=k+1$인 경우를 조사하자. 등식 $\sum_{i=1}^{k} i=\frac{k(k+1)}{2}$의 양변에 $k+1$을 더하면,

$$(1+2+\cdots+k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1),\ \sum_{i=1}^{k+1} i=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

이 얻어진다. 이제 등식의 우변을 정리하면, $\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$가 된다. 이로부터 $n=k+1$에 대해 증명하려는 등식이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad \square$$

증명과정을 분석하면, 수학적 귀납법의 첫 번째 단계인 $n=1$에서는 등식의 우변에 1을 대입하여, 좌변과 같음을 보였다. 그리고 $n=k+1$에서는 등식 $\sum_{i=1}^{k} i=\frac{k(k+1)}{2}$의 양변에 같은 식을 더한 다음, 인수분해를 통해 식을 정리하였다.

수학적 귀납법의 사용과 관련하여 한 가지 주목할 것은 수학적 귀납법의 활용에서는 합 $\sum_{i=1}^{n} i$이 $\frac{n(n+1)}{2}$이 된다는 것을 직접 구한 것이 아니라, 등식 $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$의 타당성을 보였다는 것이다. 즉 등식 $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$이 주어지지 않는다면, 먼저 등식 $\sum_{i=1}^{k} i=\frac{k(k+1)}{2}$을 추측하고, 추측된 등식에 대해 그 타당성을 수학적 귀납법을 사용하여 증명해야 한다.

(2) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$의 증명

$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$의 증명과 유사한 방법으로, 즉 방법유추를 바탕으로 증명과정을 기술하자. 앞에서 분석했던 것처럼, 첫 번째 단계인 $n=1$에서는 등식의 우변에 1을 대입하여, 좌변과 같음을 보이고, $n=k+1$에서는 등식 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$의 양변에 같은 식을 더한 다음, 인수분해를 통해 식을 정리하자.

증명. (1) $n=1$인 경우를 조사하자. 등식의 우변에 $n=1$을 대입하면, $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}=1\cdot 2$이므로, 등식이 성립한다.

(2) $n=k$인 경우에 등식 $\sum_{i=1}^{k} i(i+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$가 성립한다고 가정하자.

(3) $n=k+1$인 경우를 조사하자. 등식 $\sum_{i=1}^{k} i(i+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$의 양변에 $(k+1)(k+2)$를 더하면,

$$[1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+k(k+1)]+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2),$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

가 얻어진다. 이제 등식의 우변을 정리하면,

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

이 된다. 이로부터 $n=k+1$에 대해 증명하려는 등식이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \quad \square$$

증명한 두 등식 $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$을 비교하면, 공통점을 찾을 수 있다. 즉 분수식 $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$의 분자에는 연속하는 수들이 두 개, 세 개가 있으며, 이들 연속하는 수의 개수는 분모에 놓인 수와 일치한다. 이를 바탕으로 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$에 대한 다음 등식을 추측하고, 등식 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$와 유사한 방법으로 증명할 수 있다.

(3) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$의 증명

증명. (1) $n=1$인 경우를 조사하자. 등식의 우변에 $n=1$을 대입하면, $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4}=1\cdot 2\cdot 3$이므로, 등식이 성립한다.

(2) $n=k$인 경우에 등식 $\sum_{i=1}^{k} i(i+1)(i+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$가 성립한다고 가정하자.

(3) $n=k+1$인 경우를 조사하자. 등식 $\sum_{i=1}^{k} i(i+1)(i+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$의 양변에 $(k+1)(k+2)(k+3)$를 더하면,

$$[1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+k(k+1)(k+2)]+(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3),$$

즉,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)$$

가 얻어진다. 이제 등식의 우변을 정리하면,

$$\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

가 된다. 이로부터 $n=k+1$ 에 대해 증명하려는 등식이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \quad \square$$

이제 식 $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$의 공통점을 바탕으로, 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$의 계산 결과를 추측할 수 있다. 즉 $i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$에서 인수들이 j개이므로, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$은 분자에 $(j+2)$개의 연속하는 자연수가 포함되며 분모는 $(j+2)$가 될 것이다. 즉 등식

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+j+1)}{j+2}$$

을 추측할 수 있다. 이를 증명하자.

(4) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+j+1)}{j+2}$의 증명

증명. (1) $n=1$인 경우를 조사하자. 등식의 우변에 $n=1$을 대입하면, $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(1+j+1)}{j+2}=1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(1+j)$이므로, 등식이 성립한다.

(2) $n=k$인 경우에 등식

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+j+1)}{j+2}$$

가 성립한다고 가정하자.

(3) $n=k+1$인 경우를 조사하자. 등식

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+j+1)}{j+2}$$

의 양변에 $(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+1+j)$를 더하면,

$$[1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot (j+1)+\cdots+i(i+1)(i+2)\cdots(k+j)] \\ +(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+1+j) \\ =\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+j+1)}{j+2}+(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+1+j),$$

즉,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j) \\ =\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+j+1)}{j+2}+(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+1+j)$$

가 얻어진다.

이제 등식의 우변을 정리하면,

$$\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+j+1)}{j+2}+(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+1+j) \\ =\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+j+2)}{j+2}$$

가 된다. 이로부터 $n=k+1$에 대해 증명하려는 등식이 성립한다.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+j+2)}{j+2} \qquad \square$$

합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하기 위해, 본 연구에서는 이들 합에 관련된 등식을 추측하였다. 그런 다음, $n=1$에 대해 등식의 우변에 1을 대입하여 등식을 증명하고, $n=k+1$에서는 등식의 양변에 같은 식을 더한 다음, 인수분해를 통해 식을 정리하였다.

3. 수열의 차를 이용한 접근

어떤 수열에서 항들의 차 또는 합들의 차를 이용하는 방법이 수학에 폭넓게 활용되고 있다. 예를 들어 수열 $\{a_n\}$에 대해 $b_n=a_{n+1}-a_n$으로 정의된 수열 $\{b_n\}$을 계차수열이라 부르며, 등비수열의 합의 공식을 유도할 때도 수열의 합의 차를 이용한다.

본 연구에서는 합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$에서 수열의 일반항 i, $i(i+1)$, $i(i+1)(i+2)$, $i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$이 어떤 수열의 계차수열임을 이용하여, 합의 공식을 유도할 것이다.

(1) 합 $\sum_{i=1}^{n} i$을 구하기

풀이. 수열의 합 $\sum_{i=1}^{n} i$에서 일반항 i를 계차수열로 얻기 위해, $a_n = n(n+1)$을 생각하자. 그러면 $a_{n-1} = n(n-1)$이 된다. 이제 $a_n - a_{n-1}$을 계산하면,

$$a_n - a_{n-1} = n(n+1) - n(n-1) = n(n+1-n+1) = 2n$$

이 얻어진다. 이로부터 $n = \frac{a_n - a_{n-1}}{2}$이 됨을 알 수 있다. 즉 $2 = \frac{a_2 - a_1}{2}$, $3 = \frac{a_3 - a_2}{2}$, $\cdots$ 등이 성립한다. 이제 수열의 합을 계산하자.

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = 1 + \frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{a_3 - a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{2}$$

결국 $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{a_n - a_1}{2} = 1 + \frac{n(n+1) - 1 \cdot 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$가 얻어진다. □

살펴본 접근 방법과 수학적 귀납법에 의한 증명 방법의 가장 큰 차이는 수학적 귀납법에서는 등식 $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$이 주어진 후에 증명이 시작될 수 있지만, 계차수열을 이용한 증명에서는 풀이과정에서 합 $\frac{n(n+1)}{2}$가 유도된다는 사실이다.

(2) 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$을 구하기

풀이. 수열의 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$에서 일반항 $i(i+1)$을 계차수열로 얻기 위해, $a_n = n(n+1)(n+2)$을 생각하자. 그러면 $a_{n-1} = n(n-1)(n+1)$이 된다. 이제 $a_n - a_{n-1}$을 계산하면,

$$a_n - a_{n-1} = n(n+1)(n+2) - n(n-1)(n+1) = n(n+1)(n+2-n+1) = 3n(n+1)$$

이 얻어진다. 이로부터 $n(n+1) = \frac{a_n - a_{n-1}}{3}$이 됨을 알 수 있다. 즉 $2 \cdot 3 = \frac{a_2 - a_1}{3}$, $3 \cdot 4 = \frac{a_3 - a_2}{3}$, $\cdots$ 등이 성립한다. 이제 수열의 합을 계산하자.

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)$$

$$= 1 \cdot 2 + \frac{a_2 - a_1}{3} + \frac{a_3 - a_2}{3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{3}$$

결국

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1\cdot 2 + \frac{a_n - a_1}{3} = 1\cdot 2 + \frac{n(n+1)(n+2) - 1\cdot 2\cdot 3}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

가 얻어진다. □

살펴본 증명과정을 분석하자. 첫째, $i(i+1)$을 계차수열로 얻기 위해 수열 $a_n = n(n+1)(n+2)$을 생각하며, 둘째 $a_n - a_{n-1}$을 이용하여 $n(n+1)$을 표현하여 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$에 대입하여 정리하였다. 이러한 접근 방법을 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$을 구하기 위해 유추하여 사용할 수 있다.

(3) 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$를 구하기

합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$을 구하는 방법을 방법유추하여 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$을 구하자. 즉 $i(i+1)(i+2)$를 계차수열로 얻기 위해 수열 $\{a_n\}$을 생각하며, 둘째 $a_n - a_{n-1}$을 이용하여 $n(n+1)(n+2)$를 표현하여 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$에 대입하여 정리하자.

풀이. $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$라 놓으면, $a_{n-1} = n(n-1)(n+1)(n+2)$가 된다. 이제 $a_n - a_{n-1}$을 계산하면,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= n(n+1)(n+2)(n+3) - n(n-1)(n+1)(n+2) \\ &= n(n+1)(n+2)(n+3-n+1) = 4n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

가 얻어진다. 이로부터 $n(n+1)(n+2) = \frac{a_n - a_{n-1}}{4}$이 됨을 알 수 있다. 즉 $2\cdot 3\cdot 4 = \frac{a_2 - a_1}{4}$, $3\cdot 4\cdot 5 = \frac{a_3 - a_2}{4}$, … 등이 성립한다. 이제 수열의 합을 계산하자.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) &= 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) \\ &= 1\cdot 2\cdot 3 + \frac{a_2 - a_1}{4} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{4} \end{aligned}$$

결국

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) &= 1\cdot 2\cdot 3 + \frac{a_n - a_1}{4} \\ &= 1\cdot 2\cdot 3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) - 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \end{aligned}$$

가 얻어진다. □

합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$을 일반화시킨 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$을 방법유추를 바탕으로 구하자.

(4) 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$를 구하기

증명. $a_n = n(n+1)(n+2)\cdots(n+j+1)$라 놓으면,

$$a_{n-1} = n(n-1)(n+1)(n+2)\cdots(n+j)$$

가 된다. 이제 $a_n - a_{n-1}$을 계산하면,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= n(n+1)(n+2)\cdots(n+j+1) - n(n-1)(n+1)(n+2)\cdots(n+j) \\ &= n(n+1)(n+2)\cdots(n+j)(n+j+1-n+1) = (j+2)n(n+1)(n+2)\cdots(n+j) \end{aligned}$$

가 얻어진다. 이로부터 $n(n+1)(n+2)\cdots(n+j) = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{j+2}$이 됨을 알 수 있다. 즉 $2\cdot 3\cdot 4\cdots(j+1) = \dfrac{a_2 - a_1}{j+2}$, $3\cdot 4\cdot 5\cdots(j+2) = \dfrac{a_3 - a_2}{j+2}$, $\cdots$ 등이 성립한다. 이제 수열의 합을 계산하자.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j) \\ &\quad = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(j+1) + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \cdots \cdot(j+2) + \cdots + n(n+1)(n+2)\cdots(j+n) \\ &\quad = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(j+1) + \frac{a_2 - a_1}{j+2} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{j+2} \end{aligned}$$

결국

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(j+1) + \frac{a_n - a_1}{j+2} \\ &\quad = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(j+1) + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+j+1) - 1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot(j+2)}{j+2} \\ &\quad = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+j+1)}{j+2} \end{aligned}$$

가 얻어진다. □

합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$을 계차수열을 이용하여 구하기 위해, $a_n = n(n+1)$, $a_n = n(n+1)(n+2)$, $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$, $a_n = n(n+1)(n+2)\cdots(n+j+1)$을 생각하였다. 그러면 수열 $\{n\}$, $\{n(n+1)\}$,

$\{n(n+1)(n+2)\}$, $\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+j)\}$가 계차수열로 얻어진다.

계차수열을 이용한 이 방법의 한 장점은 다양한 수열의 합에 대한 등식과 이에 관련된 일반화를 비교적 쉽게 얻을 수 있다는 점이다. 예를 들어 $a_n = 4n^2 + 20n + 21$로 잡으면, $a_n - a_{n-1} = 8n + 16$이 된다. 즉 합 $\sum_{i=1}^{n}(8n+16)$을 앞에서와 같은 방법으로 얻을 수 있으며, 이를 바탕으로 새로운 일반화된 수열의 합을 얻을 수 있다. 이러한 탐구방법은 학생들의 창의적 산출물을 얻는 흥미로운 방법으로 사용될 수 있다.

4. 결론

수열과 급수는 중등학교 수학교과서 뿐만 아니라, 수학의 발전에서도 중요한 역할을 하였고, 실세계에서 수학의 응용, 모델링과 관련하여 중요한 도구로 활용될 수 있다. 본 연구에서는 합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$을 수학적 귀납법, 수열의 차를 바탕으로 방법유추를 통해 증명하고, 증명방법을 확장하여 일반화된 합 $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$을 증명하였다.

수학적 귀납법을 이용하여 합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$에 관련된 등식을 증명하기 위해, 먼저 이들 합에 관련된 등식을 추측하여야 했다. 그런 다음, $n=1$에 대해 등식의 우변에 1을 대입하여 등식을 증명하고, $n=k+1$에서는 등식의 양변에 같은 식을 더한 다음, 인수분해를 통해 식을 정리하였다. 본 연구에서는 등식의 추측과 증명에 관련된 내용을 증명과정의 관련성을 강조하여 기술하였다.

한편 수학적 귀납법에서는 등식 $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$이 주어진 후에 증명이 시작될 수 있지만, 계차수열을 이용한 증명에서는 풀이과정에서 합 $\frac{n(n+1)}{2}$를 유도하였다. 합 $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$, $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)\cdots(i+j)$을 구하기 위해, 수열 $a_n = n(n+1)$, $a_n = n(n+1)(n+2)$, $a_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$, $a_n = n(n+1)(n+2)\cdots(n+j+1)$을 생각하여, $\{n\}$, $\{n(n+1)\}$, $\{n(n+1)(n+2)\}$, $\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+j)\}$를 계차수열로 얻었다. 즉 n, $n(n+1)$, $n(n+1)(n+2)$,

$n(n+1)(n+2)\cdots(n+j)$을 $a_n - a_{n-1}$을 이용하여 표현하여 구하는 합을 계산하였다.

참고문헌

[1] 고중숙, 수학 바로 보기, 여울, 2007.
[2] 박두일 외 8인, 수학 I, (주)교학사, 2007.
[3] 우정호 외 5인, 수학 I, 대한교과서(주), 2003.
[4] Kolmogorov A.N., *O professii matematika*, Izdat. Moskovskogo Universiteta, 1959.

Youn, Suk Joo
Dept. of Physics Education,
Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail: ysj@gnu.ac.kr

Han, Inki
correspondent author, Dept. of Mathematics Education,
Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail: inkiski@gnu.ac.kr