East Asian Math. J. 24 (2008), No. 5, pp. 477-496

수학과 음악의 상호작용적 관계에 대한 소고

마덕운 · 이병수

ABSTRACT. In this paper, we consider the relations between mathematics and music, for examples rational numbers with musical scales, irrational numbers with musical scales, the golden ratio with musical compositions, the Fourier analysis with overtones. Our aim in this paper is to enhance the students' mathematical abilities by using musical materials.

1. 서론

일반적으로 수학과 음악은 서로 무관한 것으로 오해를 받는다. 사람들은 어려서부터 복잡한 식의 계산, 어려운 공식의 암기에 익숙해져 있기 때문에 수학이라는 학문에 대하여 때로 거부반응이나 무관심을 보이는 경우가 많으며 생활 속에 관련된 수학을 발견하지 못할 뿐만 아니라 발견하려는 경향 역시 쉽게 드러내지 않는다. 반면에 음악이라는 것은 항상 우리주위에 있어서 언제, 어디서든지 쉽게 들을 수 있고, 몸으로 느껴지며, 감정적인 희열을 느끼게 해주기 때문에 사람들로 하여금 친근하게 받아들이게 된다.

이렇게 겉으로 보이는 수학과 음악은 다소 연관성이 없어 보인다. 때문에 교육에 있어서도 그 둘의 중요성은 서로 쉽게 부각되지 않으며 오히려 서로를 거부하려는 듯 느껴지기도 한다. 그러나 이러한 외적인 관계성과는 다른, 서로를 이어주는 몇몇의 관계적 양상들이 존재하는데 피아노를 연주하는 아이들이 직소퍼즐[1], 체스, 수학적 추론을 세우는 과정에서 이루어지는 진보된 추론기술을 보여준다는 연구(Motluk, 1997)와 어느 정도의 음악 과정을 수료한 대학생들 중, 수학을 전공한 대학생들이 타과에 비해 무려 11%가 높다는 특정 연구결과(Henle, 1996)가 그것이다(Michael Beer, 1998)

2008년 11월 투고, 2008년 12월 심사 완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97-02
Key words: 수학, 음악

1) jigsaw puzzle : 옛날 영국에서 세계지도를 만들어 톱으로 조각을 내서 퍼즐을 만들었는데, 나무판을 곡선으로 자르기 위해서 '직소(jigsaw)' 라는 실톱이 필요했다. 그 때, 톱 이름에서 유래되어 만들어진 이름의 퍼즐이다.

게다가 수학과 음악을 이어주는 또 다른 관계적 양상을 고대 그리스인들로부터 찾을 수 있는데, 고대 그리스인들은 수의 응용론으로써 음악을 수학의 한 구분으로 삼았다는 것이다. 여기서 연주행위나 음악 감상으로서의 음악을 뜻하는 바는 아니지만, 음악을 강력한 수학적 교과로서 인식하였고 수와의 관계, 비율, 비례관계와 함께 다루어 졌었다는 점에서 주목할 만하다.

현재 시대의 음악이론이 연주법, 작곡등과 같은 '행위'로서의 중요성이 부각되었기 때문에 고대 그리스에서 다루었던 음악이론의 방향과 많이 달라졌다. 이렇게 수학과 음악의 연관성을 다루는 내용이 점차 사라지고 겉으로 드러나는 예술적 행위에 치중한 나머지, 이는 어느덧 서로가 독립적일 것이라는 고정관념이 드러나게 된 원인을 제공했을지 모른다. 더구나, 지금의 교육에 있어서 수학을 전공할 학생이라면 당연히 음악적 교육이 필요하지 않을 것이라 생각하고, 음악을 전공할 학생이라면 굳이 사교육비를 들여서라도 수학성적을 올려야 되겠다는 생각을 하지도 않는다. 오히려 음악입시를 준비하려는 학생에게 수학은 포기해도 되는 과목으로 인식시키는 경우도 심심치 않게 볼 수 있다. 물론 서로가 서로에게 강요되어야 할 필요는 없다. 다만, 수학과 음악을 통해 아름다움을 볼 수 있는 사람이 더 나아가 다른 현상들과의 아름다움을 볼 수 있는 안목을 가질 수 있을 것이라는데 그 누구도 의심하진 않을 것이다. 본 논문은 수학과 음악의 역사를 되짚어 보면서 음악으로서의 수학, 그리고 수학으로서의 음악에 대한 상호 연관성 살펴보고 이를 통한 수학교육의 효율성을 모색하고자 한다.

2. 음악 속에 나타난 수학

여기에서는 수학과 음악을 연결시켜주는 고리로서 비율과 음계, 황금비와 음악, 푸리에 급수와 배음의 분석을 다루게 된다. 근본적인 내용을 다루기 위해서는 강한 수학적 지식이나 넓은 예술적 소양을 필요로 하겠지만 여기에서는 어려운 내용이나 복잡한 예시는 가능한 피할 것이다. 다만, 수학과 음악이 크게 상반된 것이 아니라는 것을 보여줄 것이며 위에서 제시한 고리들로부터 음악을 통한 수학교육이 활발히 이루어질 수 있는 가능성을 제시할 것이다.

가. 유리수를 이용한 음계의 구성

소리에 대한 체계적인 노력은 기원전 550년경, 피타고라스에서부터 시작됐다(이석원, 2003). 그가 숲속의 대장간을 지나가면서 쇠를 칠 때 마다 소리가 다르게 들리는 것을 듣고 소리는 공기의 진동정도에 따라 달라진다는 사실을 발견한 후, 고정된 현을 기준으로 현의 길이의 비를 이용하여 소리를 연구하기 시작했다. 피타고라스는 '비(ratio)'를 형성함에 있어서 최초의 몇 개의 자연수 1, 2, 3을 통해서 나는

소리가 더 조화롭다는 가치부여를 하게 되었고, 그래서 이러한 작은 자연수의 비는 큰 수들의 기초가 된다고 생각하였다(김춘미, 1992).

피타고라스는 처음의 현의 길이를 1로 잡고, 현의 길이의 $\frac{1}{2}$로 줄이면 본래음의 8도[2]가 높은 음을 얻고 처음 현의 길이에서 $\frac{2}{3}$만큼 줄이게 되면 본래음의 5도가 높은 음을 얻는다는 것을 발견하였다. 다시 말해, 길이가 1인 현이 '도'음을 낸다면, 길이가 $\frac{2}{3}$인 현은 처음의 '도'보다 5도가 높은 '솔'음을 내며, 길이가 $\frac{1}{2}$인 현은 처음의 도에서 한 옥타브가 높은 '도'음을 내는 것이다. 피타고라스는 현의 길이의 비가 도 : 솔 : 도′ $=1:\frac{2}{3}:\frac{1}{2}$ 가 되며, 이러한 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$의 역수에 해당하는 1, $\frac{3}{2}$, 2가 각각의 음들에 대한 현의 주파수[3] 비라는 것을 발견하게 된다. 게다가 1, $\frac{3}{2}$, 2는 특정한 형태의 수열로서 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열을 이루고 있다. 수학에서 흔히 사용하는 '조화수열(harmonic sequence)'이란 용어는 숫자들의 역수가 등차수열을 이루는 수열을 뜻하는데, 이는 음을 발견하는 과정에서 현의 길이의 비가 등차수열을 이룰 때 가장 조화로운 소리가 나는 것으로부터 유래된 것이다(김춘미, 1992). 이러한 수학적 용어의 음악적 유래는 두 학문이 배타적이라는 고정관념을 깰 수 있는 좋은 소재가 되며, 또 다른 연결가능성에 대한 호기심을 자극하기에 부족함이 없다. 물론 모든 수학적 용어의 유래는 살피는 것이 쉬운 일은 아니지만 수학을 어려워하는 학생들에게 수학적 흥미를 유발시키는 데는 더 없이 좋은 방법이며 이를 위한 많은 노력이 필요할 것이다.

피타고라스는 위에서 사용한 방법 즉, 고정된 하나의 음으로부터 5도를 올리거나 내리고, 옥타브를 올리거나 내림으로 해서 피타고라스 음계를 만들었는데 이들의 주파수의 비를 나열해보면 다음과 같다(이석원, 2003).

도	레	미	파	솔	라	시
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$

이러한 음들이 1, 2, 3에 의한 정수비로만 형성되었지만, 몇 개의 음을 제외하고는 모두 복잡한 정수비로 표현된다. 한 옥타브 사이에 모두 6개의 온음[4]이 들어있

2) 이를 서양음악체계에서 '옥타브(Octave)'라 한다.

3) 'frequency'로서 주파수 또는 진동수라고 한다. 이는 주기운동을 하는 물체에 대하여 1초 동안 몇 번의 주기운동을 하는가를 뜻하며 단위는 Hz 또는 cps(cycle per second)를 사용한다.

4) 쉽게 말하자면 피아노 건반에서 하나의 검은 건반을 사이에 끼고 있는 즉, 두 음사이의 거리가 2개의 건반만큼 있을 때 두 음사이의 관계를 온음이라 한다.

으며 도-레, 레-미등 각 온음사이의 주파수는 $\frac{9}{8}$만큼의 비율을 유지하고 있다. 그리고 현의 길이를 $\frac{1}{2}$만큼 줄이면 한 옥타브가 높은 음을 낸다는 사실과 두 음의 주파수비는 현의 길이비의 역수관계에 있다는 사실을 종합해보면 한 옥타브사이의 주파수비는 2가 되어야 한다. 즉, 옥타브의 주파수비 2와 6개 온음을 증가시킨 주파수비 $(\frac{9}{8})^6$가 같아야 한다는 것이다. 하지만 실제로 계산을 해보면,

$$(\frac{9}{8})^6 \approx (1.125)^6 \approx 2.027 \neq 2$$

다시 말해, 일치해야 할 두 가지 비가 서로 일치하지 않는다는 것이다. 이를 피타고라스 콤마(Pythagorian comma)라고 하는데 이것이 피타고라스 비율이 가졌던 최대의 문제점이다(이석원, 2003). 이것은 피타고라스 비율로 음을 쌓게 되면 본래 음의 옥타브에 다시 되돌아 올 수 없다는 것을 의미하며, 또한 옥타브를 유한개의 등 간격으로 정확히 나누어질 수 없음을 의미한다(Michael Beer, 1998). 이후 평균율에 관해 다시 언급하겠지만 옥타브를 등간격으로 나누기 위해서는 유리수에 의한 비율이 아니라 무리수에 의한 비율을 필요로 하게 된다. 지금의 피아노는 무리수비에 의해 만들어 졌으며, 이는 일상에서 찾아볼 수 있는 친숙한 예로서 학생들에게 무리수의 필요성을 느끼게 해주는 좋은 소재가 될 수 있다. 무리수를 왜 배워야 하는가에 대한 질문을 받았을 때, 위의 일화는 굳이 정식의 음악과정을 거치지 않은 학생들에게도 어렵지 않게 받아들일 수 있을 것이다.

나. 순정율

하나의 성부[5]로 이루어진 음악에서는 피타고라스 비율이 그다지 문제를 드러내진 않았지만 화음이 있는 음악에 대해서는 그 문제점이 심각하게 드러나기 때문에 이를 해결하기 위한 체계적이고 안정적인 음계를 필요로 하게 된다.

피타고라스 음계 이후, 대부분의 조율법은 3화음을 중시하는 경향을 보이게 되었다. 1도, 4도, 5도, 8도를 완전음정이라 하고 2도, 3도, 6도, 7도를 장음정이라 하는데, 쉽게 말해 순정율은 금방 언급한 8개의 음정 중, 완전5도와 장3도의 음정을 가지고 음계를 쌓는 것이다. 피타고라스 음계가 단순히 완전 5도 음정에만 따라 음을 쌓았다면, 순정율의 경우에는 두 개의 음정을 가지고 음을 쌓는 것이기 때문에 음을 만들어내는 것이 훨씬 쉽다.

5) 'Part', 소리의 높낮이에 따라 차지하는 위치

도	레	미	파	솔	라	시	도*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

위의 그림은 순정율에서 나타나는 각각의 음에 대한 주파수의 비를 나타낸다(이석원, 2003). 순정율은 피타고라스의 방법으로 구할 수 없는데, 그 이유는 1:2:3의 비율만 사용했던 피타고라스의 방법에는 분자가 5 또는 5의 배수로 이루어진 주파수의 음이 얻어질 수 없기 때문이다.

순정율이 3도와 5도의 결합으로 만들어지기 때문에 이를 다음과 같은 수식으로 표현할 수 있다(이석원, 2003).

$$m\times F+n\times T$$

여기서, F는 완전 5도, T는 장 3도를 가리키며, m은 5도의 개수, n은 3도의 개수이다. 예를 들어 다장조 음계[6]에서의 값은 다음과 같다.

도 = 1　　레 = $2F$　　미 = T　　파 = $-F$

솔 = F　　라 = $T-F$　시 = $T+F$

그리고 각 음에 대한 상대적인 주파수의 비는 다음의 식으로부터 구할 수 있다.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m\times\left(\frac{5}{4}\right)^n$$

순정율은 '도:미:솔, 파:라:도, 솔:시:레'의 주요 3화음을 4:5:6 또는 24:30:36으로 만들어 주며 피타고라스 음계에 비해 협화적인 소리를 제공한다(이석원, 2003). 하지만 순정율 역시 화성적으로 완벽하지 못하고 순정율에서 만들어지는 5도 음정들 중 순수하지 않은 음정이 존재하게 되는데, 예를 들어 도-솔, 미-시, 파-도, 솔-레 등과 같은 5도 음정에 대한 주파수의 비율은 모두 2:3의 비율을 유지하지만 레-라의 5도는 27:40이기 때문에 같은 5도이지만 5도가 되지 않는 모순점이 생긴다.

이는 순정율에 대한 가장 결정적인 문제이며 또한 조옮김이 불가능하기 때문에 여러 악기들과 합주가 이루어지지 않는다는 것 역시 순정율이 가진 한계이다.

다. 무리수를 이용한 음계의 구성

일반적으로 평균율이라 하면 가장 먼저 바흐(Johann Sebastian Bach)를 떠올리지만, 평균율의 최초 발견은 바흐가 아니다. 평균율의 원리를 최초로 주장한 사람은 1596년 중국의 차이유(Tsai-yu)왕자라는 것을 프랑스 물리학자 메르센(Marin Mersenne)이 설명한 바가 있다(이석원, 2003). 하지만 평균율에 있어 바흐가 그토록 주목을 받았던 이유는 작곡에 있어서 최초로 평균율을 적용시켰기 때문이다. 당시 바흐는 하프시코드[7] 연주자였는데 순정율에서의 문제점인 조옮김에 대한 해결

6) 으뜸음이 '도'인 음계

책으로서 평균율을 이용한 작곡을 시도했었다. 사실 바흐의 평균율은 1800년까지도 독일에서 보편화 되지못했고 프랑스와 영국에서는 1850년까지도 그랬다. 하지만 지금은, 바흐의 평균율이 서양 각 율법의 음정뿐만 아니라 모든 문화권의 음악 속에서 음정 간격을 재는 표준적인 척도로 사용되고 있다.

평균율의 가장 기본은 옥타브를 12개의 동일한 간격으로 나누는 것에서 시작한다. 한 옥타브사이의 주파수의 비는 2이므로 이를 12간격으로 나누었을 때 하나의 간격에 대한 주파수비 f를 다음과 같이 구할 수 있다(Jeffrey O. Bennett·William L. Briggs, 2002).

$$f^{12} = 2, \quad f = \sqrt[12]{2} \approx 1.05946$$

여기서 주목할 만 한 점은, 평균율이 피타고라스 음계나 순정율에서 강조되었던 유리수비가 아닌 무리수비에 의해 음계를 구성되었다는 것이다. 피타고라스가 자연수야말로 만물을 이루는 기본이 된다고 믿었기 때문에, 음을 형성하는 데에도 마찬가지로 자연수비에 따른 음을 고집했었다. 당시 무리수는 피타고라스 학파에서도 엄격히 금하고 있었기 때문에 그 누구도 무리수비에 따른 음계의 구성을 생각할 수 없었고 피타고라스 콤마와 같은 문제도 해결하는데 어려움이 많았다.

이제 평균율의 원리에 대하여 알아보자. 먼저 피아노 건반을 떠올려 보는 것이 생각하는데 가장 편할 것이다. 피아노 건반의 한 옥타브는 7개의 흰 건반과 5개의 검은 건반으로 이루어져 있는데, 각각의 잇따른 음들을 구분시켜주는 간격을 '반음(semi-tone)'이라 한다. 이러한 반음이 하나씩 증가할 때, 잇따른 음에 대한 진동수의 비는 이전음의 f배가 되는 것이다. 예를 들어, '도'음의 주파수가 260Hz라고 하자. '레'음에 대한 주파수를 구하기 위해서 '도'와 '레'사이에 반음이 얼마나 차이가 나는지 먼저 알아보면, '도'에서 반음을 두 번 올려야 '레'음을 얻을 수 있으므로 레의 주파수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$260 \times 1.05946^2 = 292.838 \ (Hz)$$

이제, 주파수가 Q_0인 음에서 거리가 n반음만큼의 거리에 있는 음에 대한 주파수 P는 다음의 식을 사용하여 계산할 수 있다.(Jeffrey O. Bennett·William L. Briggs, 2002)

$$P = Q_0 \times 1.05946^n$$

다음 표는 위에서 제시한 식을 이용하여 평균율에 의한 12음계의 모든 음에 대해 주파수비를 나타낸 것이다.

7) harpsichord, 16-18세기에 쓰인 건반 악기이며 피아노의 전신이다. 현재 피아노의 형태를 갖추게 된 것은 크리스토포리(Bartolommeo Christofori 1665-1731)가 완성한 것이다.

표-1 가온도에서 한 옥타브까지 음들의 주파수

음이름	주파수(Hz)	이전 음에 대한 주파수의 비	가온도에 대한 주파수의 비
도	260	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	$1.00000 = 1$
도#	275	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	1.05945
레 (second)	292	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	1.12246
레#	309	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	1.18921
미 (third)	328	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	$1.25992 \approx \frac{5}{4}$
파 (fourth)	347	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	$1.33484 \approx \frac{4}{3}$
파#	368	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	1.41421
솔 (fifth)	390	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	$1.49831 \approx \frac{3}{2}$
솔#	413	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	1.58740
라 (sixth)	437	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	$1.68179 \approx \frac{5}{3}$
라#	463	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	1.78180
시 (seventh)	491	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	1.88775
도 (octave)	520	$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946$	$2.00000 = 2$

표-1을 보면 피타고라스 음계의, 주파수비가 각각 $\frac{4}{3}$과 $\frac{3}{2}$에 해당했던 '파'와 '솔'에 대해서 정확하게 일치하진 않지만 평균율에서도 비슷한 비율을 보이고 있다. 물론 약간의 차이로 인하여 피타고라스가 추구했던 순수한 음정에서 약간 벗어나기 때문에 옥타브를 제외한 어떤 음도 순수한 음이 아니라는 지적을 받았지만, 이는 들어서 거의 느낄 수 없을 정도다. 게다가 한 옥타브를 12개의 동일한 간격으로 나누었기 때문에 조옮김을 하는데 아무런 문제를 일으키지 않는다. 지금까지 평균율에 대한 여러 가지 지적사항들이 있었지만, 평균율이 가진 단점보다 이를 능가하는 장점들이 많이 있어 지금까지 널리 사용되고 있다.

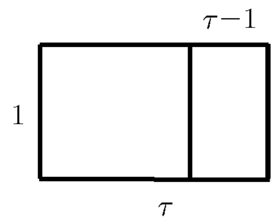
라. 음악과 황금비율

(1) 황금 비율과 그 활용

황금비율의 기하학적 정의는 다음과 같다(Roger Fenn, 2001).

정의1) 황금비율(Golden ratio)

직사각형에서 작은 변의 길이로 이루어진 정사각형을 처음의 직사각형으로부터 잘라 내었을 때, 남아있는 직사각형의 비율이 처음의 직사각형의 비율과 같아지게 되면 처음의 두 변은 황금비율이라 하는 비례관계를 따른다.



황금비를 계산해보자. 정의로부터 직사각형의 긴 변을 τ라 하고 작은 변의 길이를 1이라 하자. 그러면 위의 정의로부터

$$\frac{\tau-1}{1}=\frac{1}{\tau}$$

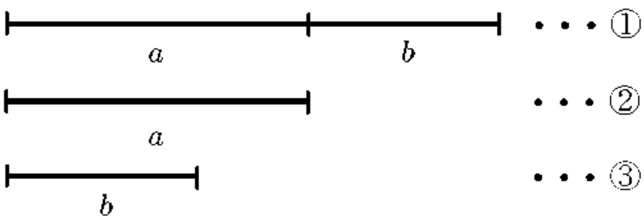
따라서 τ는 다음의 2차 방정식을 만족하게 된다.

$$\tau^2-\tau-1=0$$

이를 만족하는 양의 근은 $\tau=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618033988\cdots$이며, 이것이 위의 정의를 만족하는 황금비율에 해당한다.

황금비율에 대하여 조금 더 쉽게 설명하자면 다음의 명제와 같다.

"어떤 선분을 두 선분으로 나누었을 때, 선 전체와 큰 선분의 비는 큰 선분과 작은 선분의 비와 같다."



즉, (전체길이) : (긴 길이) = (긴 길이) : (짧은 길이)의 관계를 만족하는 분할을

황금분할(golden section)이라 하며, (긴 길이) : (짧은 길이)를 황금비(golden ratio)라 하는 것이다(오시봉·양명오, 1999). 여기서 살펴볼만한 점은 선분 $a+b$와 a의 관계에서 다시 a와 b의 관계가 새로이 만들어진다는 것인데, 이는 ① : ② = ② : ③의 관계로서 주어진 선분으로부터 일정한 비율로 나누게 되면 그 비율에 따른 자기 자신의 복제가능성을 암시하고 있다.

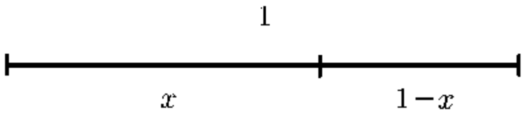
제시된 명제를 수식으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}}$$

여기서 $\frac{a}{b}$를 τ로 치환하면 다음의 아주 중요한 식을 얻는데 이것이 황금비의 정의로부터 구했던 $\tau = 1.618033988\cdots$이며, 따라서 $a : b = 1.618 : 1$을 만족하고 전체의 길이를 1로서 계산을 하면 $a : b = 0.618 : 0.382$가 된다.

$$\tau = \frac{\tau+1}{\tau} = 1 + \frac{1}{\tau} \quad \cdots(*)$$

정의2) positive황금분할(positive ratio), negative 황금분할(negative ratio)



$$x : 1-x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} : 1$$

전체의 길이를 1로 두었을 때, 주어진 비례식을 만족하는 x를 positive 황금분할, $1-x$를 negative 황금분할이라 한다.

식$(*)$으로부터 다음의 식이 유도된다.

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

$\sqrt{5}$를 사용하지 않은, 단지 1로 표현된 연분수의 형태인 이 수식은 실제로 τ와 τ의 속성에 대한 어떤 근본적인 것을 보여준다. 굉장히 간단한 형태를 취하면서 수가 자신 안에서 복제에 복제를 거듭하는 것이다. 연분수에 대한 각각의 값을 구해보면

$1=\frac{1}{1},\ 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1},\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\frac{3}{2},\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\frac{5}{3}\cdots$ 와 같으며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{f_n}{f_{n-1}},\quad f_n = f_{n-1}+f_{n-2} \text{ and } f_1 = f_2 = 1$$

여기서 수열 (f_n)을 **피보나치 수(Fibonacci numbers)**라 하며, n이 무한히 커질수록 $\frac{f_n}{f_{n-1}}$은 황금비율 τ에 수렴한다(Roger Fenn, 2001).

$$(f_n) = (1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34\cdots),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}} = \tau$$

이러한 황금비율 τ는 고대 그리스인들에게 있어 너무도 아름답게 여겨져 파르테논 신전 건축의 기본으로 삼기도 했다. 게다가 1962년 우리나라 국보 18호로 지정된, 고려 중엽에 세워진 부석사 무량수전에도 황금비가 쓰여 졌는데, 기둥사이의 일정한 간격을 기준으로 정면은 5칸, 측면은 3칸으로 지어져 있다. 이는 균형이 잘 잡힌 3:5의 비율이며 실제 건물의 비율은 1:1.618의 황금비이다(오시봉·양영오, 1999).

τ는 보면 볼수록 연속적인 내적 순환을 느끼게 해주며, 또한 비율이 자신 안에서 끝없이 재생산된다는 것에 매력적인 평온함과 안정감을 느끼게 된다. 부분에서 전체가 재현된다는 개념은 프랙탈(fractal)에 관한 만델브로[8]의 최신 수학 작업이 지니는 위대한 미학적 매력이다(Rothstein, 1995).

(2) 음악 속의 황금비율

많은 건축가와 미술가들에 의해 황금비율과 프랙탈 구조가 그들의 건축물이나 미술작품에 응용되기도 했는데 이는 음악에서도 예외는 아니다. 황금비를 이용한 작곡가로는 바하(Johann Sebastian Bach, 1685-1750), 모차르트(Wolfgang Amadeus Mozart, 1956-1791), 바르톡(Bela Bartok, 1881-1945)이 있다(김윤미, 2006). 특히 피아노의 시인으로 잘 알려진 쇼팽(Frédéric François Chopin, 1810-1849)의 '전주곡' 중 1번(Pozzi Escot, 1996)과, 음악의 어머니라 불리는 헨델

8) Benoit B. mandelbrot, 프랑스 수학자이며 1975년에 '쪼개다'라는 뜻을 가진 그리스어 '프랙투스(fractus)'에서 프랙탈이란 말을 처음 만들었다.

(Georg Friedrich Handel, 1685-1759)의 '메시아' 중 '할렐루야' 합창에서도 황금비가 발견되었는데(Michael Beer, 1998) 구체적으로 다음과 같이 사용되었다.

모두 34마디로 된 쇼팽의 전주곡 1번(악보-1)은 균등하게 8마디씩으로 4개의 악구(32마디)로 이루어져있으며, 마지막 악구에서는 최종종지를 연장시키기 위해 2마디가 추가되어 있다. 마지막에 2마디가 추가된 이유는 잠시 뒤에 설명하겠지만, 이 역시 황금비와 관련이 있다.

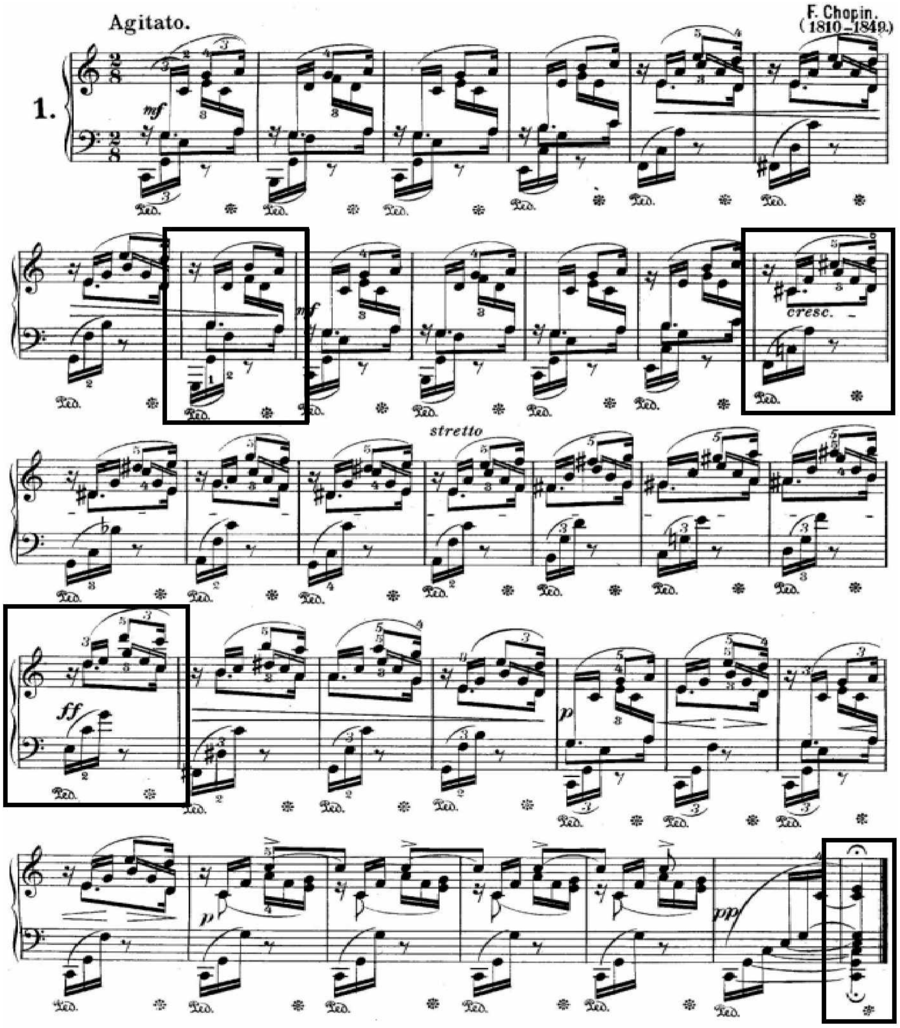
악보-1의 외형적인 모습을 봤을 때, 음악을 잘 모르는 사람일지라도 마디와 마디가 비슷한 형태로 진행되고 있음을 알 수 있을 것이다. 물론 직접 감상하기에도 곡의 흐름이 난해하지 않으며 안정적으로 흘러가는, 규칙적인 멜로디의 진행이 느껴지는 작품이다. 여기에서 소위 말했던 자기유사 형태의 프랙탈한 속성을 가지고 있다는 것이다. 또 하나의 재미있는 사실은, 균등한 34마디(32+2)에서 황금비의 속성을 가진 피보나치 수에 정확히 따르는 마디 수에 중요한 이벤트들이 나타난다는 것이다.

게다가 여기에서의 positive 황금분할은 $34 \times 0.618 = 21.012$ 즉, 21번째 마디이며 이곳에서 절정점이 생기고, negative 황금분할은 $34 \times (1-0.618) = 12.988$ 즉, 화성이 크게 변하는 13번째 마디에서 발생한다. 절정점으로 이르는 상승은 17번째 마디에서 시작되는데 이 지점은 추가된 2마디를 제외하고 전체를 32마디로 잡았을 때, 이 곡을 정확하게 중간 부분으로 분할하는 지점과 일치한다. 이렇게 추가된 2마디를 곡 전체의 구조에서 제외시킬 수 있는 이유는 이들 2마디가 어법과 제스처의 측면에서 이 곡에서 반드시 요구되는 것은 아니나, 쇼팽이 여분의 2마디를 추가시킨 이유는 이들 여분의 2마디가 시간적 dynamic symmetry와 피보나치 수의 프랙탤리티(fractality)의 균형을 주기 위해 반드시 필요하기 때문인 것이었다.

헨델의 '메시아' 중 '할렐루야' 합창은 전체가 94마디로 이루어져 있으며, 가장 중요한 이벤트들 중 하나(트럼펫 솔로연주의 등장: '왕들의 왕')는 악보 전체에서 8/13(0.61538..., 황금비율에 거의 근접하다)에 해당하는 57번째 마디에서 58번째 마디에서 일어난다. 게다가 전체로부터 황금비에 의해 나누어진 각각의 부분 역시, 비슷한 양상의 구조를 찾을 수 있다. 테마 "The kingdom of glory..."의 도입부분이 되는, 처음에서 57번째 마디까지 중 8/13에 해당하는 34번째 마디는 또 다른 중요한 이벤트의 표식이 된다. 그리고 남아있는 37마디 중에서 79번째 마디("And he shall reign...", 이 역시 남아있는 37마디에서 위치적으로 8/13에 해당한다)에서 또 다시 트럼펫의 솔로 연주가 등장함에 따라 위치적 중요성을 부각시킨다.

물론 쇼팽과 헨델이 황금비율을 의도적으로 사용했다고 말하기 어렵지만, 적어도 이러한 현상은 시각적 예술뿐만이 아닌, 행위적 예술인 음악에서도 황금분할에 의한 아름다움의 표현이 가능하다는 사실을 뒷받침하기에 충분하다.

악보-1 쇼팽의 '전주곡' 중 1번 (Chopin Prelude op.28-1)



8번째 마디	이 곡에서의 최저음이 발생한다.
13번째 마디	화성적인 측면에서 최초의 반음계적인 변화가 일어난다.
21번째 마디	이 곡에서 최고음과 가장 큰 음향에 의한 절정점이 형성된다.
34번째 마디	곡이 끝난다.

마. 음악과 푸리에 분석

우리 주위에서 발생하는 모든 소리는 공기의 진동을 통하여 전해진다. 그러한 공기의 진동이 우리의 귀에 전달되었을 때 음악 소리인지, 자동차 소리인지, 천둥소리인지를 구분할 수 것이다. 이러한 각각의 소리를 분석 할 수 있는 획기적인 수학적 정리가 나타났는데, 이 정리가 바로 1810년경 프랑스의 수학자 푸리에(Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830)에 의해 발견된 푸리에 분석(Fourier Analysis)이다(Jeffrey O. Bennett·William L. Briggs, 2002). 이 정리는 임의의 복잡한 주기적 진동에 의한 합성음이 순음[9]의 합으로 분석되어진다는 것이며, 그러한 진동이 주기 T를 가질 때 함수 $f(t)$에 의해 표현되어 진다면 푸리에의 정리에 의해 $f(t)$가 조화급수(harmonic series)로 다음과 같이 표현할 수 있다(Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens & James V. Sanders, 2000).

$$f(t) = \frac{1}{2}A_0 + (A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \cdots + A_n \cos n\omega t + \cdots)$$

$$+ (B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \cdots + B_n \sin n\omega t + \cdots)$$

,$\omega = 2\pi/T$, A_n과 B_n은 특정(determined)계수이며 다음과 같다.

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt$$

물론 복잡한 수식을 동반한 쉽지 않은 정리이지만 말하고자 하는 내용은 다음과 같다. 예를 들어, 우리가 교향곡이나 협주곡을 들을 때 여러 악기의 혼합된 소리를 동시에 듣지만 그 혼합된 소리에서도 바이올린의 소리인지 피아노의 소리인지를 구분할 수 있다는 것, 그러한 각각의 바이올린과 피아노 소리의 진동을 수식으로 표현한 것이 바로 푸리에 분석이다. 그렇게 생각한다면, 빛의 여러 파장을 바라보는 눈은 그 빛에 어떤 색깔이 섞여있는지 구분해 낼 수 없지만 귀는 기본적인 푸리에 분석을 할 수 있는 아주 정교하면서도 신비로운 기관임을 알게 해준다.

푸리에의 분석방법에 의하면 주기를 가진 합성음의 음색은 배음[10]들의 상대적 진폭에 따라 달라지는데, 배음들의 막대그래프를 보면서 그 음색의 특징을 알아볼 수 있다. 이와 같이 배음들 간의 상대적 진폭을 그래프로 그려놓은 것을 스펙트럼(spectrum)이라고 부르는데 이는 시각에서 빛이 구성하는 색들로 분해된 결과를 스펙트럼이라고 하는데서 유추한 것이다. 그렇기 때문에 푸리에 분석이 때로는 스펙트럼 분석이라고 하기도 하고, 배음분석 또는 소리 분석이라는 용어가 사용되는

9) 'pure tone', 완전히 단일한 주파수의 음.

10) 'harmonic', 음의 주파수가 기본음의 2배, 3배…등 정수배로 되는 음.

경우도 있다(이석원, 2003).

역으로 단순음들의 합으로부터 새로운 소리를 만들어 내는 작업도 가능한데, 이를 푸리에 합성(Fourier synthesis)이라고 한다(그림-1).

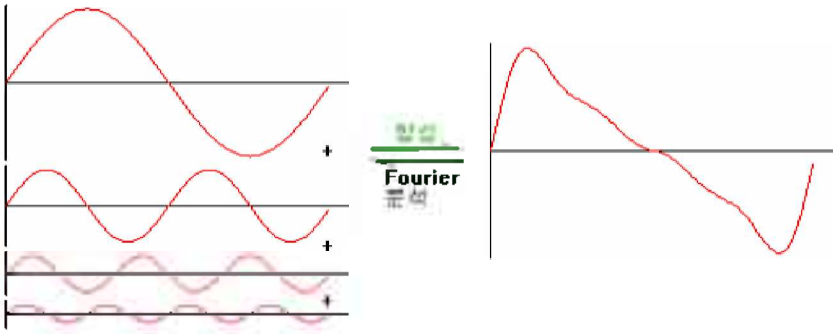


그림-1 푸리에 분석과 합성

푸리에 분석에 대한 이론적인 부분이 까다롭지만 스펙트럼을 이용한 음의 분석은 컴퓨터를 통해 쉽게 접할 수 있다. Michael C LoPresto는 그의 학생들에게 MacScope[11]라는 푸리에 분석을 직접 체험할 수 있는 프로그램을 소개하여 실제로 악기들의 배음을 분석하도록 하였다. 컴퓨터에 연결된 마이크를 통해 바이올린이나 트럼펫과 같은 특정 악기의 소리를 녹음키시면, MacScope로부터 해당악기의 음색에 대한 푸리에 계수를 구할 수 있으며, 구해진 푸리에 계수를 인터넷상의 NTNU Virtual Physics Laboratory 홈페이지에서 제공되는 푸리에 합성기[12]에 다시 입력하여 소리를 합성시킴으로서 본래 악기 소리와 푸리에 계수로 부터의 소리 합성이 일치하는가를 확인할 수 있다.

Michael C LoPresto는 단순히 지식으로서의 수학이 아닌 경험으로서의 수학을 하게 하는데 MacScope를 이용한 푸리에 분석을 권장하고 있으며, MacScope가 전문적인 장치를 필요 로 하지 않는, 단지 컴퓨터와 마이크만 있어도 푸리에 분석을 가능하게 하기 때문에 굳이 학교가 아닌 집에서도 이와 같은 수학적 활동을 가능하게 한다고 덧붙인다.

바. 음악을 통한 수학교육의 효율성

이제, 지금까지 살펴보았던 수학과 음악을 연결하는 몇몇의 고리들을 어떻게 수

11) http://www.physics2000.com 에서 이 프로그램을 무료로 다운로드 할 수 있다.

12) http://www.schulphysik.de/ntnujava/sound/sound.html 에서 푸리에 합성기를 실행시킬 수 있으며, 이를 실행시키려면 JAVA가상머신이 먼저 컴퓨터에 설치되어 있어야 한다.

학교육에 활용할 수 있는가에 대해 생각해보고자 한다.

실수체계를 형성하는 자연수, 정수, 유리수는 학생들이 이해하는데 특별한 개인차가 없다면 가르침에 있어서 비교적 큰 어려움을 동반하지 않는다. 하지만 무리수의 등장은 대부분의 학생들에게 혼란을 주거나 이를 가르치는 교사에게도 가끔씩 난관이 되기도 하는데, 이러한 문제의 여러 가지 원인들 중 무리수의 필요성, 실용성에 대한 학생들의 동기결여가 가장 근본적 원인으로 꼽을 수 있을 것이다. 그러한 동기부여를 위해 수학적 비(ratio)와 비율(proportion)을 이용한 음의 구성으로써 무리수의 필요성을 학생들로 하여금 인식하게 할 수 있다.

앞서 언급하였던 '피타고라스 콤마'에 관한 문제를 제기하자면, 피타고라스 음계를 따랐을 때 기본음에서 6도를 증가시키면 주파수는 기본음 주파수의 $\frac{5}{3}$배가 되고, 4도를 증가시키면 기본음 주파수의 $\frac{4}{3}$배가 됨을 확인했었다. 반대로 5도의 감소는 기본음의 진동수에서 $\frac{3}{2}$의 역수인 $\frac{2}{3}$배가 된다. 그렇다면, 기본주파수 260Hz를 가지는 '도'에서 시작하여 6도를 올렸다가 다시 4도를 올린 후, 5도를 두 번 내리면 결론적으로 10도를 올렸다가 10도를 내리는 경우와 같으므로 '도'의 주파수인 260Hz에 다시 되돌아 와야 한다는 것, 하지만 실제로 계산을 해보면

$$\text{도} \xrightarrow[\frac{5}{3}\text{배}]{\text{6도 증가}} \text{라} \xrightarrow[\frac{4}{3}\text{배}]{\text{4도 증가}} \text{레} \xrightarrow[\frac{2}{3}\text{배}]{\text{5도 감소}} \text{솔} \xrightarrow[\frac{2}{3}\text{배}]{\text{5도 감소}} \text{도}$$

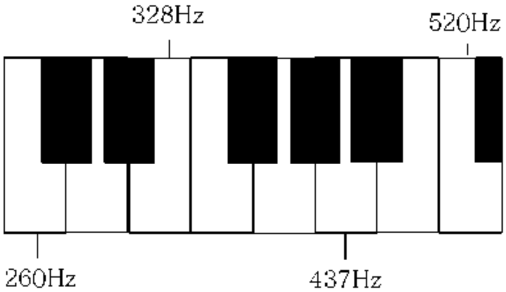
$$\Rightarrow \frac{5}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\neq 1$$

임을 확인 할 수 있게 된다. 유리수의 비율에 의한 완전한 음계형성이 가능하지 않다는 사실에서 무리수의 필요성을 학생들에게 인식시킬 수 있다. 다시 말해 한 옥타브를 12개의 동일한 간격으로, 잇따른 음에 대한 진동수가 $\sqrt[12]{2}=1.05946\cdots$배가 되었을 때 비로소 지금의 음악이 가능함을 알게 하는 것이다. 또한 무리수 비율에 의한 전조의 가능성을 이용하여 동일한 음악을 전조시켜 들려줌으로서 학생들이 무리수를 몸소 느끼게 할 수 있는 것도 하나의 방법이 될 것이다.

학생들이 황금비의 활용을 이해함에 있어서도 그림이나 건축물로부터의, 공간적 활용뿐만 아니라 앞서 소개한 음악에서의, 시간적 활용과 같이 소개함으로써 수학이 우리가 살아가는데 모든 감각을 통하여 느껴질 수 있음을 알리는 것이 중요하다. 학생들의 수학에 대한 거부감을 친밀감으로 전환시켜 줌으로써 학생들이 더 넓은 수학적 안목을 가지도록 하는 것이 수학적 지식의 함양보다 먼저 이루어져야 할 것이다.

또한 음악적 화성을 이룸에 있어서 피보나치 수열을 학생들로 하여금 직접적으

로 느끼게 할 수 있다.



$$\frac{520}{328} \approx 1.5853 \cdots \approx 1.6 = \frac{8}{5}$$

$$\frac{437}{260} \approx 1.6807 \approx 1.6666 \approx \frac{5}{3}$$

그림-2

그림-2는 표-1에서 구했던 몇몇의 음들에 대한 주파수를 나타내고 있다. 여기서 확인해볼 사실은, 여러 음정들 중에서도 많은 사람들에게 기분 좋게 들리는 음정은 장6도와 단6도[13]로 알려져 있는데(오시봉·양명오, 1999), 이러한 음정관계에 있는 음들이 피보나치 수에 관한 비로 근사한다는 것이다. 그림에서의 '도'와 '라'는 장6도의 관계에 있으며 '미'와 한 옥타브위의 '도'는 단6도의 관계에 있다. 이들의 주파수 비를 구하면 각각 피보나치 수에 의한 비율로 표현이 가능함을 알 수 있다. 역으로, 기본음으로부터 피보나치 수에 의한 비를 사용하여 학생들 자신만의 음계를 형성함으로서 황금비율에 의한 예술적 활용을 몸소 체험할 수 있는 기회를 제공할 수 있는 것이다. 이를 이용한 간단한 선율의 작곡을 통해 수업시간에 친구들에게 들려주게 한다면, 황금비율에 대한 아름다움을 서로가 느낄 수 있을 뿐 아니라 황금비율을 통한 또 다른 수학적 활용능력을 키워내는 밑거름이 될 것이다.

수학교육의 효율성에 있어 푸리에 해석은, 이론 그 자체는 어려우나 컴퓨터를 이용하면 재미있는 수학수업을 진행하게 해준다(Michael C LoPresto, 2007).

13) 장6도에서 하나의 반음만큼 더 좁은 음정을 말하며 쉽게 말해 '도'와 '라♭(또는 솔#)'의 관계가 단6도에 해당한다.

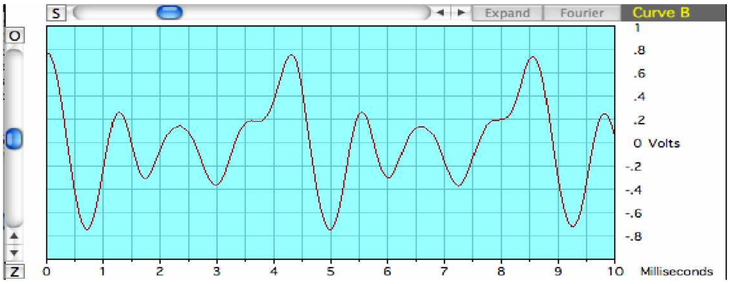


그림-3 Macscope를 통해 얻어진 트럼본의 파형

그림-3은 앞서 소개한 MacScope를 통해 얻어진 트럼본 소리의 파형에 대한 스펙트럼이다. 여기서 얻은 파형에 대하여 훨씬 구체적인 요소들을 분석 할 수 있다(그림-4).

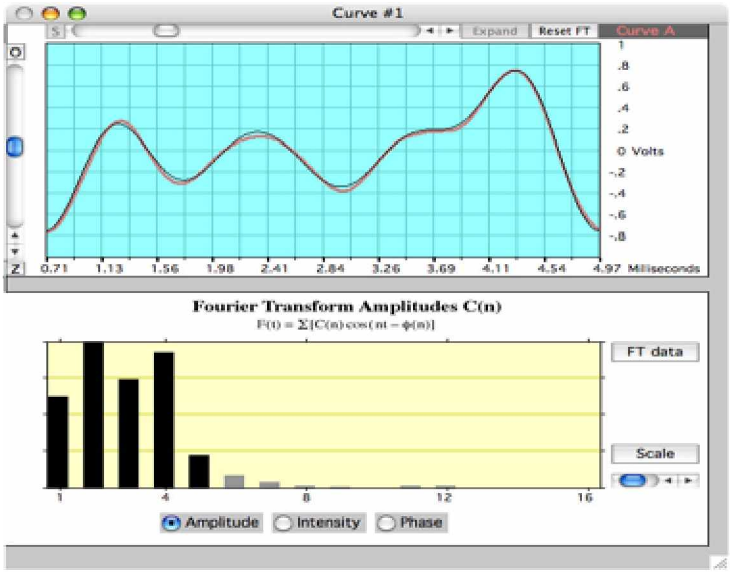


그림-4 한 주기에 대한 파형과 배음 스펙트럼

그림-5와 같이 분석된 푸리에 계수에 대한 데이터를 NTNU Virtual Physics Laboratory의 홈페이지에 있는 푸리에 합성기에 입력시켜서 트럼본 소리를 재현할 수 있다(그림-6).

Fourier Transform Data

Fourier Transform Data for Curve #1A

Harmonic	Amplitude	Intensity	Phase	An(T) V	Bn(t) V
1	0.633	0.401	-089	0.002	-0.181
2	1.000	1.000	-153	-0.256	-0.128
3	0.751	0.564	145	-0.177	0.122
4	0.939	0.881	175	-0.268	0.021
5	0.228	0.052	148	-0.056	0.034
6	0.091	0.008	-066	0.010	-0.024
7	0.044	0.002	000	0.013	0.000
8	0.013	0.000	-080	0.001	-0.004

그림-5 MacSocope에서 분석된 데이터, 마지막 두 열은 푸리에 계수에 해당한다.

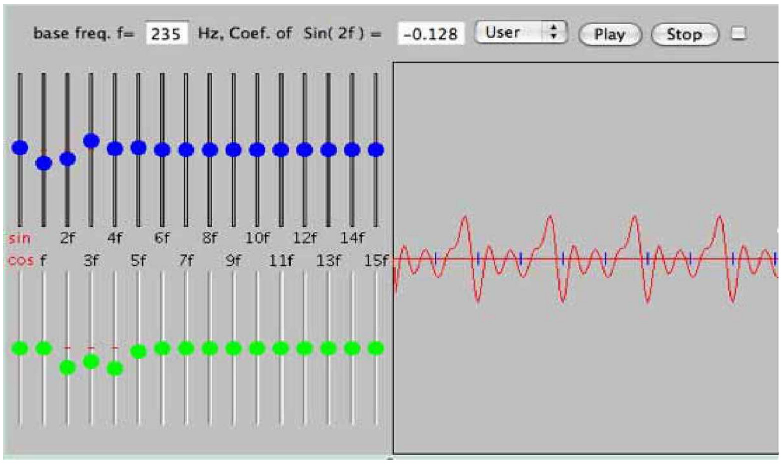


그림-6 푸리에 합성기에 의해 생성된 트럼본의 파형

물론 트럼본 뿐만 아니라 다른 여러 가지 악기의 소리, 또는 다른 특정한 소리에 대하여 위와 같은 과정을 통해 소리를 분석할 수 있게 할 수 있다. 이를 학생들이 직접 경험하도록 하여 sin 함수와 cos 함수가 귀로 들리는 것을 눈으로 볼 수 있게 해주는 아주 중요한 역할을 지닌다는 사실을 느끼게 할 것이다.

3. 결론

피타고라스가 음계를 만들어 내는 방법은 지극히 수학적이었다. 현 길이의 비에 따라 음을 만들었으며, 그들의 비가 자연수비가 될 때 가장 아름다운 소리가 나타나는 것을 발견하였던 것처럼 이는 수학적 방법을 통한 음의 구성이었다. 피타고라

스의 음계가 지금의 음계형성에 밑바탕을 제시하는데 큰 공을 세웠지만 지나친 자연수비의 고집으로 인한 음계의 치명적인 오류를 해결하기 어려웠다. 바흐는 무리수를 이용한 음계를 형성함으로서 이러한 오류를 해결하였으며 그렇게 만들어진 평균율은 지금까지도 널리 사용되고 있다. 이는 수학사의 발전과 비교하였을 때 유리수에서 무리수로 수의 영역이 확대되어감에 따라 음계역시, 제한적이고 단순한 선율에서 아름다운 화성을 뽐내기까지에 이르게 된 것이었다.

수학이 발전함에 따라 음악을 작곡하는 방법도 더 다양해졌는데, 수학사에서 가장 아름다운 비율인 황금비율과 가장 아름다운 수열로 꼽히는 피보나치수열을 이용한 방법이 그러한 예였다. 바흐나 베토벤, 쇼팽에 이르기까지 여러 작품들의 황금비에 따른 분석이 시도되어졌으며 프랑스 수학자 만델브로에 의해 명명된, 황금비율에 따른 프랙탤리티(fractality) 혹은 자기유사성에 따른 작곡법이 바르톡에 의해 본격적으로 이루어졌다.

지금은 수학이 발전됨에 따라 음의 속성인 진동에 대한 폭넓은 연구가 이루어지고 있는데, 프랑스의 수학자 푸리에에 의해 발견된 푸리에 분석이 이를 가능하게 했다. 푸리에 분석이 스펙트럼 분석이라고도 불리는 이유는 빛의 시각적 스펙트럼처럼 음을 시각적으로 보여 줄 수 있었기 때문이었는데, 이러한 장점을 이용한 수학 교육도 가능하게 하고 있다.

이 논문에서는 수학과 음악의 상호관계를 설명함에 있어, 비를 통한 소리의 구성, 음계의 발전에 따른 수학적 해석, 황금비를 이용한 음악의 분석 및 작곡방법, 그리고 음의 스펙트럼 분석을 가능하게 하는 푸리에 분석을 제시하였다. 물론 이 네 가지의 방법을 통한 더 많은 연구도 필요하겠지만 이 보다 수학과 음악을 연결시켜주는 더 많은 매개체의 발견, 연구가 활발히 이루어지는 것이 수학과 음악의 학문적 발전, 교육적 발전에 더욱 박차를 가할 것이라고 전망한다. 많은 수학자들과 음악가들의 교류가 필요할 것이며, 이를 가능하게 하기 위하여 어느 한 분야의 일방적인 노력만 생각할 것이 아니라, 고대 그리스인들이 그랬듯이, 두 분야가 동등한 위치에서 다 같이 노력해야 할 것이다.

참고문헌

[1] 김윤미, 음악과 수학의 상관관계에 대한 고찰, 공주대학교 교육학 석사학위논문, 2006.

[2] 김춘미, 피타고라스와 음악이론, 음악논단 **6** (1992), 271-299, 서울: 한양대학교 음악연구소.

[3] 안이랑, 피타고라스의 음악론에 대한 연구, 성신여자대학교 음악학 석사학위

논문, 2006.

[4] 오시봉·양명오, 피보나치수열과 황금비에 관한 연구, 과학교육 **16**, (1999), 155-174, 제주대학교 사범대학 과학교육연구소.

[5] 이석원, 음악음향학. 서울: 심설당, 2003.

[6] 장석훈(Edward Rothstein,), 수학과 음악, 서울: 경문사, 1995.

[7] Jeffrey O. Bennett & William L. Briggs, *Using and understanding mathematics: a quantitative reasoning approach, 2nd ed.*, New york: Addison Wesley, 2002.

[8] Lawrence E. Kinsler·Austin R·Frey·Alan B. Coppens·James V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics 4th ed.*, New York: John Wiley & Sons, 2000.

[9] Michael Beer, How do mathematics and music relate to each other?, http://www.pages.drexel.edu/~jjn27/mathandmusic.pdf, 1998

[10] Michael C LoPresto, Experimenting with Fourier synthesis, *Physics Education* **43(1)** (2007) 30-36.

[11] Pozzi Escot, 음악에 있어서의 수학적 시홍, 음악논단 **10** (1996), 287-302, 서울: 한양대학교 음악연구소.

[12] Roger Fenn, *Geometry*, London : Springer, 2001

Ma, Doc-Un
Kyungsung University, Busan 608-736, Korea
E-mail: aiguya97@naver.com

Lee, Byung-Soo
correspondent author, Kyungsung University, Busan 608-736, Korea
E-mail: bslee@ks.ac.kr