

평행평면의 성간먼지층에 의한 복사광의 산란 THE SCATTERING OF RADIATION IN PLANE-PARALLEL DUST LAYERS

선광일
한국천문연구원
KWANG-IL SEON

Korea Astronomy and Space Science Institute

E-mail: kiseon@kasi.re.kr

(Received December 9, 2008; Accepted December 22, 2008)

ABSTRACT

We present analytical approximations for calculating the scattering and escape of non-ionizing photons from a plane-parallel medium with uniformly illuminated by external sources. We compare the results with the case of a spherical dust cloud. It is found that more scattering and absorption occur in the plane-parallel geometry than in the spherical geometry when the optical depth perpendicular to the plane and the radial optical depth of the sphere are the same. The results can provide an approximate way to estimate radiative transfer in a variety interstellar conditions and can be applied to the dust-scattered diffuse Galactic light.

key words: dust, extinction – methods: analytical – radiative transfer

1. 서론

천문학적인 현상을 이해함에 있어서 복사전달 (radiative transfer)의 연구는 매우 중요하다. 특히, 수소원자의 이온화 에너지보다 낮은 에너지를 갖는 복사광의 복사전달현상은 대부분 성간먼지(interstellar dust)에 의한 흡수 및 산란에 의한 것이다. 예를 들어, 확산 은하광(the diffuse Galactic light)은 주로 우리 은하내부의 별빛에 의한 성간복사장(interstellar radiation field)이 성간먼지에 의해 산란되어 보이는 현상이다 (Witt 1968; Bowyer 1991; Gordon 2003).

Varosi & Dwek (1999)은 구형의(spherical) 성간먼지 구름(clouds)에 외부에서 입사하는 복사광이 흡수 또는 산란되는 양에 대한 해석적인 근사해(analytical approximations)를 계산하였다. 그러나, 실제 성간먼지 구름은 구형의 모양을 띠기 보다는 매우 복잡한 모양을 갖는다. 따라서 실제에 가까운 모델을 세우고 복사전달을 계산하여야 한다. 그러나, 실제의 모양을 알 수 없으므로 상세한 모델을 세우기 이전에 간단한 모양을 갖는 성간먼지 구름에서의 복사전달에 대한 근사적인 해를 계산하고 각각의 모양에 대한 결과를 비교하는 것은 의미가 있는 일이다.

이 연구에서는 외부에서 균일하게 등방으로 입사하는 복사광이 평행평면의 성간먼지층(plane-parallel interstellar dust layer)에 의해 산란 또는 흡수되는 양에 대해 Varosi & Dwek (1999)의 방법과 동일한 방법으로 해석적인 근사해를 구하고 구형의 성간먼지 구름에 의한

복사전달 결과와 비교하고자 한다. 이를 위해 우선 산란에 의한 효과를 무시하고 평행평면 성간먼지층의 한 쪽 면에서 입사하는 외부복사광이 반대쪽으로 진행하면서 소광(extinction)되는 양을 계산한다. 둘째로 평면 성간먼지층 내부의 광원에서 방출된 빛이 산란이 없고 흡수만 있을 때 탈출(escape)할 비율을 계산한다. 마지막으로 성간먼지에 의한 산란을 매질 내부에서 새로운 광자가 방출되는 것으로 간주하고, 앞의 두 결과를 결합하여 외부 복사광이 성간먼지 매질에 의해 산란되어 나오는 확률 및 흡수되는 확률등을 계산한다.

2. 균일한 외부 복사광의 소광

균질한 밀도를 갖는 평행평면 모양의 성간먼지층에 균일하게 등방으로 입사하는 외부 복사광이 성간먼지와 상호작용하는 확률을 계산하기 위해서 그림 1과 같이 왼쪽에서 외부 복사광이 평면의 수직에 대해 θ 의 각을 가지고 입사한다고 가정하자.

입사광의 세기(intensity)를 I_0 라고 가정하면 반대편으로 흡수되지 않고 투과되어 나오는 세기는

$$I_{\text{out}}(\tau, \theta) = I_0 \exp(-\tau / \cos \theta) \quad (1)$$

이 된다. 이때, 평면 먼지층의 두께, 밀도 및 흡수계수를 각각 d , ρ 및 κ 라고 하면 광학적 두께(optical thickness)는 $\tau = d\rho\kappa$ 가 된다. 흡수되거나 산란되지 않고 반대편으로 나오는 총 플럭스는 모든 입사각에 대해 적분

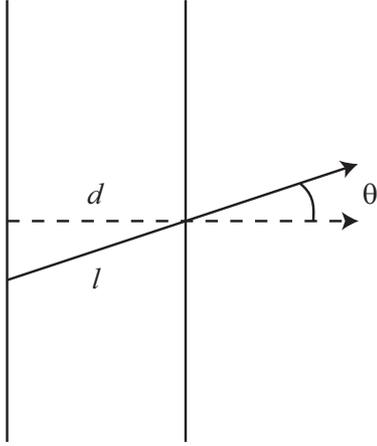


그림 1.— 평행평면 성간먼지층에 입사 또는 진행하는 복사광. 성간먼지층의 두께는 d 이고 복사광의 진행거리는 $l = d/\cos\theta$ 이다.

하여 다음과 같은 값을 갖게 된다.

$$\begin{aligned} F_{\text{out}}(\tau) &= 2\pi I_0 \int_0^{\pi/2} e^{-\tau/\cos\theta} \cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi I_0 \int_0^1 \mu e^{-\tau/\mu} d\mu \\ &= \pi I_0 [e^{-\tau}(1-\tau) + \tau^2 \Gamma(0, \tau)]. \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 불완전 감마함수(incomplete Gamma function)를 $\Gamma(a, x) \equiv \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ 로 정의된다. 한편, 성간먼지가 전혀 없다면 오른쪽 평면으로부터 방출되는 플럭스의 세기는 $\tau = 0$ 으로 놓고 적분한 값이므로 다음과 같다.

$$F_0 = F_{\text{out}}(0) = 2\pi I_0 \int_0^1 \mu d\mu = \pi I_0. \quad (3)$$

따라서, 광자가 성간먼지와 상호작용하는 확률은

$$\begin{aligned} P_i(\tau) &= \frac{F_0 - F_{\text{out}}(\tau)}{F_0} \\ &= 1 - e^{-\tau}(1-\tau) - \tau^2 \Gamma(0, \tau). \end{aligned} \quad (4)$$

이 된다. 이때, 성간먼지에 소광되지 않고 바로 탈출할 확률은 다음과 같다.

$$P_d(\tau) = 1 - P_i(\tau) = e^{-\tau}(1-\tau) + \tau^2 \Gamma(0, \tau). \quad (5)$$

그림 2는 외부에서 입사하는 복사광이 소광될 확률과 소광되지 않고 탈출할 확률을 보여준다. 그림에서 실선은 이 논문에서 구한 평면 성간먼지층에 대해 계산한 결과이고, 점선은 Varosi & Dwek (1999)에 의해 계산된 구형의 성간먼지구름에 대한 계산 결과이다.

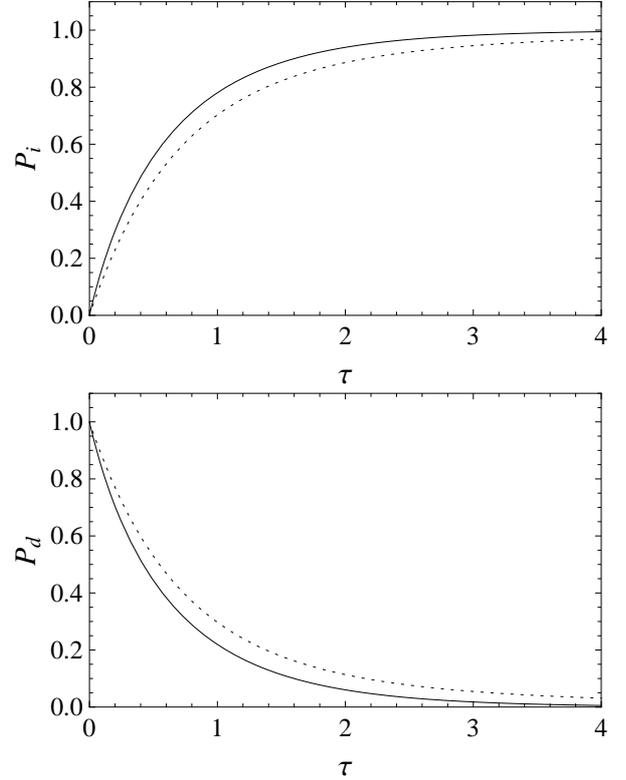


그림 2.— 외부에서 균질 등방으로 입사하는 복사광이 (a) 소광될 확률 $P_i(\tau)$, (b) 소광되지 않고 바로 탈출할 확률 $P_d(\tau)$. 점선은 Varosi & Dwek (1999)이 계산한 구형 성간먼지에 대한 결과이다.

참고로 광학적인 두께가 매우 얇은 경우는 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$P_i(\tau \ll 1) = 2\tau + (-3/2 + \gamma + \log \tau)\tau^2 + \dots \quad (6)$$

구형의 성간먼지인 경우는 Varosi & Dwek (1999)에 의해 $P_i(\tau \ll 1) \approx 4\tau/3$ 임을 알 수 있고, 그림 2(a)에서도 확인할 수 있듯이 평행평면 성간먼지의 경우보다 좀 더 느린 기울기를 가지고 증가함을 알 수 있다. 여기서, 2τ 와 $4\tau/3$ 은 각각 구형 및 평면 모양의 매질에 대해 모든 각도 θ 에 대해 평균한 광학적 두께이다.

3. 균일한 내부 복사광의 탈출

3.1. 산란이 없는 경우

이제 균일하고 등방으로 내부에서 발생한 광자가 흡수 또는 산란되지 않고 탈출하는 확률을 구한다. 단위 시간 당 단위 체적당의 방출률(emissivity)을 ϵ 이라고 정의하면 평면의 수직에 대해 θ 의 각으로 나오는 빛의 세기는 다음과 같다.

$$I_{\text{out}}(\tau, \theta) = \frac{\epsilon}{\rho\kappa} (1 - e^{-\tau/\cos\theta}) / \cos\theta, \quad (7)$$

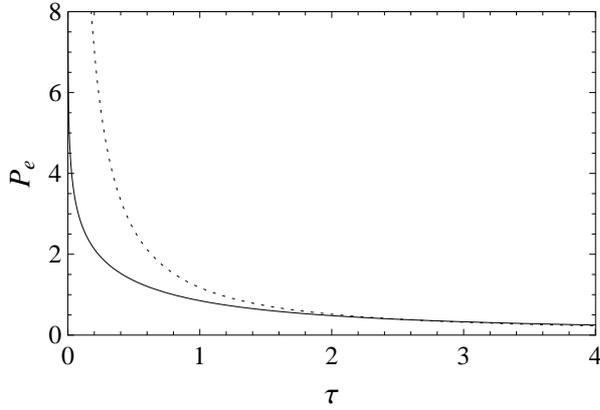


그림 3.— 산란이 없을 때, 평행평면 성간먼지의 내부에서 발생한 균일한 복사광이 탈출하는 비율 $P_e(\tau)$. 점선은 구형 성간먼지에 대한 계산결과.

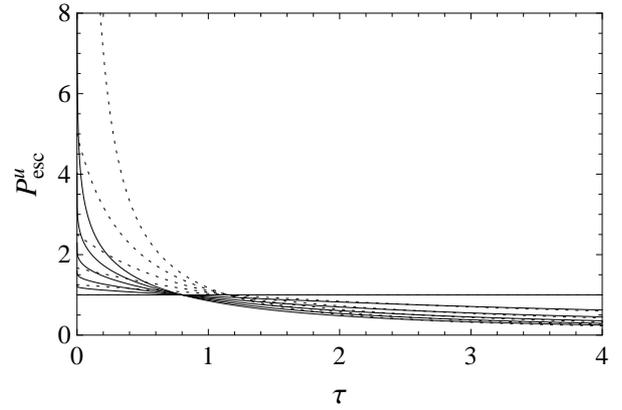


그림 4.— 산란이 있을 때, 내부에서 발생한 균일한 복사광이 탈출하는 비율 $P_{\text{esc}}^u(\tau, \omega)$. 각각의 곡선은 $\tau < 1$ 인 영역에서 성간먼지의 반사도가 위에서 아래로 (1) $\omega = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 일 때의 결과에 해당한다. 점선은 구형 성간먼지에 대한 결과.

모든 각에 대해 적분하여 다음과 같이 총 플럭스의 양을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{\text{out}}(\tau) &= \frac{2\pi\epsilon}{\rho\kappa} \int_0^{\pi/2} (1 - e^{-\tau/\cos\theta}) \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2\pi\epsilon}{\rho\kappa} \int_0^1 (1 - e^{-\tau/\mu}) d\mu \\ &= \frac{2\pi\epsilon}{\rho\kappa} [1 - e^{-\tau} + \tau\Gamma(0, \tau)]. \end{aligned} \quad (8)$$

한편, 매질이 흡수도 없고 산란도 없다면 빛의 세기는

$$I_0(d, \theta) = \epsilon d / \cos\theta \quad (9)$$

이 되고, 이 때의 총 플럭스는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_0(d) &= 2\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \cos\theta \sin\theta I_0(d, \theta) \\ &= 2\pi\epsilon d \int_0^1 d\mu \\ &= 2\pi\epsilon d. \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 평행평면 성간먼지층에서 발생한 광자가 그림 1의 오른쪽 면을 탈출하는 비율(fraction)은 다음과 같다.

$$P_e(\tau) = \frac{F_{\text{out}}(\tau)}{F_0(d)} = \frac{1}{\tau} [1 - e^{-\tau} + \tau\Gamma(0, \tau)]. \quad (11)$$

그림 3은 산란이 없는 매질에서 내부에서 발생한 광자가 탈출하는 비율을 광학 두께의 함수로 보여준다. 그림의 점선은 구형 성간먼지구름에 대한 결과이며 Osterbrock (1989)에 의해 유도된 결과를 사용하였다. 그림에서 볼 수 있듯이 광학적 두께가 동일하다면, 평행평면

성간먼지층인 경우가 구형인 경우에 비해 내부에서 발생한 광자가 잘 탈출하지 못함을 알 수 있다. 즉, 평면모양의 성간먼지구름에 의해 더 많은 광자가 흡수 되거나 산란된다.

3.2. 산란이 있는 경우

광원이 균일하게 분포하고 산란이 존재하는 매질에서의 내부 광원이 외부로 탈출하는 비율을 계산하는 방법은 Lucy et al. (1991)에 의해 처음으로 고안되었고 Varosi & Dwek (1999)에 의해 상세하게 기술되었다.

산란 반사율(albedo)을 ω 라고 하면, 내부에서 발생한 광자의 $P \equiv P_e(\tau)$ 만큼은 성간먼지와 아무런 반응없이 탈출할 것이고 $(1 - P)$ 만큼은 매질과 반응할 것이다. 이 중에서 다시 $(1 - \omega)(1 - P)$ 만큼은 흡수되고 $\omega(1 - P)$ 는 산란될 것이다. 산란이 모든 위치에서 균일하게 등방적으로 일어난다면, 산란된 광자중에서 $P\omega(1 - P)$ 는 더 이상의 산란을 경험하지 않고 성간먼지층을 탈출할 것이고 $\omega^2(1 - P)^2$ 만큼은 성간먼지층과 다시 한번 상호작용할 것이다. 이런 과정을 반복하면 산란이 있는 매질에서 탈출하는 비율은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} P_{\text{esc}}^u(\tau, \omega) &= P \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n (1 - P)^n \\ &= \frac{P_e(\tau)}{1 - \omega[1 - P_e(\tau)]}. \end{aligned} \quad (12)$$

그림 4는 이렇게 계산된 탈출되는 비율을 보여준다. 여기서 주목할 점은 $\omega = 0$ 일 때, 즉, 산란이 없을 때는

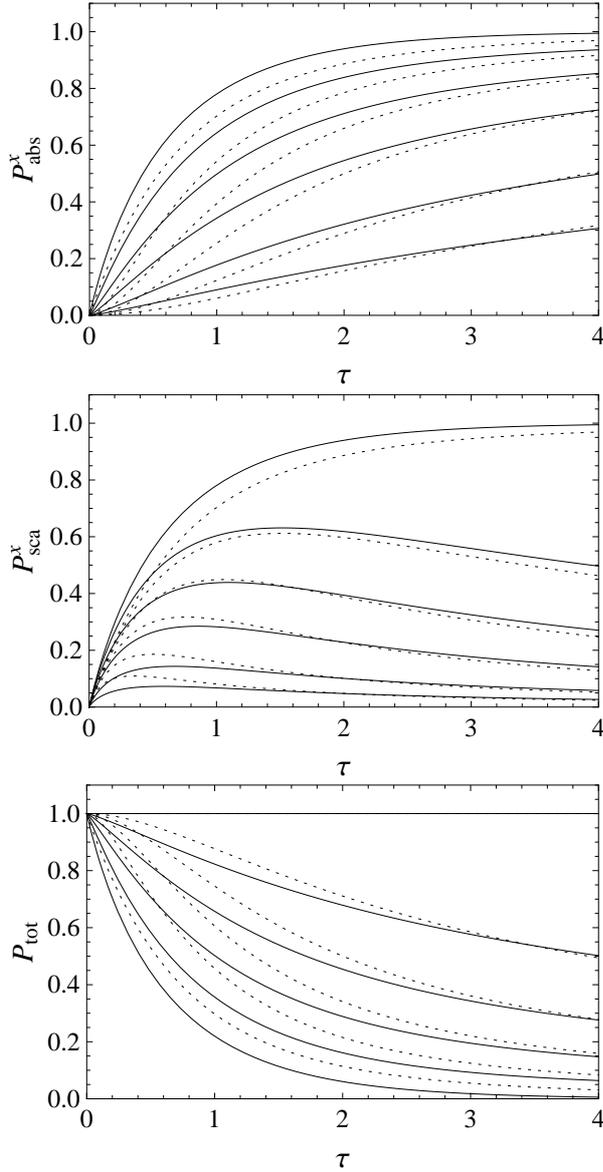


그림 5.— 외부에서 입사하는 복사광이 (a) 성간먼지층에 의해 흡수되는 확률 ($\downarrow \omega = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9$), (b) 산란되어 탈출하는 확률 ($\uparrow \omega = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$), (c) 산란되어 나오거나 반응하지 않고 탈출하는 총 확률 ($\uparrow \omega = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$). 점선은 구형 성간먼지에 대한 결과.

$P_{\text{esc}}^u(\tau, 0) = P_e(\tau)$ 이 된다는 점이다. 또한, $\omega = 1$ 일 때, 즉, 산란만 있고 흡수가 없을 때는 $P_{\text{esc}}^u(\tau, 1) = 1$ 이 된다. 즉, 이 때는 그림 4에서 볼 수 있듯이 몇 번의 산란 과정을 거치든 관계없이 모든 광자가 탈출하게 된다는 것이다.

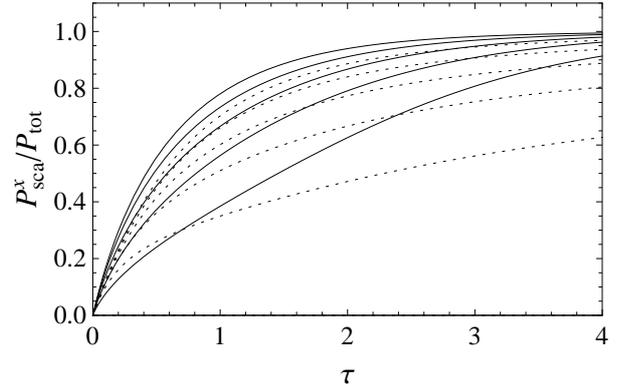


그림 6.— 탈출 광자중 산란 후 탈출하는 광자의 비율 ($\uparrow \omega = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$). 점선은 구형 성간먼지에 대한 결과.

4. 평행평면의 성간먼지층에 의한 외부 복사광의 탈출 및 흡수

외부에서 입사한 광자가 매질에서 상호작용하는 확률 $P_i(\tau)$ 중에서 산란되는 양은 산란 반사율을 곱해준 $P_i(\tau)\omega$ 가 된다. 이렇게 산란된 광자는 성간먼지의 내부에서 발생하는 광자로 간주를 할 수 있으므로 외부에서 입사한 광자가 성간먼지에 산란과정을 거친 후 탈출할 확률은 다음과 같다.

$$P_{\text{sca}}^x(\tau, \omega) = P_i(\tau)\omega P_{\text{esc}}^u(\tau, \omega). \quad (13)$$

성간먼지에 산란되고 탈출한 광자와 전혀 상호작용하지 않고 투과한 광자를 합하면 그림 1의 오른쪽으로 나오는 총 광자의 양이 될 것이다. 따라서, 외부에서 입사한 복사광이 성간먼지층 밖으로 탈출할 총 확률은 $P_{\text{tot}} = P_{\text{sca}}^x + P_d$ 이 된다. 한편, 성간먼지층에 흡수되는 확률은 상호작용하는 광자 중에서 산란되어 탈출하는 것을 제외하면 되므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_{\text{abs}}^x(\tau, \omega) &= P_i(\tau) - P_{\text{sca}}^x(\tau, \omega) \\ &= P_i(\tau) [1 - \omega P_{\text{esc}}^u(\tau, \omega)]. \end{aligned} \quad (14)$$

그림 5는 각각 흡수 확률, 산란되어 탈출하는 확률 및 탈출하는 총 확률을 보여준다. 앞 절에서 언급한 바와 같이 성간먼지의 광학적 두께가 동일하다면, 구형의 성간먼지 구름의 경우보다 평행평면 성간먼지의 경우에 더 많은 광자가 흡수 또는 산란되는 것을 그림 5(a) 및 (b)에서 확인 할 수 있다. 그러나, 산란되지 않고 탈출하는 광자의 양이 구형 성간먼지 구름의 경우보다 작기 때문에 탈출하는 광자의 총 양은 구형모양에 비해 작음을 그림 5(c)를 통해 알 수 있다. 탈출하는 총 광자중에서 산란한 후 탈출하는 광자의 비는 그림 6에 나타내었다. 그림 6을 통해서도 같은 광학적 두께에 대해 평행평

면 모양의 성간먼지구름의 경우 더 많은 산란을 겪는 것을 확인 할 수 있다. 그림 5(c)에서 주목할 점은 $\omega = 1$ 일 때, 즉, 흡수는 일어나지 않고 산란만 일어날 때, 예상되는 대로 입사 광자가 모두 탈출함을 확인 할 수 있다.

한편, 구형의 성간먼지 구름의 경우에도 구의 반경이 커져서 광학적 두께 τ 가 매우 크다면 구표면에서는 평면과 동일하게 간주될 수 있다. 따라서 τ 가 매우 클 때는 구형인 경우와 평면 먼지층인 경우에 대해 동일한 값을 얻어야 함을 예상할 수 있다. 예상했던 바와 같이 그림 4와 5를 비교해 보면 τ 가 매우 큰 경우 점선과 실선이 서로 만나는 것을 볼 수 있다.

5. 요약 및 토의

이 연구에서는 균일한 평행평면 성간먼지층에 균일하고 등방의 복사광이 입사하여 반대면으로 산란되어 탈출하는 확률과 성간먼지에 의해 흡수되는 확률을 계산하였다. 동일한 광학적 두께에 대하여 평행평면 모양의 성간먼지 구름은 구형의 성간먼지 구름에 비해 많은 양의 광자를 흡수 또는 산란시킴을 알 수 있었다.

이 연구의 결과는 산란이 등방적으로 모든 위치에서 균일하게 일어난다고 가정한 것으로 실제 비등방적인 산란의 경우와는 약간의 차이를 보일 것이다. 그러나, 주변에 밝은 별이 없고 성간복사장이 성간먼지구름에 의해 산란되어 발생하는 확산 은하빛 현상등을 연구함에 있어서 자세한 분석이 어렵다면 근사적인 분석을 하기에 적합하다.

참고문헌

- Bowyer, S., 1991, The Cosmic Far Ultraviolet Background, *ARA&A*, 29, 59
- Gordon, K. D., 2003, Interstellar Dust Scattering Properties, *ASP Conference Series*, 309, 77
- Lucy, L. B., Danziger, I. J., Gouiffes, C., & Bouchet, P., 1991, *Supernovae*, ed. S. E. Woosley (New York: Springer), 82
- Osterbrock, D. E., 1989, *Astrophysics of Gaseous Nebulae and Active Galactic Nuclei* (Mill Valley: Univ. Sci.), 385-386
- Varosi, F. & Dwek, E., 1999, Analytical Approximations for Calculating the Escape and Absorption of Radiation in Clumpy Dusty Environments, *ApJ*, 523, 265
- Witt, A. N., 1968, Interpretation of the Diffuse Galactic Light, *Nature*, 220, 50