

## DRAINE 과 HENYEEY-GREENSTEIN 산란 위상 함수 비교 COMPARISON OF HENYEEY-GREENSTEIN WITH DRAINE SCATTERING PHASE FUNCTIONS

선광일  
 한국천문연구원  
 KWANG-IL SEON

Korea Astronomy and Space Science Institute

*E-mail: kiseon@kasi.re.kr*

(Received December 12, 2008; Accepted December 22, 2008)

### ABSTRACT

Scattering of incident light by the interstellar dust is usually approximated by Henyey-Greenstein scattering phase function. Recently, Draine (2003) proposed a new analytic phase function with two parameters. We describe an algorithm to generate random numbers distributed according to the Draine's function, and compare two phase functions. It is also derived exact solutions of two parameters for given values  $\langle \cos \theta \rangle$  and  $\langle \cos^2 \theta \rangle$ . It is found that Henyey-Greenstein function with  $g = \langle \cos \theta \rangle$  provides a good approximation for  $\lambda > 2000\text{\AA}$ . At shorter wavelengths, more realistic phase function may be needed for radiative transfer models.

*key words:* dust, extinction – methods: analytical – radiative transfer

### 1. 서론

성간먼지(interstellar dust)는 별빛등을 산란시켜서 반사성운(reflection nebulae)등의 현상등을 만들어낸다. 또한, 성간먼지 구름이 별에서 멀리 떨어져 있어도 성간복사장(interstellar radiation field)이 성간먼지에 의해 산란되어 확산 은하빛(the diffuse Galactic light)을 만들게 된다. 이러한 산란 현상 연구를 통해 성간먼지 알갱이의 화학적 조성 및 물리적 특성을 연구할 수 있다.

성간먼지에 의한 산란은 비등방적인 특성을 갖고 있으며 일반적으로 Henyey & Greenstein (1941)가 제시한 해석적(analytic) 산란 위상 함수(scattering phase function)로 근사시켜서 연구되고 있다. 그 밖에 Witt (1977)는 두 개의 Henyey & Greenstein 함수를 합한 모양의 함수를 이용하였고, Cornette & Shanks (1992)는 Henyey & Greenstein 함수에  $1 + \cos^2 \theta$ 를 곱한 형태의 함수를 가정하였다. 최근, Draine (2003)은 하나의 변수를 더 포함시켜서 Cornette-Shanks 함수를 발전시킨 새로운 산란 위상 함수를 제안하였다. 그는 또한 성간먼지 모델로부터 얻어지는  $\langle \cos \theta \rangle$  와  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  값을 이용하여 그가 제안한 해석적 위상 함수의 두 변수  $\alpha$  와  $g$ 를 계산하는 방법을 기술하였다. 하지만, 그가 구한 해에는 오류가 있음을 이 연구를 통해 알게 되었다.

한편, 반사성운 및 확산 은하빛등의 모델연구에 있어서 대부분 Henyey-Greenstein 함수를 사용하고 있으며, 관측과 가장 잘 맞는 Henyey-Greenstein 함수의 위

상 인자(phase factor)  $g$ 를 연구 결과로써 제시하고 있다 (Gordon 2004). 그러나, 동일한  $\langle \cos \theta \rangle$  값을 갖더라도 Draine의 위상 함수와 Henyey-Greenstein 위상 함수는 서로 다른  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  값을 갖기 때문에 서로 차이를 보일 수 있다. 이 연구에서는 모델연구에 있어서 필수적인 Draine의 산란위상 함수를 몬테카를로 시뮬레이션하는 방법을 기술하고 Draine의 위상 함수와 Henyey-Greenstein의 위상 함수가 얼마나 차이 나는지 비교한다. 또한, Draine (2003)이 제공하는 공식은 실제 계산에 적용하기에는 무리가 있어서 실제 적용가능한 공식을 얻었다.

### 2. Draine 산란 위상 함수를 따르는 무작위 수 결정

Henyey-Greenstein의 산란 위상 함수  $\phi_0(\theta)$ 와 Draine의 산란 위상 함수  $\phi_\alpha(\theta)$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}, \quad (1)$$

$$\phi_\alpha(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{1 + \alpha(1 + 2g^2)/3} \frac{1 + \alpha \cos^2 \theta}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}} \quad (2)$$

Henyey-Greenstein 위상 함수를 따르는 무작위 수(random number)  $\mu = \cos \theta$ 는 Witt (1977)의 방법을 따라 역변환(inversion) 방법을 통해 얻을 수

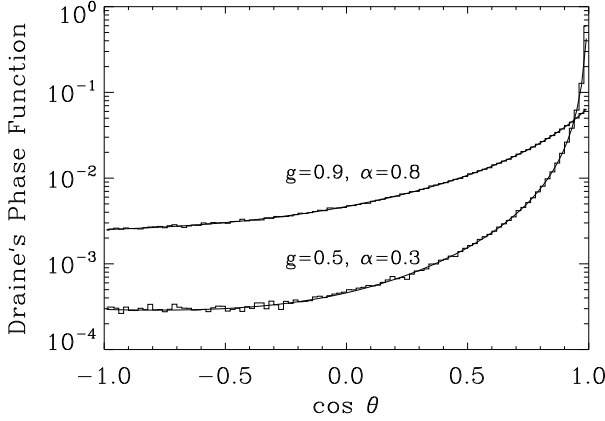


그림 1.— Draine의 산란 위상 함수를 따르는 무작위 수 생성. 실선은 Draine의 산란 위상 함수이고 히스토그램은  $10^6$ 개의 무작위 수를 생성한 후  $\cos\theta$ 의 구간별로 갯수를 세어 만든 히스토그램.

있다. Draine의 함수는 Henyey-Greenstein 함수에  $(1 + \alpha \cos^2 \theta)$ 가 곱해진 것이므로 Draine 함수를 따르는 무작위 수  $\mu$ 는 Rubinstein (1981)의 수락-거부(acceptance-rejection) 방법을 사용하여 다음과 같은 알고리즘을 따라 만들 수 있다.

1. 균일한 분포를 갖고  $0 \leq \xi \leq 1$ 을 만족하는 임의의 무작위 수  $\xi$ 를 생성한다.
2.  $\mu = \left\{ (1 + g^2) - \left[ (1 - g^2)/(1 - g + 2g\xi) \right]^2 \right\} / (2g)$ 을 계산하여 Henyey-Greenstein 함수를 따르는  $\mu = \cos\theta$ 를 계산한다.
3.  $f = (1 + \alpha\mu^2)/(2 + 2/3\alpha)$ 를 계산하고, 또 다른 균일한 분포를 갖는  $0 \leq \eta \leq 1$ 을 생성한다.
4.  $\eta \leq f$ 이면  $\mu$ 를 받아 들이고 그렇지 않으면 1번으로 다시 돌아간다.

이러한 알고리즘을 통해 구해진 Draine 확률 분포를 만족하는 무작위 수를 두 가지 경우에 대해  $10^6$  개씩 생성한 후 그림 1에서 나타냈으며, 그림에서 볼 수 있듯이 구해진 무작위 수가 Draine 분포 함수를 잘 따르고 있음을 알 수 있다.

### 3. Draine 함수의 $\alpha$ 및 $g$ 결정

Draine (2003)은 우리은하의 성간먼지 모델을 이용하여  $\langle \cos\theta \rangle$  및  $\langle \cos^2\theta \rangle$  값을 파장에 따라 구했다. 그가 성간먼지 모델을 통해 얻은 1차 및 2차 모멘트는 그림 2와 3에서 실선으로 나타내었다. 그런데, Draine의 산란 위상 함수는 두 개의 변수  $\alpha$ 와  $g$ 에 의해 결정되므로 주어

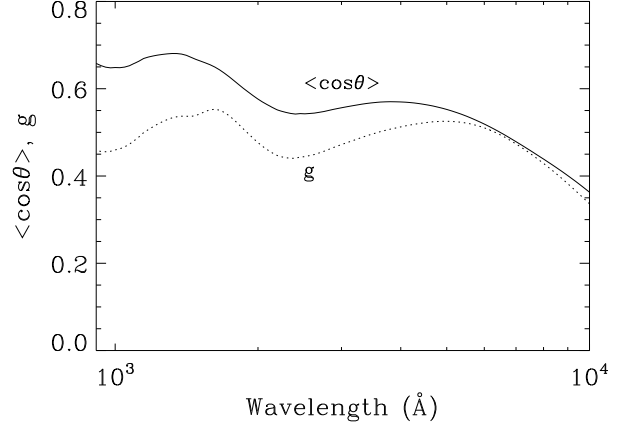


그림 2.— 성간먼지 모델을 통하여 Draine (2003)이 구한  $\langle \cos\theta \rangle$  값 및 Draine의 위상 함수에 근사시켜서 식 (12), (13), (14)를 이용하여 얻어지는  $g$  값.

진 1차 및 2차 모멘트 ( $\langle \cos\theta \rangle$  및  $\langle \cos^2\theta \rangle$ )으로부터  $\alpha$ 와  $g$ 를 결정할 수 있는 관계식이 필요하다. Draine 위상 함수의 1차 및 2차 모멘트는 그가 유도한 바와 같이 다음으로 주어진다.

$$\langle \cos\theta \rangle = g \frac{1 + \alpha(3 + 2g^2)/5}{1 + \alpha(1 + 2g^2)/3}, \quad (3)$$

$$\langle \cos^2\theta \rangle = \frac{1 + 2g^2 + (3\alpha/35)(7 + 20g^2 + 8g^4)}{3 + \alpha(1 + 2g^2)}. \quad (4)$$

이제, 두 개의 연립방정식을 풀어야 한다. 식 (3)을  $\alpha$ 에 대해 풀면 다음과 같다.

$$\alpha = \frac{15(\langle \cos\theta \rangle - g)}{3(3 + 2g^2)g - 5(1 + 2g^2)\langle \cos\theta \rangle}. \quad (5)$$

여기서 주의할 점은 Draine (2003)의 식 (A2)에 오류가 있어서 분자에 25로 되어 있는 것을 15로 수정해야 한다. 이 값을 식 (4)에 대입하면  $g$ 에 대한 다음과 같은 3차 방정식을 얻게 된다.

$$g^3 - \frac{17}{3}\langle \cos\theta \rangle g^2 + 7\langle \cos^2\theta \rangle g - \frac{7}{3}\langle \cos\theta \rangle = 0. \quad (6)$$

Draine (2003)은 위의 3차 방정식의 해를 제시하였으나, 실제 계산에 적용하기에는 무리가 있어서 실제 적용 가능한 해를 제공하고자 한다. 우선 다음의 변수들을 정의한다.

$$x \equiv g - \frac{17}{9}\langle \cos\theta \rangle, \quad (7)$$

$$p \equiv \frac{7}{3}\langle \cos^2\theta \rangle - \frac{289}{81}\langle \cos\theta \rangle^2, \quad (8)$$

$$q \equiv -\frac{119}{9}\langle \cos\theta \rangle\langle \cos^2\theta \rangle + \frac{9826}{729}\langle \cos\theta \rangle^3 + \frac{7}{3}\langle \cos\theta \rangle. \quad (9)$$

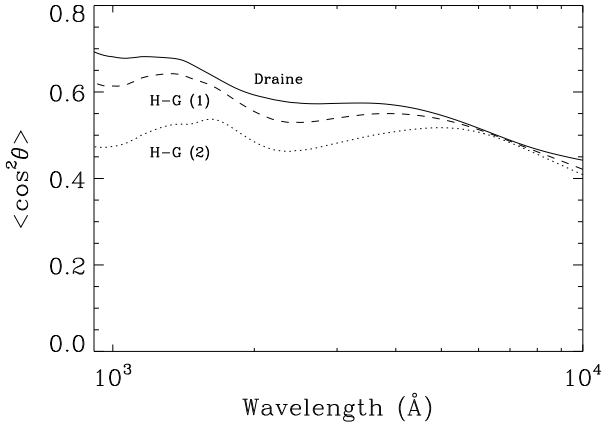


그림 3.— 성간먼지 모델을 통하여 얻어진  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  값 (Draine 2003). 식 (12), (13), (14)로부터 계산한  $g_1$ 을 이용하여 구한 Henyey-Greenstein 함수에 해당하는 2차 모멘트  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  (H-G (1))과 성간먼지 모델의 1차 모멘트  $g_2 = \langle \cos \theta \rangle$ 를 이용하여 구한 Henyey-Greenstein 함수의 2차 모멘트  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  (H-G (2)).

이때, Draine (2003)이 정의한 변수와는  $a = p$ ,  $b = -q/2$ 의 관계를 갖게 되며, 3차 방정식 (6)은 아래와 같은 간단한 형태가 된다.

$$x^3 + 3px = q. \quad (10)$$

이 방정식은 Birkhoff & Mac Lane (1997)에 의한 방법으로 풀면 편리하며 Seon (2006)에서도 설명되어 있다. 식 (10)을 풀기위해  $x = 2|p|^{1/2}y$  라고 정의하면 다음의 방정식을 얻게 된다.

$$4y^3 + 3\text{sgn}(p)y = \frac{q}{2|p|^{3/2}} \equiv Q \left( = -\frac{b}{|a|^{3/2}} \right). \quad (11)$$

만약  $p > 0$  ( $a > 0$ ) 이면  $4\sinh^3 \theta + 3\sinh \theta = \sinh(3\theta)$ 의 등식과  $\sinh^{-1}(x) = \ln[x + (x^2 + 1)^{1/2}]$  임을 이용하면 한개의 실수 해 (real solution)를 얻게 되고 Draine (2003)이 정의한 기호로 정리를 하면 다음과 같다.

$$x = \left( \sqrt{a^3 + b^2} - b \right)^{1/3} - \left( \sqrt{a^3 + b^2} + b \right)^{1/3}. \quad (12)$$

만약  $p < 0$  ( $a < 0$ ) 이고  $|Q| \geq 1$  ( $a^3 + b^2 \geq 0$ ) 이면,  $4(\pm \cosh \theta)^3 - 3(\pm \cosh \theta) = \pm \cosh(3\theta)$  과  $\cosh^{-1}(x) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 을 이용하여 다음의 실수 해를 얻는다.

$$x = -\text{sgn}(b) \times \left[ \left( |b| + \sqrt{a^3 + b^2} \right)^{1/3} + \left( |b| - \sqrt{a^3 + b^2} \right)^{1/3} \right]. \quad (13)$$

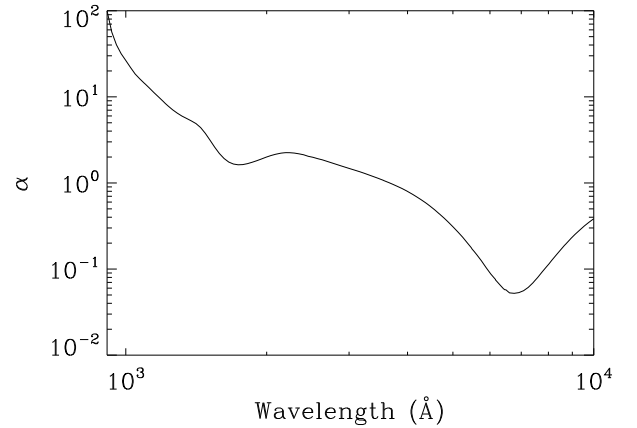


그림 4.— Draine 산란 위상 함수의 파장에 따른  $\alpha$  값.

여기서, 세제곱근 안의 수가 음수일 때  $(-|x|)^{1/3} = -|x|^{1/3}$ 이라고 가정하면 식(12), 식(13) 및 Draine의 식(B4)는 모두 동일한 식이 된다. 그러나, 실제로 공식을 적용하여 계산할 때는 식(12)와 식(13)과 같이 두 경우로 나누어서 계산하여야 한다. 또한, 음수의 세제곱근은 허수부(imaginary part)가 존재하는 복소수가 되기 때문에 Draine의 식(B4) 하나만으로는 엄밀한 의미에서 올바른 해라고는 보기 어렵다.

한편,  $p < 0$  ( $a < 0$ )이고  $|Q| \leq 1$  ( $a^3 + b^2 \leq 0$ )이라면  $4\cos^3 \theta - 3\cos \theta = \cos(3\theta)$ 의 관계식으로 부터  $n = 0, 1, 2$ 에 대해 3개의 실수 해를 얻는다.

$$x_n = 2|a|^{1/2} \cos \left( \frac{\cos^{-1} Q + 2n\pi}{3} \right). \quad (14)$$

이 경우 해가 3개인 것처럼 보이지만,  $|Q| = 1$  일 때, 식 (13)과 식 (14)가 동일해야 하므로  $0 \leq Q \leq 1$  일 때는  $n = 0$  이 유일한 해가 되고,  $-1 \leq Q \leq 0$  일 때는  $n = 1$  이 유일한 해가 된다. Draine의 식(B5)는  $n = 0$  인 경우에만 해당하므로 그의 공식은 모든 가능한 경우의 해는 아니다.

이러한 방법으로 구한  $x$  와  $g = x + \frac{17}{9} \langle \cos \theta \rangle$  관계식을 이용하여  $g$  를 구하고 식 (5)를 이용하여  $\alpha$ 를 구할 수 있다. 그림 2는 이러한 방법으로 구한  $g$  값을 보여주고 있으며, 그림 4는  $\alpha$  값을 보여준다.

#### 4. Draine 산란 위상 함수와 Henyey-Greenstein 산란 함수의 비교

Henyey-Greenstein 함수는 Draine 함수에서  $\alpha = 0$ 인 특별한 경우이므로 1차 및 2차 모멘트(moment)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle &= g_2, \\ \langle \cos^2 \theta \rangle &= \frac{1 + 2g_2^2}{3}. \end{aligned} \quad (15)$$

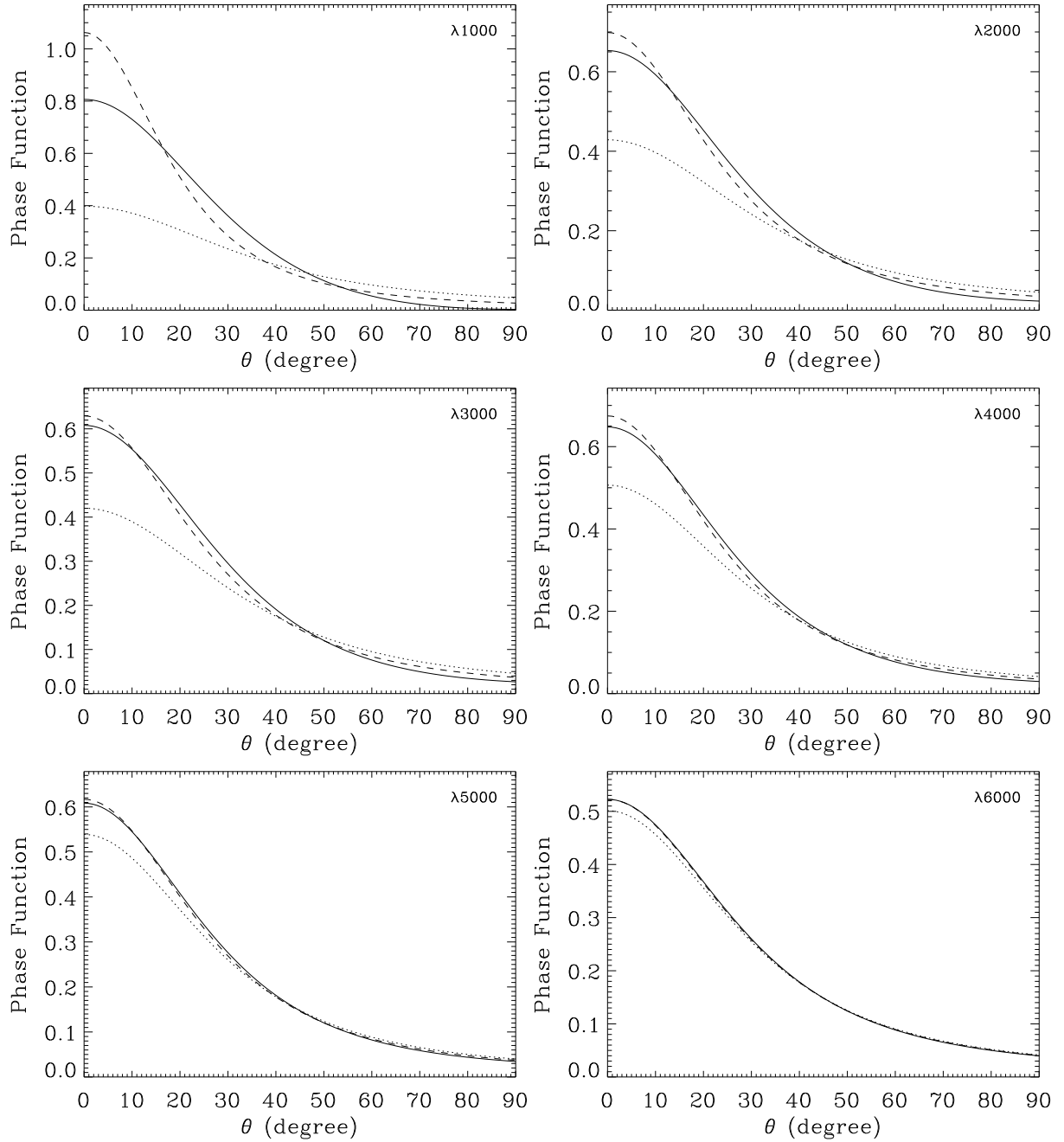


그림 5.— 다양한 파장에서의 위상함수의 비교. 실선은 Draine (2003)의 결과로 얻어진  $\phi_\alpha$  함수. 점선은 식 (12), (13), (14)를 통해 구해진  $g_1$  값으로부터 계산된 Henyey-Greenstein 함수. 파선은  $g_2 = \langle \cos \theta \rangle$  라고 놓고 계산한 Henyey-Greenstein 함수.

따라서, 앞 절에서 구한  $g$  및  $\alpha$  를 이용하여 Draine 산란 위상 함수와 Henyey-Greenstein 산란 위상 함수를 비교하기 위한 방법으로 2가지 가능성을 생각할 수 있다. 첫째는 앞 절에서 3차 방정식을 통해 구한  $g_1 = g$ 을 이용하여 Henyey-Greenstein 함수를 계산하는 것이고 두번째 방법은 성간먼지 모델로부터 얻어진 1차 모멘트

값을 직접 이용하여  $g_2 = \langle \cos \theta \rangle$  라고 놓고 함수를 계산하는 것이다.

그림 3은 2가지 방법으로 구한 Henyey-Greenstein 함수의 2차 모멘트값을 보여준다. 그림에서 알 수 있듯이 장 파장(long wavelength)에서는 2가지 방법 모두 성간먼지 모델을 통해 얻어진 2차 모멘트값과 매우 잘 일치

함을 알 수 있다. 따라서 장 파장에서는 어떤 방법을 이용하는 Draine 함수와 잘 일치함을 예상할 수 있다.

그림 5에서 6개의 파장에 대해 Draine 위상 함수를 실선으로 표시하였다. 또한, 비교를 위해  $g_1$ 을 이용하여 계산한 Henyey-Greenstein 함수는 점선으로,  $g_2$ 를 이용하여 계산한 Henyey-Greenstein 함수는 파선(dashed line)으로 나타내었다. 그림으로부터 알 수 있는 점은 식 (12), (13), (14)를 통해 얻어진  $g_1$  값을 이용하여 계산한 Henyey-Greenstein 위상 함수  $\phi_0$ 는 파장이 5000Å 이상에서나 Draine의 위상 함수와 잘 일치함을 알 수 있다. 반면에, 복잡한 계산을 거치지 않고 성간먼지 모델에서 구한 1차 모멘트만을 이용( $g_2$ )하여 계산한 Henyey-Greenstein 위상 함수는 비교적 파장이 짧은 파장( $\sim 2000\text{\AA}$ )에서도 Draine 함수와 잘 일치함을 볼 수 있다. 그러나, 이보다 더 짧은 파장에서는 두 가지 방법 모두 Draine 함수와는 판이하게 다른 모양을 보여준다.

## 5. 요약 및 결론

이 연구에서는 Draine이 고안한 함수를 몬테카를로 시뮬레이션할 수 있는 방법을 기술하였고, 성간먼지 모델에서 얻어지는 2개의 모멘트  $\langle \cos \theta \rangle$  및  $\langle \cos^2 \theta \rangle$ 으로부터 Draine 함수의 2개의 변수  $\alpha$ 와  $g$ 를 계산하기 위한 정확한 공식을 제시하였다.

또한, Draine 함수와 Henyey-Greenstein 함수를 비교하여 파장이 2000Å 이상이면 복잡한 공식을 사용하지 않고  $g = \langle \cos \theta \rangle$ 로 놓고 계산한 Henyey-Greenstein 함수로도 충분히 Draine 함수를 근사할 수 있음을 보였다. 그러나, 이보다 짧은 파장에서는 Henyey-Greenstein 함수로 근사시킬 수 없었다.

거의 모든 연구자들은 2000Å 미만의 파장에서도 Henyey-Greenstein 함수를 가정하고 복사전달 모델을 계산하였다 (예를 들어, Gordon 2004). 그러나, 이 연구의 결과로부터 2000Å에서는 실제 성간먼지의 산란 위상 함수를 Henyey-Greenstein 함수로 기술하기에는 무리가 있어 보인다. 따라서, 성간먼지 모델로부터 얻어지는 1, 2차 모멘트값과 확산 은하빛등의 모델로부터 얻어지는 위상 인자( $g$ )를 직접적으로 비교하는 것은 무리가 있으며, Henyey-Greenstein 함수를 이용한 연구가 실제 연구에 있어서 어느 정도의 오차를 줄지 더 자세한 연구가 필요하다.

## 참고문헌

- Birkhoff, G., & Mac Lane, S., 1997, A Survey of Modern Algebra, 5th ed. (New York: MacMillan), 90  
 Cornette, W. M., & Shanks, J. G., 1992, Physically reasonable analytic expression for the single-scattering phase function, Appl. Opt., 31, 3152

- Draine, B. T., 2003, Scattering by Interstellar Dust Grains. I. Optical and Ultraviolet, ApJ, 598, 1017  
 Gordon, K. D., 2004, Interstellar Dust Scattering Properties, ASP Conference Series, 309, 77  
 Rubintein, R. Y., 1981, Simulation and the Monte Carlo Method, (New York: John Wiley), 45  
 Seon, K.-I., 2006, Monte Carlo Modeling of Compton-Scattering Angles in a Mildly Relativistic Plasma, PASJ, 58, 439  
 Witt, N. A., 1977, Multiple Scattering in Reflection Nebulae. I. A Monte Carlo Approach, ApJS, 35, 1