한국해안 · 해양공학회논문집
제 20 권 제 6 호, pp. 553~563, 2008년 12월

변분근사식과 연계된 산란체법에 의한 파랑변형 계산
Computation of Wave Propagation by Scatter Method Associated with Variational Approximation

서승남*
Seung-Nam Seo*

요 지 : 만일 임의의 지형을 다수의 계단으로 근사하면 이 지형 위를 지나는 선형 파랑의 변형을 계산하기 위해 변분근사법과 고유함수 전개법을 사용할 수 있다. 본 논문에서는 반사율과 투과율을 계산하기 위해 변분근사식과 연계된 산란체법을 제시하였다. 본 기법은 O'Hare and Davies의 변환행렬 축차법보다 간단하고 직접적인 방법임을 보였다. 또한 수 개의 수치실험을 실시하여 기존 결과와 거의 같은 결과를 얻었다.

핵심용어 : 파랑변형, 고유함수 전개법, 변분근사법, 산란체법, 변환행렬 축차법

Abstract : If an arbitrary topography is approximated to a number of vertical steps, both variational approximation and eigenfunction expansion method can be used to compute linear wave transformation over the bottom. In this study a scatterer method associated with variational approximation is proposed to calculate reflection and transmission coefficients. Present method may be shown to be more simple and direct than the successive-application-matrix method by O'Hare and Davies. And Several numerical examples are given which are in good agreement with existing results.

Keywords : wave transformation, eigenfunction expansion method, variational approximation, scatterer method, successive-application-matrix method

1. 서 론

지형에 의한 선형 파랑변형은 다양한 방법으로 계산할 수 있으며 파랑변형의 지배방정식으로 Laplace을 사용하는 방법과 이를 수심 적분한 완경사 파랑식을 사용하는 경우도 있다. 비록 계산 기법은 다양한 방법을 사용할 수 있지만 변형의 특성인 반사율과 투과율을 계산한 기존 결과를 비교하면 이들의 차이는 그리 크지 않다. 따라서 계산기법의 효율성과 정밀성이 관건이 되며 본 논문에서는 이에 대한 방법을 기술하고자 한다.

완경사 파랑식에 의한 사면계단 지형과 연안사주 지형에 대한 파랑변형의 연구 결과를 분석하면 이는 해저경사와 해저곡률 항이 추가된 수정 완경사 파랑식의 결과에 비해 상당히 부정확하다(Massel, 1993; Chamberlain and Porter, 1995, Suh et al., 1997; Porter, 2003, 서, 2007 등). 이 가운데 Massel과 Porter and Staziker(1995)는 억류파를 포함하는 확장된 식을 제시하였다.

단일 계단지형에서는 고유함수 전개법(Takano, 1960; Kirby and Dalrymple 1983) 또는 변분근사법(Miles, 1967)을 이용하여 Laplace방정식의 해를 구할 수 있다. 이 경우 지배방정식으로 Laplace식을 사용함으로 미분방정식에는 근사항이 포함되지 않으나 수치계산을 위해 억류파의 개수를 유한개로 정하게 되며 억류파의 개수에 따른 수렴은 비교적 빠르다. 서(2008b)는 단일 계단지형에 대한 고유함수 전개법(EFEM)과 변분근사법(VAM)의 수치해의 특성을 비교하여 이 두 방법의 수렴속도는 거의 비슷함을 보였다.

임의지형을 다수의 작은 계단으로 근사하여 EFEM과

*한국해양연구원 연안개발·에너지연구부 책임연구원(Coastal Engineering & Ocean Energy Research Department, KORDI, Ansan PO. Box 29, Seoul 425-600, Korea. snseo@kordi.re.kr)

VAM으로 파랑변형 계산에 대한 기존 연구도 상당수에 이른다. EFEM은 한 개의 억류파와 진행파의 개수를 더한 수에 구성 계단의 개수를 곱한 만큼의 연립방정식이 만들어져 구성 계단의 수가 증가하면 계산시간과 기억용량이 급격히 증가하게 된다. 따라서 임의 지형에 대해 EFEM으로 해를 구하는 경우에는 제약이 있으나 구한 해는 인접 계단에서 생성되는 억류파의 영향을 고려하기 때문에 비교적 정확하게 반사율과 투과율을 계산할 수 있다(Guazzelli et al., 1992; 조·이, 1998; Bender and Dean, 2003).

만일 인접 계단에서 생성되는 억류파의 영향이 작은 경우 단일 계단에 억류파를 포함한 해를 구하고 인접 계단 간의 억류파의 영향을 무시하여 해를 구하는 산란체법(서, 2008a)이 제시되었다. 산란체법은 내부 계단에서 생성되는 반사파와 투과파의 상호작용에 근거한 기법이기 때문에 EFEM, VAM에도 동일하게 적용할 수 있다. 본 논문에서는 계산의 효율을 높이기 위해 구성 단일계단에 대해 VAM으로 해를 구하고 이에 산란체법을 적용하여 주어진 지형에 대한 반사율과 투과율을 계산하고자 한다.

산란체법과 유사한 방법인 변환행렬 축차법은 Devillard et al.(1988)에 의해 제안되었다. 여기서 변환행렬은 Miles의 변분근사식을 축차적으로 적용하기 위해 변형한 것으로 해는 본질적으로 VAM 결과와 동일하다. O'Hare and Davies(1992, 1993)은 변환행렬의 억류파를 무시한 즉 Plane-wave 근사해에 축차법을 적용하여 연안사주 지형에 대한 반사율을 계산하였다. 본 논문에서는 O'Hare and Davies이 분석한 파랑변형 결과가 제한된 실험에 의한 것이기 때문에 그들의 결론은 항상 성립하지 않으며 보다 정밀한 계산을 위해서는 인접 계단의 억류파 영향이 고려되어야 함을 또한 보이고자 한다.

제 2절에서는 본 논문의 수치모형인 변분근사식과 산란체법을 간략히 요약하였다. 그리고 제 3절에서는 사면 계단지형과 연안사주 지형에 대한 반사율과 투과율에 대한 본 수치실험 결과와 기존 결과를 비교분석하였다.

2. 변분근사식과 산란체법

임의 지형 위를 지나는 파랑의 변형은 속도포텐셜 ϕ의 Laplace 미분식으로 나타낼 수 있다. 좌표계의 x축은 정지해면 상에 위치하고 z축은 해면상에서 상향을 양의 방향으로 y축은 오른손 좌표계 정의에 따른 방향을 각각 양으로 정한다. 그리고 y방향에 대한 지형 변화율이 없는 것으로 가정한다.

각주파수 ω인 단주기 선형파랑이 입사각 θ_I로 사각 입사하는 경우를 대상으로 한다. 이 가정아래서는 y방향 파수(b)가 일정하기 때문에 시간성분과 y방향 성분 $\exp(iby-i\omega t)$을 분리한 속도포텐셜을 사용할 수 있다. 그러면 선형 경계치 문제는 식 (1)로 나타낼 수 있다.

$$\phi_{xx}+\phi_{zz}-b^2\phi = 0, \quad -h<z<0 \tag{1a}$$

$$\phi_z-\frac{\omega^2}{g}\phi = 0, \quad z = 0 \tag{1b}$$

$$\phi_z = 0, \quad z = -h \tag{1c}$$

$$\phi_x = 0\text{, 계단의 직벽에서} \tag{1d}$$

여기서 h는 수심, g는 중력가속도이다. 좌우 양단 구역에서 속도포텐셜의 크기가 한정되어야 하기 때문에 방사조건이 부가된다. 본 절에서는 임의의 지형을 다수의 계단으로 근사하여 각 구성 계단에서 변분근사식으로부터 구한 속도포텐셜의 진폭을 계산하고 이를 산란체법을 이용하여 모사된 복합 계단에 대한 반사율과 투과율을 계산하는 식을 기술하고자 한다.

2.1 구간 i에서의 변분근사식

계단지형의 x_i은 i번째 지형 경계선의 좌표이고 x_{i-1}과 x_i 구간으로 표현되는 구역 i에서는 수심이 일정하기 때문에 변수분리법을 사용할 수 있다. 이로부터 얻어지는 고유함수로 속도포텐셜을 전개할 수 있고 고유함수를 해면조건에 대입하면 식 (2)로 표현되는 파랑분산식을 얻는다.

$$\begin{gathered}\omega^2 = gk_{i,0}\tanh k_{i,0}h_i = -gk_{i,j}\tan k_{i,j}h_i \\ a_{i,0} = \sqrt{k_{i,0}^2-b^2},\, a_{i,j} = \sqrt{k_{i,j}^2-b^2}\end{gathered} \tag{2}$$

식 (2)의 첫 식의 우변 첫 항은 진행파에 대한 것으로 파수는 하나만 존재하나 억류파인 둘째 항으로부터 계산되는 파수는 무한개이며 $a_{i,n}$(n=0,1,...)는 x방향의 파수이다. 억류파의 개수를 N으로 절단하고 표준 기저함수(normalized basis function) $\chi_{i,n}$(n=0,1,2,...)를 사용하여 진행파와 억류파를 중첩한 속도포텐셜은 식 (3a)가 된다.

$$\begin{cases}\phi_i = (p_i^+e^{ia_{i,0}x}+p_i^-e^{-ia_{i,0}x})\chi_{i,0}(z)+ \\ \quad \sum_{j=1}^{N} s_{i,j}^-e^{a_{i,j}(x-x_i)}\chi_{i,j}(z), x_{i-1}\le x\le x_i \\ \phi_{i+1} = (p_{i+1}^+e^{ia_{i+1,0}x}+p_{i+1}^-e^{-ia_{i+1,0}x})\chi_{i+1,0}(z)+ \\ \quad \sum_{j=1}^{N} s_{i+1,j}^+e^{-a_{i+1,j}(x-x_i)}\chi_{i+1,j}(z), x_i\le x\le x_{i+1}\end{cases} \tag{3a}$$

$$\chi_{i,0}(z) = \frac{\sqrt{2}\cosh k_{i,0}(z+h_i)}{\sqrt{h_i + \frac{g}{\omega^2}\sinh^2 k_{i,0} h_i}} \quad \chi_{i,j}(z) = \frac{\sqrt{2}\cos k_{i,j}(z+h_i)}{\sqrt{h_i - \frac{g}{\omega^2}\sin^2 k_{i,j} h_i}} \tag{3b}$$

식 (3a)에서 미지상수 p의 위첨자 +는 양의 방향, -는 음의 방향으로 각각 진행하는 파랑을 의미하고 미지상수 s는 경계선 부근에 억류된 파랑을 의미한다.

파랑변형의 해를 구하는 문제는 식 (3a)의 미지상수를 구하는 문제로 바뀌고 이들은 경계선 x_i에서의 정합조건 식 (4)로부터 얻을 수 있다. 여기서 x방향 유속 U_i는 식 (4b)와 같이 정의한다.

$$\phi_i(x_i, z) = \phi_{i+1}(x_i, z) \tag{4a}$$

$$U_i(x_i, z) \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi_{i+1}}{\partial x}, & -\min(h_i, h_{i+1}) \le z \le 0 \\ 0, & -\min(h_i, h_{i+1}) \le z \le -\min(h_i, h_{i+1}) \end{cases} \tag{4b}$$

식 (4)의 조건을 이용하여 미지상수를 구하는 방법에는 Kirby and Dalrymple(1983)의 고유함수 전개법과 Miles (1967)의 변분근사법이 있다. 고유함수 전개법은 식 (3)을 식 (4)에 대입하여 구성된 연립방정식을 풀기 때문에 유도과정이 비교적 단순하다. 이에 반하여 변분근사법은 억류파를 소거하고 진행파만을 대상으로 연립방정식을 구성하기 때문에 해석적인 해를 구할 수 있으나 유도과정이 상대적으로 복잡하다.

본 논문에서는 서(2008b)가 구한 변분근사법의 해를 이용하고자 하며 유도과정의 주요 사항만을 정리한다. U_i를 이용하여 억류파를 소거한 후 식 (4a)의 조건을 이용하면 진행파 미지상수와 U_i를 포함하는 식을 얻는다. 진행파 성분으로 U_i를 나타내기 위해 식 (5)와 같이 경계선 좌우에 대한 미지함수 $u_{i,1}$와 $u_{i,2}$를 도입하여 가정한다.

$$U_i(z) \equiv (p_i^+ e^{i a_{i,0} x_i} + p_i^- e^{-i a_{i,0} x_i}) u_{i,1}(z) + (p_{i+1}^+ e^{i a_{i+1,0} x_i} + p_{i+1}^- e^{-i a_{i+1,0} x_i}) u_{i,2}(z) \tag{5}$$

이 식을 위에서 얻은 조건식에 대입하여 $u_{i,j}$와 $\chi_{j,0}$의 곱에 대한 적분을 변분형태 식으로 변형한다. 마지막 조건식 (4b)로부터 2원 1차 연립방정식을 구성하고 $u_{i,j}$를 식 (6)과 같이 가정한다.

$$u_{i,j}(z) = c_{i,j}\chi_{m,0}(z), \ (j = 1, 2) \tag{6}$$

여기서 기저함수의 첨자 m은 경계 x_i의 좌우측 수심 가운데 낮은 수심의 구역 번호이다. 그리고 $c_{i,j}$는 미지상수이나 변분형태 식에 대입하면 상쇄되어 해에는 영향을 주지 않는다. 식 (6)의 가정으로부터 연립방정식은 기저함수의 변분적분과 위상함수로 행렬이 만들어져 진행파 성분에 대한 미지상수를 구할 수 있다.

연립방정식의 해는 수심 조건에 따라 구분하여 나타내는 것이 편리하며 $h_i \le h_{i+1}$의 경우에는 식 (7)로 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} p_i^- \\ p_{i+1}^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_i^+ & T_i^- \\ T_i^+ & R_i^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i^+ \\ p_{i+1}^- \end{Bmatrix} \tag{7}$$

식 (7)에서 복소수인 포텐셜 반사율 R_i와 투과율 T_i는 식 (8a)가 되며 관련된 변수는 식 (8b)로 정의한다.

$$\begin{aligned} R_i^+ &= \frac{N_{i,1}^2 - 1 - iX_{i,1}}{N_{i,1}^2 + 1 - iX_{1,1}} e^{2 i a_{i,0} x_i} \\ T_i^+ &= \frac{2N_{i,1}/\lambda_{i,1}}{N_{i,1}^2 + 1 - iX_{i,1}} e^{i(a_{i,0} - a_{i+1,0})x_i} \\ T_i^- &= \frac{2N_{i,1}\lambda_{i,1}}{N_{i,1}^2 + 1 - iX_{i,1}} e^{i(a_{i,0} - a_{i+1,0})x_i} \\ R_i^- &= \frac{1 - N_{i,1}^2 - iX_{i,1}}{N_{i,1}^2 + 1 - iX_{i,1}} e^{-2 i a_{i+1,0} x_i} \end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{cases} \lambda_{i,1} = \sqrt{\dfrac{a_{i+1,0}}{a_{i,0}}} \\ \lambda_{i,1} N_{i,1} = \int_{-h}^{0} \chi_{i,0}(z)\chi_{i+1,0}(z)dz \\ X_{i,1} = a_{i,0} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{\left(\int_{-h_i}^{0} \chi_{i,0}(z)\chi_{i+1,j}(z)dz\right)^2}{a_{i+1,j}} \end{cases} \tag{8b}$$

한편 $h_i > h_{i+1}$의 경우 포텐셜 반사율과 투과율은 식 (9a), 관련된 변수는 식 (9b)가 된다.

$$\begin{aligned} R_i^+ &= \frac{1 - N_{i,2}^2 - iX_{i,2}}{N_{i,2}^2 + 1 - iX_{i,2}} e^{2 i a_{i,0} x_i} \\ T_i^+ &= \frac{2N_{i,2}\lambda_{i,2}}{N_{i,2}^2 + 1 - iX_{i,2}} e^{i(a_{i,0} - a_{i+1,0})x_i} \\ T_i^- &= \frac{2N_{i,2}/\lambda_{i,2}}{N_{i,2}^2 + 1 - iX_{i,2}} e^{i(a_{i,0} - a_{i+1,0})x_i} \\ R_i^- &= \frac{N_{i,2}^2 - 1 - iX_{i,2}}{N_{i,2}^2 + 1 - iX_{i,2}} e^{-2 i a_{i+1,0} x_i} \end{aligned} \tag{9a}$$

$$\begin{cases} \lambda_{i,2} = \sqrt{\dfrac{a_{i,0}}{a_{i+1,0}}} \\ \lambda_{i,2} N_{i,2} = \int_{-h_{i+1}}^{0} \chi_{i,0}(z)\chi_{i+1,0}(z)dz \\ X_{i,2} = a_{i+1,0}\sum_{j=1}^{N} \dfrac{\left(\int_{-h_{i+1}}^{0} \chi_{i+1,0}(z)\chi_{i,j}(z)dz\right)^2}{a_{i,j}} \end{cases} \tag{9b}$$

2.2 산란체법

서(2008a)가 보인 바와 같이 산란체법은 지형과 파랑의 상호작용에 근거한 진행파만의 근사해를 얻게 된다. 여기서의 진행파는 설정된 산란체에서 억류파를 고려하여 구한 진행파를 의미함으로 통상의 진행파 근사식(Plane-wave approximation)보다는 포괄적인 의미를 갖는다. 또한 산란체법은 산란체 좌우에서 입사하는 파랑을 대상으로 하기 때문에 변분근사식과는 아주 잘 부합된다.

변분근사식의 경우 산란체 좌우에서 입사하는 파랑의 속도포텐셜인 식 (7)의 p_i^+와 p_{i+1}^-를 입력 자료로 사용하면 -x 방향으로 진행하는 미지수 p_i^-, +x 방향으로 진행하는 미지수 p_{i+1}^+를 해석적으로 얻게 된다. 이를 i개로 구성된 다수의 산란체에 적용하면 포텐셜 복소 반사율과 투과율은 식 (10)이 된다.

$$\begin{cases} R_{s,i}^+ = R_{s,i-1}^+ + \dfrac{T_{s,i-1}^+ R_i^+ T_{s,i-1}^-}{1 - R_i^+ R_{s,i-1}^-}, T_{s,i}^+ = \dfrac{T_{s,i-1}^+ T_i^+}{1 - R_i^+ R_{s,i-1}^-} \\ R_{s,i}^- = R_i^- + \dfrac{T_i^- R_{s,i-1}^- T_i^+}{1 - R_{s,i-1}^- R_i^+}, T_{s,i}^- = \dfrac{T_i^- T_{s,i-1}^-}{1 - R_{s,i-1}^- R_i^+} \end{cases}, \ i \geq 2 \tag{10}$$

한 개의 산란체의 경우(i=1)에는 단일 계단에서 구한 변분근사해인 식 (11)이 되고 M개의 산란체의 경우에는 식 (10)을 이용하여 축차적으로 구해 최종 포텐셜 반사율과 투과율을 구한다.

$$\begin{cases} R_{s,1}^+ = R_1^+, \ T_{s,1}^+ = T_1^+ \\ R_{s,1}^- = R_1^-, \ T_{s,1}^- = T_1^- \end{cases} \tag{11}$$

만일 내부 경계선이 M개로 구성된 복합계단 지형에서 최종 반사율과 투과율을 구하기 위해서는 모든 구성 산란체에 대한 포텐셜 반사율(R_i^+, R_i^-)과 투과율(T_i^+, T_i^-)을 먼저 구한 뒤에 식 (10)을 이용한다. 그리고 최종 포텐셜 반사율과 투과율을 이용하여 물리변수인 반사율(K_R^+, K_R^-)과 투과율(K_T^+, K_T^-)는 식 (12a)가 된다.

$$K_R^+ = \left|R_{s,M}^+\right|, K_T^+ = \left|T_{s,M}^+\right| \frac{\sqrt{I_{1,1}}\cosh k_{M+1,0} h_{M+1}}{\sqrt{I_{M+1,M+1}}\cosh k_{1,0} h_1} \tag{12a}$$

$$K_R^- = \left|R_{s,M}^-\right|, K_T^- = \left|T_{s,M}^-\right| \frac{\sqrt{I_{M+1,M+1}}\cosh k_{1,0} h_1}{\sqrt{I_{1,1}}\cosh k_{M+1,0} h_{M+1}}$$

$$I_{i,j} = \int_{-h_i}^{0} \cosh k_{i,0}(h_i + z)\cosh k_{j,0}(h_i + z)dz \tag{12b}$$

식 (12a)는 서(2008b)가 보인 바와 같이 에너지 보존식을 만족하며 이를 수치실험에서도 확인하였다.

3. 수치실험

제 2절에서 기술한 반사율과 투과율을 계산하기 위해 사면경사 지형과 연안사주 지형을 다수의 복합계단으로 구성하였다. 연안사주 지형은 사주의 형태가 동일한 경우와 두 개의 사주가 중첩된 경우를 대상으로 하였다.

3.1 사면경사 지형

수치실험 대상은 Booij(1983)의 사면계단으로 입사구역의 수심은 0.6 m, 투과구역은 0.2 m이고 사면의 폭(또는 경사 S)은 변수이다. 주기는 2초로 상대수심 조건(kh)은 0.4644 ~0.8648로 전이구역에 해당하며 직교입사의 경우이다.

Booij의 사면계단 지형을 100개의 계단으로 구성하여 Plane-wave 근사해를 산란체법과 연계한 수치해(SPA), 변분근사해를 산란체법과 연계한 수치해(SVM) 그리고 고유함수 전개법 수치해(EFEM)를 그림에 나타내었다. EFEM은 2200개의 미지수에 대한 연립방정식을 풀어 계산한 결과로 인접 계단에서 생성된 억류파의 영향을 고려한 것이다. SPA는 SVM에서 억류파를 무시한(N=0) 결과와 동일하고 SVM은 억류파를 포함하나 산란체법을 사용함으로써 억류파의 영향을 부분적으로 반영하게 된다(서, 2008a).

위의 결과에서 SPA와 SVM은 약간의 차이가 있으나 본 해상도에서는 차이를 알 수 없을 만큼 같다. 이는 구성계단의 수가 충분히 많으면 SPA와 SVM의 결과는 거의 같게 됨을 의미한다. 그러나 억류파를 고려한 EFEM과 SVM의 실험결과는 경사가 급한 S<4의 경우에서 약간의 차이를 보인다.

본 결과에서 사면계단 지형의 폭이 0으로 접근하는 거의 직벽인 경우 구성 계단의 폭이 좁아지며 따라서 계단의 단차(Δh)가 작더라도 억류파의 영향은 무시할 수 없음을 보여준다. 이는 O'Hare and Davies(1992)의 분석 즉 $\Delta h/h \leq 0.01$을 만족하면 변환행렬법 수치해는 엄밀해와 거

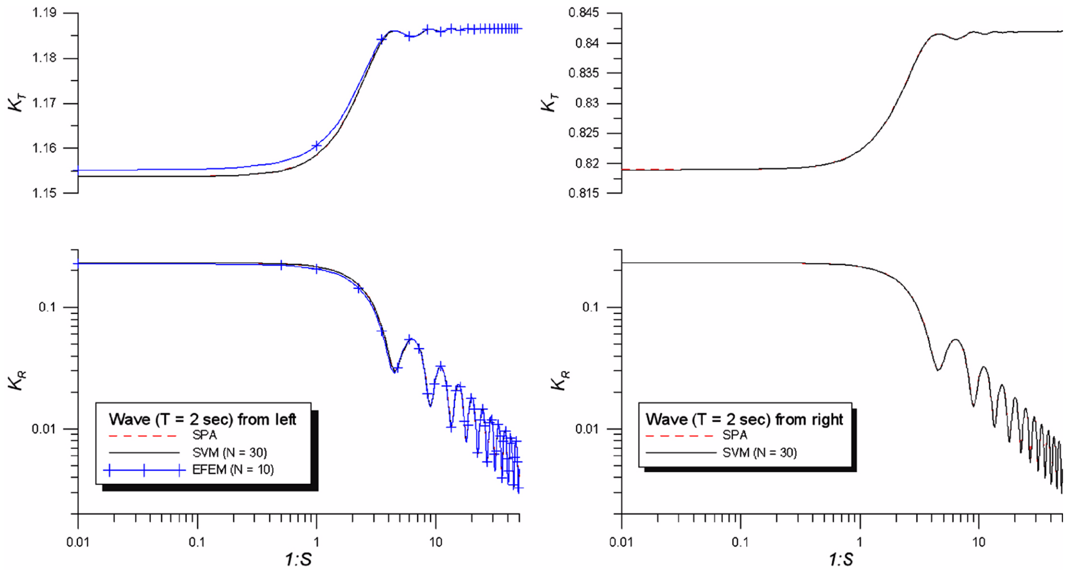

Fig. 1. Results from 100 small steps approximating Booij's ramp (h_1=0.6 m, h_{101}=0.2 m).

의 같다는 결론은 제한적인 실험에 의한 것임을 시사한다.

Fig. 1의 좌측 그림은 입사파랑이 좌측에 존재하는 경우인 반면 우측 그림은 우측 입사파랑에 대한 반사율과 투과율을 나타낸 것이다. 본 결과에 계산된 값들을 분석하면 좌우측 입사파랑에 관계없이 반사율은 같다. 그러나 투과율은 cosh kh의 비로 인해 입사파의 조건이 같더라도 이 비율이 달라져 값은 상이하나 형상은 같게 된다.

Fig. 1의 계산결과에 대한 차이를 더 살피기 위해 이 사면계단 지형의 극한인 사면경사가 0인 경우인 단일 계단 지형에 대한 각 방법의 수렴성을 검토하였다. 서(2008b)에 따르면 VAM과 EFEM은 수렴정도는 거의 대등하나 조건에 따라 수렴된 값에는 약간의 차이가 생길 수 있다. Table 1에 억류파의 개수에 따른 반사율과 투과율은 나타내었고 이로부터 반사율은 0.2283로, 투과율은 1.1552로 각각 수렴하는 것으로 보이고 EFEM의 반사율은 평균보다 높은 것으로 분석된다.

Fig. 2에는 VAM 억류파의 개수를 30개로 고정하고 계단의 개수에 따른 반사율과 투과율의 계산결과를 나타내었다. 구성 계단의 수가 30개인 경우 즉 사면계단이 폭이 넓을 때 반사율에 차이를 보이나 이 차이는 log plot이므로 그리 크다 할 수는 없다. 구성 계단의 수가 50개에 대한 계산도 이루어졌으나 100개와 거의 같아 생략하였고 따라서 구성 계단이 50개 이상이면 수렴하는 것으로 보인다. 그림에서 채운 원은 Suh et al.(1997)에서 독취한

Table 1. Computed results by different number of evanescent modes for the limiting case of Booij's ramp

N	VAM		EFEM	
	K_R	K_T	K_R	K_T
2	0.22618	1.15584	0.22623	1.15583
10	0.22790	1.15536	0.22833	1.15524
50	0.22807	1.15532	0.22861	1.15517
100	0.22808	1.15532	0.22863	1.15516

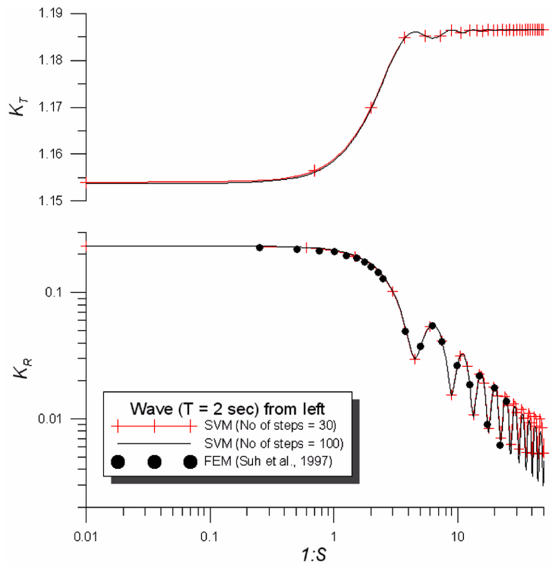

Fig. 2. Results(N=30) from different number of steps approximating Booij's ramp.

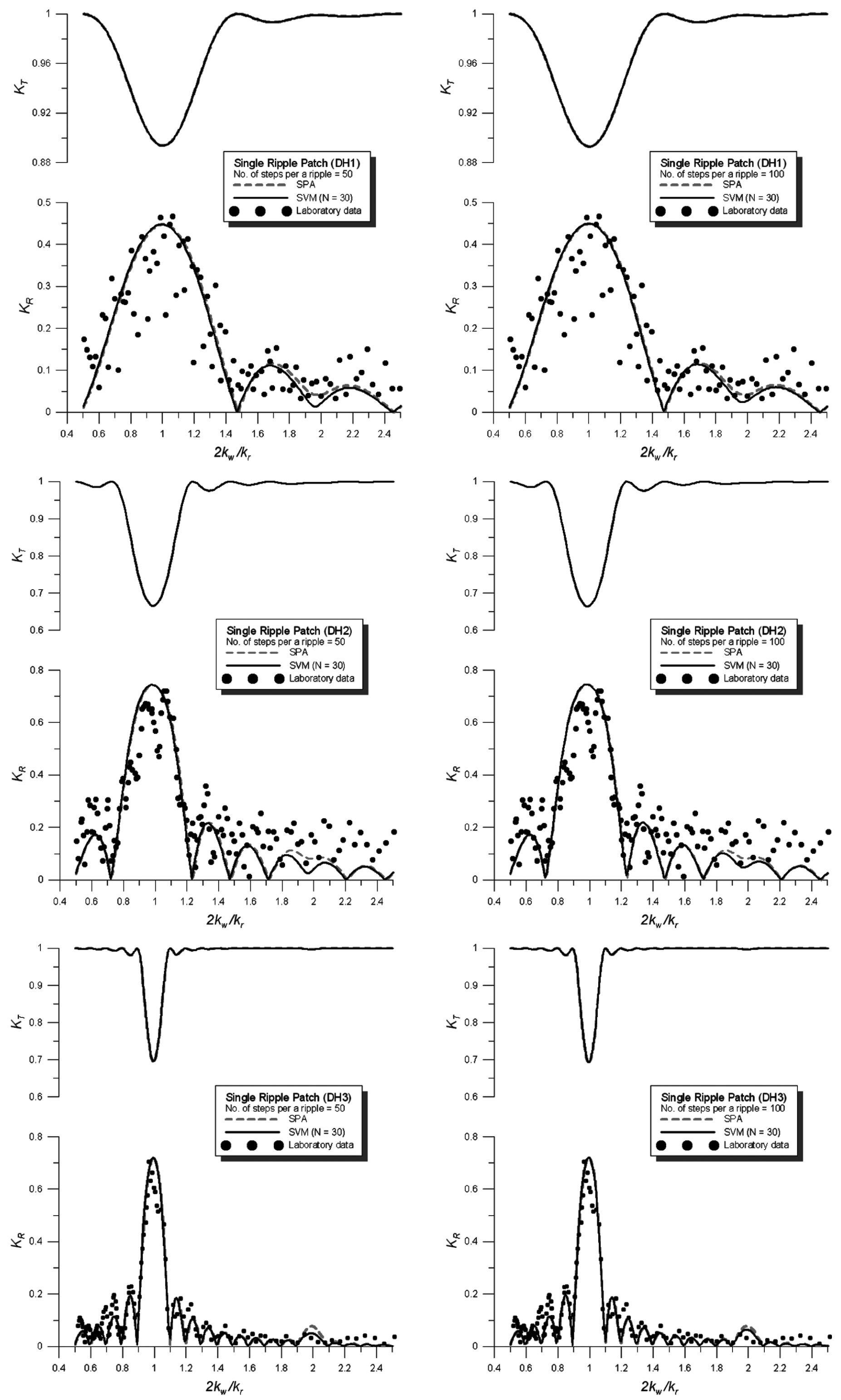

Fig. 3. Results from different number of steps approximating a single ripple patch by Davies and Heathershaw(1984).

FEM의 결과이며 본 결과와 거의 같다.

사면계단은 경사(1:S)가 정해지면 구성계단의 폭과 단차의 비는 개수에 따라 변하지 않고 일정한 특성을 갖는다. 즉 계단의 단차와 폭은 일정한 비율을 유지하나 구성계단의 수가 증가함에 따라 폭도 함께 감소하게 된다. 특히 S가 1보다 작으면 이 폭은 단차보다 작고 Fig. 1의 수치실험 결과로부터 억류파의 영향을 무시할 수 없다.

3.2 연안사주 지형

Davies and Heathershaw(1984)는 식 (13)으로 표현되는 하나의 정현파 지형으로 구성된 연안사주에 의한 파랑변형 수리실험을 수행하였다. 그리고 본 수치실험에 사용된 그들의 실험조건을 Table 2에 나타내었다. 여기서 h_0는 일정 수심을, x_r은 연안사주가 존재하는 길이를 그리고 A와 λ는 정현파 지형의 진폭과 파장을 각각 의미한다.

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & x \le 0 \\ h_0 - A\sin(2\pi x/\lambda), & 0 \le x \le x_r \\ h_0, & x \ge x_r \end{cases} \tag{13}$$

Fig. 3에는 Table 2의 제원을 이용하여 본 모형으로 계산한 반사율과 투과율을 나타내었다. 횡축 변수 k_w는 입사파랑의 파수, k_r은 사주의 파수이며 억류파의 개수를 0(점선)과 30(실선)개로 각각 설정한 결과이고 채운 원은 수리모형 실험결과이다. 수리모형 실험의 결과와 본 결과는 대체적으로 일치하며 특히 반사율이 가장 큰 부근의 결과는 반사율이 작은 부분에 비해 보다 접근된 경향을 보인다. 본 수리실험에서 파랑 에너지를 흡수하기 위해 설치한 해변으로부터 반사율이 0.1 정도인 것으로 알려졌다. 이와 수리실험에서는 측정치의 변동이 상존하기 때문에 반사율이 낮은 경우에는 이를 감안하여 해석할 필요가 있다. 또한 본 결과는 기존 결과들과도 거의 일치하나 억류파의 영향을 부분적으로 고려하기 때문에 이로 인한 차이가 발생할 수 있다.

Fig. 3의 해상도에서는 분명하지 않으나 계산한 결과를 분석하면 계단의 개수가 증가하면 Plane-wave 근사해의 반사율은 약간 증가하나 SVM은 부분 감소 또는 증가로 인해 SPA와의 차이가 작아진다. 특히 $2k_w/k_r \approx 2$ 에서는 SVM의 반사율은 상당히 증가하는 반면에 SPA 반사율은 감소하여 차이가 뚜렷이 작아진다. 계단의 개수가 증가함에 따른 실험의 전반적인 경향은 SPA와 SVM 해의 차이가 감소함을 보인다.

Table 2. Experimental setup of Davies and Heathershaw(1984)

Case	A(cm)	λ(cm)	x_r(cm)	h_0(cm)
DH1	5	100	200	15.6
DH2	5	100	400	15.6
DH3	5	100	1000	31.3

이론상 $2k_w/k_r \approx 2$ 부근에 반사율의 2번째 증폭이 발생해야 되나 사주가 2개와 4개로 구성된 지형에서의 수리모형 결과에서는 이것이 뚜렷하지 않다. 한편 이 경우 Kirby (1986)의 반사율은 오히려 0에 근접한다. 반면에 O'Hare and Davies(1992, 1993)의 결과는 본 SVM 결과보다는 SPA 결과와 유사하며 $2k_w/k_r \approx 2$ 에서 반사율은 0보다 큰 값을 보이기 때문에 그들의 모형이 보다 우수하다고 평가하였다.

조·이(1998)는 사주 4개인 지형을 800개의 계단으로 구성하고 고유함수 전개법을 이용하여 반사율을 구하였다. 억류파의 개수가 0인 결과는 본 SPA와 비슷하나 $2k_w/k_r \approx 2$ 에서 억류파 4개의 반사율은 0으로 근접한다. 이와 비교하기 위해 본 논문에서는 401개의 계단으로 구성된 지형에 EFEM을 사용하여 $2k_w/k_r \approx 2$ 에서 계산한 반사율은 조·이의 결과와 유사하다. Fig. 4에 사주 4개의 지형에 대한 반사율을 나타내었고 본 EFEM의 계산시간은 약 30시간이 소요되었다. 또한 기억용량도 매우 크기 때문에 억류파의 개수를 늘리는 실험은 시도하지 않았다.

기존 결과를 분석하면 사주의 개수가 2개와 4개인 경우에 2차 증폭은 1차 증폭에 비해 상당히 작다. 그러나 2차 증폭인 $2k_w/k_r \approx 2$ 에서의 반사율은 수정 완경사 파랑

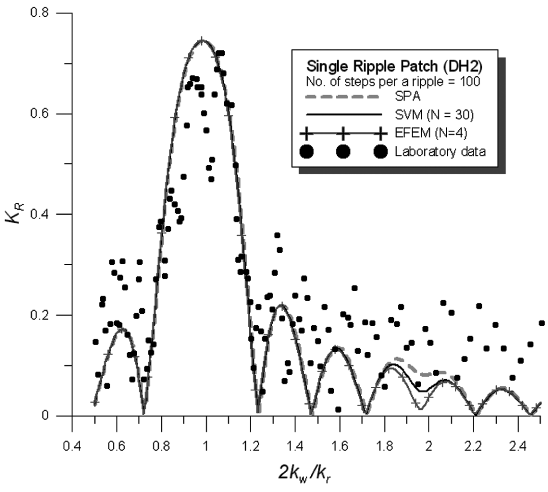

Fig. 4. Comparison of computed results from 401 steps approximating 4 ripples by Davies and Heathershaw (1984).

Table 3. Experimental setup of Guazzelli et al.(1992)

Case	A(cm)	λ_1(cm)	λ_2(cm)	x_r(cm)	h_0(cm)		
					a	b	c
G1	1	12	6	48	2.5	3	4
G2	0.5	6	4	48	2.5	3	4
G3	1	6	4	48	2.5	3	4

식의 경우 본 SPA와 유사하고 억류파의 영향을 고려한 EFEM의 해는 0으로 근접한다. 따라서 기존 결과들의 상이함으로 이에 관한 추가 연구가 필요하다.

식 (14)로 표현되는 두 개의 상이한 정현파가 중첩된 지형에 대한 반사율을 구하기 위해 Guazzelli et al.(1992)는 수리와 수치 실험을 실시하였다. 여기서 λ_1과 λ_2는 구성 사주의 파장이며 반사율의 결과는 파장이 긴 $\lambda_1(k_r \equiv 2\pi/\lambda_1)$을 기준으로 나타내었고 Table 3에 지형의 제원을 나타내었다. 상이한 정현파 지형으로 인해 증폭은 복잡한 형상을 보이게 된다.

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & x \le 0 \\ h_0 - A[\sin(2\pi x/\lambda_1) + \sin(2\pi x/\lambda_2)], & 0 \le x \le x_r \\ h_0, & x \ge x_r \end{cases} \tag{14}$$

Guazzelli et al.(1992)의 수리실험은 3개의 상이한 사주지형을 대상으로 하였고 각 사주 지형에서 일정 수심의 값은 3개로 구성되어 있다. 본 실험은 Davies and Heathershaw의 실험에 비해 규모가 작고 지형 G1에서는 구성 사주의 파장비(m)은 2이나 G2와 G3는 1.5로 동일하다. 따라서 증폭은 복잡하여 $2k_w/k_r \approx 1$ 또는 m에서 제 1증폭이, $2k_w/k_r \approx m$-1과 $2k_w/k_r \approx m$+1에서 제 2증폭이 각각 발생한다. 모든 지형과 파랑조건에 대한 본 수치실험 결과는 SPA(점선)과 억류파 30개를 사용한 SVM(실선)으로 그리고 수리모형 결과(채운 원)도 비교를 위해 각각 나타내었다.

본 수치실험의 결과는 기존 수치모형 결과와 대체적으로 같으며 SVM 결과는 SPA에 비해 반사율의 위상이 파장비가 작은 쪽으로 약간 이동된 경향을 보인다. 사주의 진폭과 수심의 비가 크게 되면 반사율도 증가할 뿐 아니라 증폭 구간 폭의 감소율이 작아진다. 본 수치결과는 긴 사주를 파장당 100개의 작은 계단으로 구성하여 기존 결과에 비해 비교적 많은 계단을 사용하였다. 그러나 억류파의 영향을 모두 고려하는 EFEM은 계산시간과 기억용량의 제약으로 그 결과를 제시하지 못 하였고 SVM의 결과를 이용 간접적으로 억류파의 영향을 분석하였다.

Guazzelli et al.(1992)은 최대 3개의 억류파를 이용한 EFEM을 사용하였으나 계산시간의 제약에 의해 전체 사주를 수개로 분할하여 각각 계산하고 이를 접합하는 산란체법과 같은 방법을 사용하였다. Guazzelli et al.이 사용한 산란체법은 서(2008a)가 보인 바와 같이 억류파의 영향이 큰 경우 본 SVM의 결과보다 정확할 수 있으나 이는 억류파의 개수와 사주 한 파장당의 계단 지형의 개수에 따라 수렴 정도가 바뀜으로 추가 연구가 필요하다. 다만 억류파의 영향에 대한 그들의 결과를 분석하면 subharmonic 증폭(m-1)과 제 1증폭은 증가하나 superharmonic 증폭(m+1)은 감소하는 경향을 보인다.

Fig. 5는 G1 지형에 대한 수치실험 반사율이다. 이 지형은

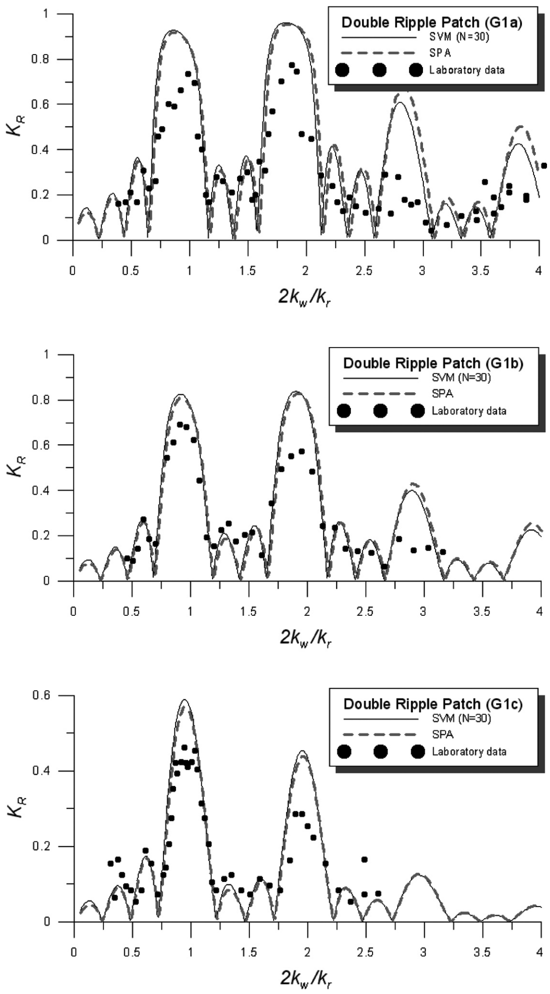

Fig. 5. Results(N=30) from 801 steps approximating a double ripple patch by Guazzelli et al.(1992) for G1: (G1a) h_0=2.5 cm; (G1b) h_0=3 cm; (G1c) h_0=4 cm.

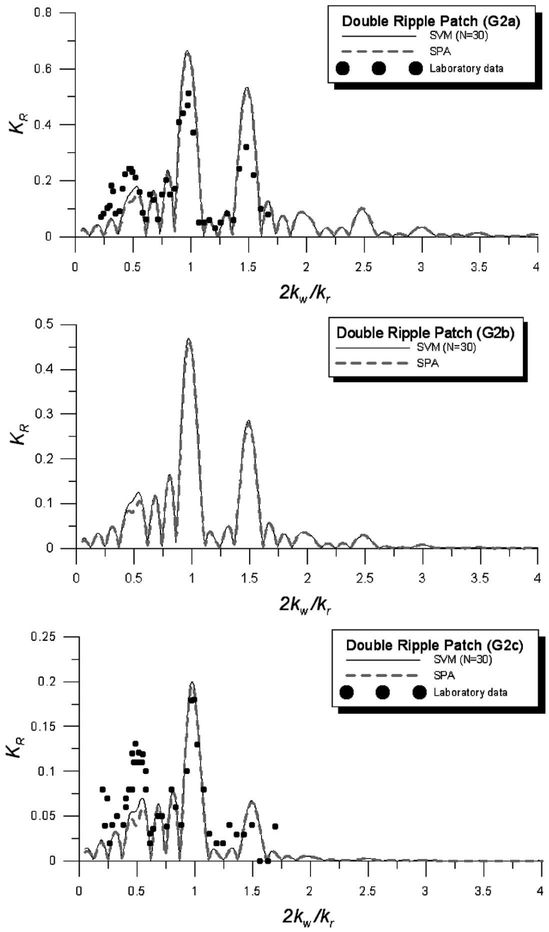

Fig. 6. Results from 1601 steps approximating a double ripple patch by Guazzelli et al.(1992) for G2: (G2a) h_0=2.5 cm; (G2b) h_0=3 cm; (G2c) h_0=4 cm.

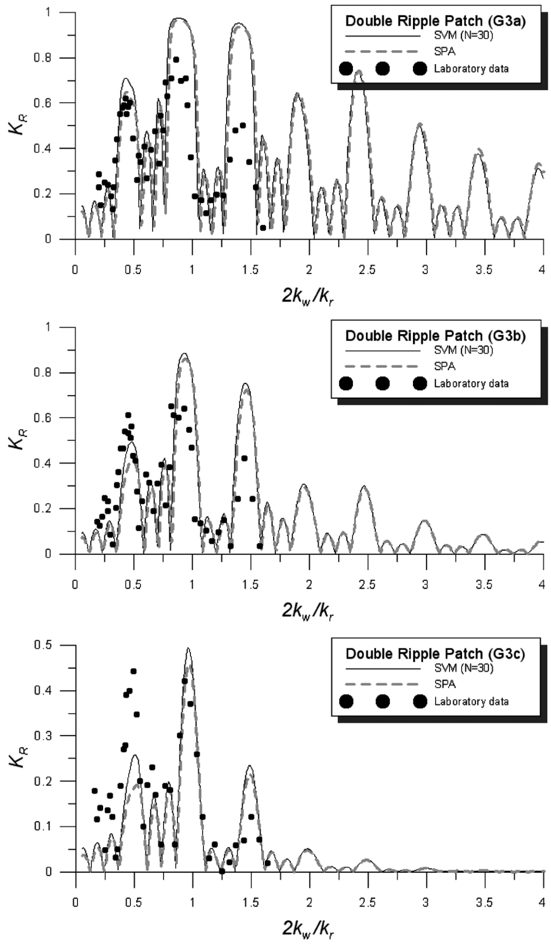

Fig. 7. Results from 1601 steps approximating a double ripple patch by Guazzelli et al.(1992) for G3: (G3a) h_0=2.5 cm; (G3b) h_0=3 cm; (G3c) h_0=4 cm.

m=2인 사주가 중첩된 것으로 제 1증폭은 $2k_w/k_r \approx 1,2$에 위치하고 짧은 파장 사주에 의한 subharmonic 증폭은 1 부근에서 긴 파장 사주에 의한 superharmonic 증폭은 2 부근에서 각각 발생하여 이곳에서의 반사율은 증가된다. 긴 파장 사주에 의한 subharmonic 증폭은 $2k_w/k_r \approx 0.5$에 위치하는 것으로 보이나 이는 뚜렷하지 않고 $2k_w/k_r \approx 3,4$에 위치하는 부차적인 증폭은 억류파를 포함한 경우 오히려 감소한다.

Fig. 6은 G2 지형, Fig. 7은 G3 지형에 대한 반사율로 이들 지형은 사주의 진폭에 차이가 있을 뿐 다른 조건은 동일하다. 따라서 진폭이 큰 G3 지형의 반사율이 크며 제 1증폭은 $2k_w/k_r \approx 1$, 1.5에 위치하고 m=1.5 이므로 부차적인 superharmonic 증폭은 2, 2.5, 3 등 여러 곳에서 발생한다. 특히 $2k_w/k_r \approx 0.5$에 위치하는 긴 파장 사주에 의한 subharmonic 증폭이 뚜렷이 나타나나 수리실험에 비해 작게 계산되었다. 이 경우 Guazzelli et al.의 결과는 본 결과보다는 수리결과에 근접하므로 인접 억류파의 영향에 의한 것으로 판단된다.

두 개의 사주가 중첩된 지형에 대한 본 수치실험과 O'Hare and Davies(1993)의 결과를 비교하면 그들의 결과는 Plane-wave 근사해를 이용한 산란체법(SPA)와 유사하다. O'Hare and Davies는 억류파를 무시한 변분근사해를 변환한 축차법을 사용하여 본질적으로는 본 SPA와 같으며 이는 본 논문에서 실시한 모든 수치실험의 결과에서 확인할 수 있다. 반면에 계단개수가 비교적 작고 억류파의 개수도 작으며 전체 사주를 수개로 분할한 Guazzelli et al.(1992)의 EFEM 결과는 이러한 제약에도 불구하고 본 SVM보다는 인접 계단의 억류파 영향을 고려하기 때

문에 이로 인해 차이가 발생하는 것으로 분석된다.

본 SVM 기법으로 계산한 위의 모든 각각의 결과를 얻는 데 걸린 계산시간은 최대 10초를 넘지 않는다. 이를 EFEM과 비교하면 현격한 차이가 있고 계산의 효율성은 SVM의 장점이다.

4. 결 론

사면 계단과 연안사주 지형과 같은 임의 지형을 다수의 작은 계단으로 근사하여 고유함수 전개법과 변분근사법에 산란체법을 연계한 수치실험을 실시하여 기존 결과와 대등한 결과를 얻었다. 인접 계단의 억류파의 영향을 고려하는 고유함수 전개법은 계단의 수가 많은 경우 이로부터 생성되는 연립방정식의 개수가 너무 커서 실제 계산에는 제약이 있다. 이 제약을 극복하기 위해 본 논문에서는 구성 단일 계단에는 억류파를 포함하나 산란체법을 사용함으로써 인접 계단간의 억류파의 영향을 무시하나 대신 축차적인 방법으로 계산함으로 다수의 계단지형에 의한 반사율과 투과율을 해석적으로 구하는 장점이 있다. 즉 본 방법은 구성 단일계단의 반사율과 투과율을 계산한 값 4개와 구성 계단의 수를 곱한 기억용량이 허용되는 만큼의 다수 계단을 사용할 수 있다.

본 수치실험을 통해 O'Hare and Davies(1992, 1993)의 변환행렬 축차법은 본 논문의 Plane-wave 근사해를 산란체법과 연계한 SPA 결과와 거의 같고 이는 변환행렬에서 억류파를 무시하였기 때문인 것으로 분석된다. 그리고 변환행렬 축차법은 변분근사법의 해를 변형한 변환행렬을 사용하기 때문에 본 변분근사 산란체법보다는 계산에 다단계의 과정이 필요하다.

사면계단 지형의 경우 구성 단일계단의 폭과 단차의 비는 일정하게 되며 직벽으로 갈수록 단일계단의 폭이 단차에 비해 작게 되어 인접 계단에서 생성되는 억류파의 영향을 무시할 수 없다. 따라서 이 경우에는 인접 억류파의 영향을 고려하는 방법이 필요하며 제약이 있는 EFEM보다는 연립방정식의 개수를 현저히 줄일 수 있는 변분근사법이 대안이 될 수 있다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “연안 국지 해일 정밀예보 지원체제 현업화 기술”, “해양관측시스템 개발”, “해일침수범람지역 예측 기술 및 재해도(Hazard Map) 작성기술 개발 : 부산, 마산, 여수” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다. 또한 연안사주에 대한 수리실험 자료를 제공하여 주신 서경덕 교수에도 감사를 드립니다.

참고문헌

서승남 (2008a). 산란체법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑변형 계산. 한국해안해양공학회논문집, 20(5), 439-451.

서승남 (2008b). 단일계단 지형에서 변분근사법과 고유함수 전개법에 의한 파랑변형 해의 비교. 한국해안해양공학회 논문집, 심의중.

조용식, 이창훈 (1998). 수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율 산정. 대한토목학회논문집, 18(II-4), 351-358.

Bender, C.J. and Dean, R.G. (2003). Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transitions. Coastal Eng., 50, 61-84.

Booij, N. (1983). A note on the accuracy of the mild-slope equation. Coastal Eng., 7, 191-203.

Chamberlain, P.G. and Porter, D. (1995). The modified mild-slope equation. J. Fluid Mech., 291, 393-407.

Davies, A.G. and Heathershaw, A.D. (1984). Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. J. Fluid Mech., 144, 419-443.

Devillard, P., Dunlop, F. and Souillard B. (1988). Localization of gravity waves on a channel with a random bottom. J. Fluid Mech., 186, 521-538.

Guazzelli, E., Rey, V. and Belzons, M. (1992). Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. J. Fluid Mech., 245, 301-317.

Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1983). Propagation of obliquely incident water waves over a trench. J. Fluid Mech., 133, 47-63.

Kirby, J.T. (1986). A general wave equation for waves over rippled beds. J. Fluid Mech., 162, 171-186.

Massel, S.R. (1993). Extended refraction-diffraction equation for surface waves. Coastal Eng., 19, 97-126.

Miles, J.W. (1967). Surface-wave scattering matrix for a shelf. J. Fluid Mech., 28, 755-767.

O'Hare, T.J. and Davies, A.G (1992). A new model for surface-wave propagation over undulating topography. Coastal Eng., 18, 251-266.

O'Hare, T.J. and Davies, A.G (1993). A comparison of two models for surface-wave propagation over rapidly varying topography. Applied Ocean Res., 15, 1-11.

Porter, D. and Staziker, D.J. (1985). Extension of the mild-slope equation. J. Fluid Mech., 300, 367-382.
Porter, D. (2003). The mild-slope equations. J. Fluid Mech., 494, 51-63.
Suh, K.D., Lee C. and Park, W.S. (1997). Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. Coastal Eng., 32, 91-117.
Takano, K. (1960). Effets d'un obstacle paralllpipdique sur la propagation de la houle. La Houille Blanche, 15, 247-267.

Received November 25, 2008
Accepted December 5, 2008