

IMU/GPS와 카메라 좌표계간의 물리적 관계를 위한 수학적 모델링

Mathematical Modeling for the Physical Relationship between the Coordinate Systems of IMU/GPS and Camera

전재춘¹⁾ · R. Shibasaki²⁾

Chon, Jae Choon · R. Shibasaki

Abstract

When extracting geo-referenced 3D data from cameras mounted on Mobile Mapping Systems, one of important properties for accuracy of extracted data is the alignment of the relative translation(lever-arm) and rotation(bore-sight) between the coordinate systems of Inertial Measurement Unit(IMU)/Ground Positioning System(GPS) and cameras. Since the conventional method calculates absolute camera orientation using ground control points (GCP), the alignment is determined in one Coordinated System (GPS Coordinated System). It basically require GCP. We proposed a mathematical model for the alignment using the initially uncoupled data of cameras and IMU/GPS without GCPs.

Keywords : Mobile Mapping System, IMU/GPS, Camera, Alignment.

초 록

모바일 매핑시스템 (Mobile Mapping Systems)에 장착된 카메라로부터, 3차원 데이터를 취득시, 취득된 3차원 데이터의 정밀도를 결정하는 중요한 요소 중 하나는 IMU/GPS와 카메라 좌표계간의 상대적인 위치(lever-arm)와 자세(bore-sight) 얼라인먼트이다. 기존 연구는 지상기준점(GPS)을 통하여 카메라의 절대표정을 계산하기 때문에, 하나의 좌표계 (GPS 좌표계) 상에서 이 얼라인먼트가 이루어진다. 이 방법은 GCP를 기본적으로 필요로 하는 단점이 있다. 본 논문에서는 GCP가 필요하지 않고, 연관성이 없는 카메라 데이터와 IMU/GPS 데이터를 통하여 이 두좌표계 간의 얼라인먼트를 계산하는 수학적 모델링을 제시한다.

핵심어 : 모바일매핑시스템, IMU/GPS, 카메라, 얼라인먼트.

1. 서 론

미사일, 전투기, 경비행기, 헬리콥터, 자동차 또는 야외 자율주행 로봇에 장착되어 있는 카메라로부터 3차원 데이터를 취득 할 때, 각 영상프레임의 외부표정(exterior orientation)은 중요한 요소 중에 하나이다. 사진측량 분야에서 일반적으로 카메라의 렌즈왜곡, 내부 표정(interior orientation)과 외부표정은 지상 기준점(Ground Control Point)을 이용하여 계산한다(Brown, 1971, Tsai, 1987,

Heikkil and Silven, 1997, Zhang., 1999, Edward et al, 2001). 지상 기준점을 사용할 경우, 측량을 위한 시간과 경비 소요가 증가되는 단점이 있다. 컴퓨터 비전 분야에서는 광류추출을 통하여 외부표정을 계산한다 (Chon et al, 2007; Pollefeys et al, 2000; 전재춘, 2008; 전재춘과 Shankar, 2008,2007). 광류기반의 외부표정을 위의 논문 과 같이 추정할 경우, 몇 천 영상 프레임 후 누적된 오차로 인하여 외부표정 계산이 불가능 하다(Chon et al, 2007). 이런 누적된 오차와 시간적 소모를 최소화하기 위

1) 교신저자 · 정회원 · earthmine inc. 시니어 연구원(E-mail:jjc7151@hanmail.net, jaechoon@earthmine.com)

2) 동경대학 · 공간정보과학센터/사회기반공학 교수(E-mail:shiba@csis.u-tokyo.ac.jp)

해 영상 프레임의 외부표정을 직접 계산 가능한 IMU (Inertial Measuring Unit)를 탑재한 모바일 매핑 시스템 (Mobile Mapping System)을 선택하고 있다. 모바일 매핑 시스템은 기본적으로 IMU와 GPS (Global Positioning System)를 탑재하고 있으며, 목적에 따라 CCD (charge coupled device) 카메라, 또는 pushbroom 스캐너, 레이저 스캐너 등을 탑재하고 있다(Schwarz et al, 1993, El-Sheimy and Schwarz, 1999, Mostafa, 2003, Bayoud, 2005). 그림 1(a,b)의 경우는 3차원 데이터를 취득하기 위해 레이저스캐너를 이용하고 있으며, 그림 1(c)의 경우는 스테레오 광각렌즈(fish-eye lens) 카메라 시스템을 이용하고 있다. 이 광각렌즈 카메라의 왜곡/비선형 홍채(the entrance pupil point)/광축과 CCD축간 보정/내부표정은 NASA JPL (NASA Jet Propulsion Laboratory California Institute of Technology)에서 개발한 CAHVORE 모델을 사용하고 있으며(Genney,2006; NASA,2008), seamless 구 파노라마 영상생성은 전채준 외 2인이 방법을 사용하고 있다(전채준 외 2인, 2005)[그림 2 참조].

모바일 매핑 시스템의 기준좌표계 표정(위치와 자세)은 GPS와 IMU의 데이터 융합을 통하여 계산된다. 데이터 융합은 칼만필터를 이용한다. 카메라 외부표정은 계산

된 모바일 매핑 시스템의 기준좌표계 오리엔테이션을 모바일 매핑 시스템의 기준 좌표계와 카메라 좌표계의 변환식에 입력하여 결정된다. IMU/GPS와 카메라의 물리적 관계인 상대적인 위치 (lever-arm) 와 자세(boresight) 계산은 GCP를 이용하여 계산된 카메라 외부표정을 이용하고 있다(Schwarz et al, 1993).

기존 방법은 GCP를 기본적으로 필요로 하는 단점이 있다. 본 논문에서는 GCP를 사용하지 않고, 연관성이 없는 카메라 데이터와 IMU/GPS 데이터를 통하여 이 두좌표계 간의 관계를 계산하는 수학적 모델링을 제시한다. 모바일 매핑 시스템이 이동 후, 어느 한 시점에서, 카메라 초기 좌표계에서 이동된 IMU 좌표계의 오리엔테이션은 두 벡터 경로로 정의 될 수 있다. 첫 번째 벡터 경로는 이동된 카메라 좌표계의 오리엔테이션을 통한 경로이다. 두 번째 벡터 경로는 이동 전의 IMU/GPS 초기 좌표계의 오리엔테이션을 통한 경로이다. 이 두 벡터 경로로부터 카메라와 IMU간의 상대적인 위치를 포함한 식을 유도할 수 있다. 카메라와 IMU/GPS간의 상대적인 자세가 포함된 식은 이동된 IMU 좌표계에서 임의의 한 좌표를 이 두 경로로 표현함으로써 유도된다. 본 논문에서는 이 두 식의 유도과정의 소개 하고자 한다.



Fig. 1. Systems including cameras, laser range scanners, IMU, and GPS.

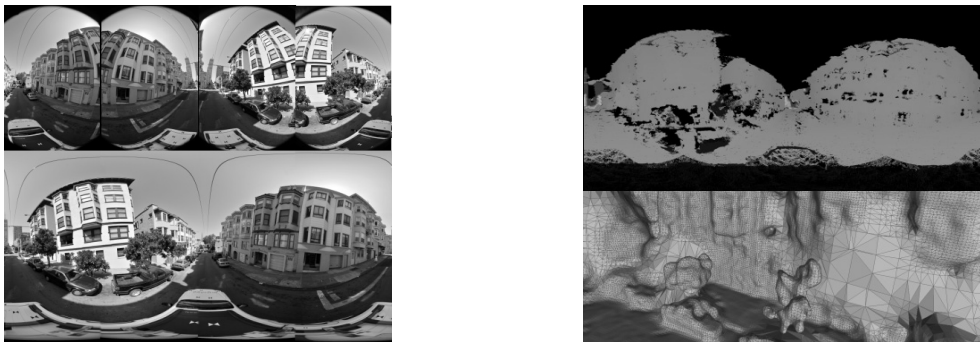


Fig. 2. Fish-Eye Lens Images and Geo-referenced 3D Panorama.

2. 벡터경로를 이용한 상대적인 위치와 자세

카메라와 IMU가 non-flexible 시스템에 설치되어 있을 때, 카메라와 IMU의 좌표계는 그림 1과 같이 모델화 된다. 그림 3에서 상대적인 위치 $L_I^C = [X_I^C \ Y_I^C \ Z_I^C]$ 와 자세 $\Omega_I^C = [\omega_I^C \ \phi_I^C \ \kappa_I^C]$ 는 카메라 좌표계에서 IMU의 위치와 자세를 각각 나타낸다. $[\omega_I^C \ \phi_I^C \ \kappa_I^C]$ 는 각각 IMU의 X, Y, Z축의 자세이다. 카메라와 IMU의 좌표축간의 거리 l 이 주어질 때, $L_I^C = l[\cos\alpha\cos\beta \ \sin\alpha\cos\beta \ \sin\beta]$ 로 표현 할 수 있다.

시스템이 이동 후, 카메라 초기 좌표계에서 IMU의 위치 $P_{I(t)}^C$ 는 다음 식 (1)과 (2)로 표현된다.

$$P_{I(t)}^C = L_I^C + R(\Omega_I^C)P_{I(t)}^I \quad (1)$$

$$P_{I(t)}^C = P_{C(t)}^C + R(\Theta_{C(t)}^C)L_I^C \quad (2)$$

그림 4(a)에서와 같이, 식 (1)은 시스템의 초기상태에서 IMU 좌표계의 오리엔테이션을 통한 두 벡터 L_I^C 과 $R(\Omega_I^C)P_{I(t)}^C$ 의 덧셈이다. 그림 4(b)와 같이, 식 (2)는 이동된 카메라 좌표계의 오리엔테이션을 통한 두 벡터 $P_{C(t)}^C$ 과 $R(\Theta_{C(t)}^C)L_I^C$ 의 덧셈이다. 여기서, $R(\theta = \begin{bmatrix} \omega \\ \phi \\ \kappa \end{bmatrix}) = R_\omega R_\phi R_\kappa$ 은 3×3 회전 행렬이며, $R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$, $R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$, $R_\kappa = \begin{bmatrix} \cos\kappa & -\sin\kappa & 0 \\ \sin\kappa & \cos\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 는 각각 X, Y, Z축 회전 행렬이다. $P_{C(t)}^C$ 과 $\Theta_{C(t)}^C$ 는 시간 t 에서 카메라 좌표계의 위치와 자세를 카메라 초기 좌표계에서 나타낸 것이며, $P_{I(t)}^I$ 는 시간 t 에서 IMU 좌표계의 위치를 IMU 초기 좌표계로 나타낸 것이다. 벡터 $P_{C(t)}^I$ 표현한 두식 (1)과 (2)는 다음과 같이 표현된다.

$$L_I^C + R(\Omega_I^C)P_{I(t)}^I = P_{C(t)}^C + R(\Theta_{C(t)}^C)L_I^C \quad (3)$$

식 (3)은 상대적인 위치와 자세의 관계를 표현하고 있다. 그림 3과 같이 IMU좌표계에서 임의의 벡터 r 을 이용하여, bore-sight을 표현하는 두식 (4)와 (5)를 유도 할 수

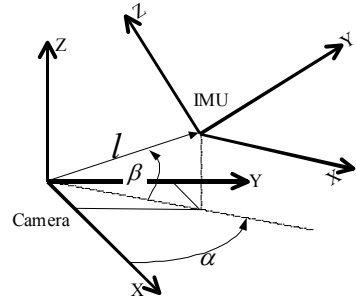
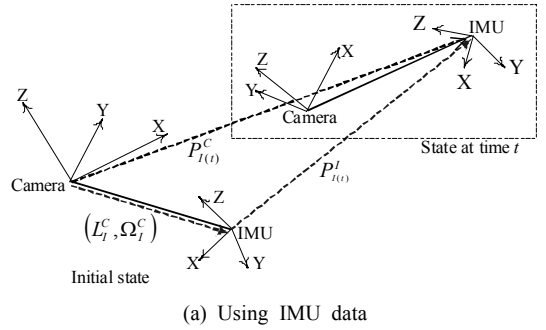
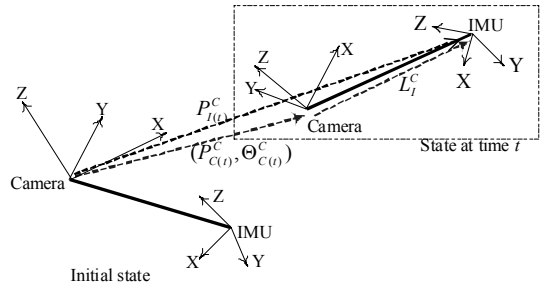


Fig. 3. Camera and INS coordinate systems.



(a) Using IMU data



(b) Using camera exterior orientation

Fig. 4. Definition of the position of the IMU, $P_{C(t)}^I$.

있다. 식 (4)는 식 (1)과 같이 IMU의 데이터를 이용한 벡터를 사용한 경우이며, 식 (5)는 식 (2)와 같이 카메라의 외부표정을 이용한 벡터를 사용한 경우이다. 여기서, $\Theta_{I(t)}^I$ 은 시간 t 에서 IMU의 초기좌표계로서 표현된 IMU 자세이다.

$$r_{I(t)}^C = L_I^C + R(\Omega_I^C)\{P_{I(t)}^I + R(\Theta_{I(t)}^I)r^I\} \quad (4)$$

$$r_{I(t)}^C = P_{C(t)}^C + R(\Theta_{C(t)}^C)\{L_I^C + R(\Omega_I^C)r^I\} \quad (5)$$

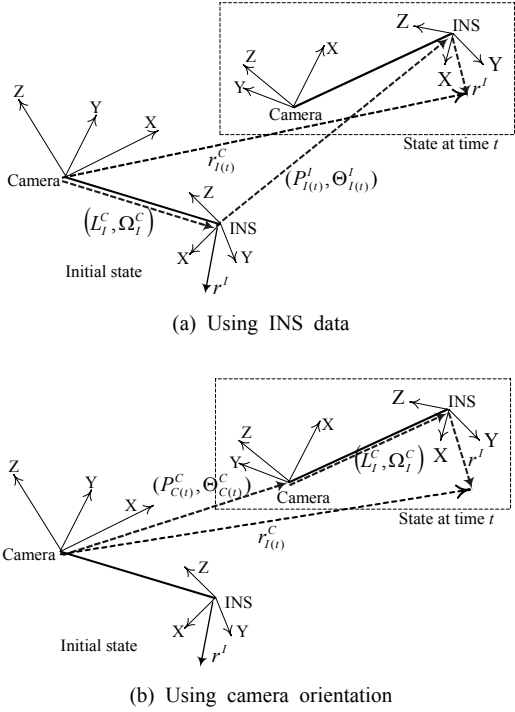


Fig. 5. Definition of an arbitrary position $r_{I(t)}^C$.

벡터 $r_{I(t)}^C$ 표현한 두 식 (4)과 (5)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & L_I^C + R(\Omega_I^C) \{ P_{I(t)}^I + R(\Theta_{I(t)}^I) r^I \} \\ & = P_{C(t)}^C + R(\Theta_{C(t)}^C) \{ L_I^C + R(\Omega_I^C) r^I \} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)은 식 (3)의 내용을 포함하고 있다. 식 (6)에 식 (3)을 빼면, 상대적인 자세만의 관계를 표현하는 조건식을 얻을 수 있다.

$$R(\Omega_I^C) R(\Theta_{I(t)}^I) = R(\Theta_{C(t)}^C) R(\Omega_I^C) \quad (7)$$

우리는 식 (3)과 (7)은 카메라와 IMU/GPS의 상대적인 자세의 매개체로서 연관성이 없는 카메라 좌표계와 IMU 좌표의 데이터의 관계인 것을 알 수 있다.

3. 상호표정 추정

본 논문에서 추정하고자 하는 상수는 6개의 미지수로

서 카메라와 IMU의 좌표축간의 관계 (L_I^C, Ω_I^C). 6개의 미지수는 본 논문에서 제안한 식 (3)과 (7)식을 통하여 계산할 수 있다. 이 식을 F 함수로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & [F_1(t) \ F_2(t) \ F_3(t)]^T \\ & = P_{C(t)}^C + R(\Theta_{C(t)}^C) L_I^C - L_I^C - R(\Omega_I^C) P_{I(t)}^I \\ & \begin{bmatrix} F_4(t) & F_5(t) & F_6(t) \\ F_7(t) & F_8(t) & F_9(t) \\ F_{10}(t) & F_{11}(t) & F_{12}(t) \end{bmatrix} \\ & = R(\Theta_{C(t)}^C) R(\Omega_I^C) - R(\Omega_I^C) R(\Theta_{I(t)}^I) \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)은 6개의 미지수가 비선형으로 연관되어 있기 때문에 선형화를 통한 계산이 필요하다. 본 논문에서는 선형화를 Taylor series 방법을 사용하였다. 선형과정에서 1차식까지만 이용하였다.

$$F_i(t) = F_i^0(t) + \left(\frac{\partial F_i^0(t)}{\partial L_I^C} \right) dL_I^C + \left(\frac{\partial F_i^0(t)}{\partial \Omega_I^C} \right) d\Omega_I^C \quad (9)$$

여기서, $F_i^0(t)$ 는 미지수의 초기 입력값에 의한 F값이며, 식 (9) 각 편미분 전개는 부록에 기술 하였다. 미지수가 6개이기 때문에 카메라/IMU의 데이터가 최소 3개 세트가 필요로 한다. n개의 카메라/IMU의 데이터 세트에 대한 식 (9)은 다음과 같이 표현된다.

$$B = J\Delta \quad (10)$$

여기서, $\Delta_{6 \times 1} = [dL_I^C \ d\Omega_I^C]^T$ 는 관측대상의 미세조정 값이며, $B_{20n \times 1} = \begin{bmatrix} \vdots \\ F^0(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$ 이다. Δ 는 최소자승법으로 계산 가능하며, 6개의 미지수는 다음 식을 반복하여 계측된다.

$$\Delta = (J^T J)^{-1} J^T B \quad (11)$$

$$[L_I^C \ \Omega_I^C]_i^T = [L_I^C \ \Omega_I^C]_{i-1}^T + \Delta$$

여기서, i는 반복회수 이다.

Table 1. The given data.

Camera Exterior Orientation	Index	1	2	3	4	5	6	7	...
	Position [Meter]	(10 10 10)	(20 10 10)	(30 10 10)	(40 10 10)	(50 10 10)	(60 10 10)	(70 10 10)	...
	Pose [Degree]	(1 2 3)	(3 4 5)	(5 6 7)	(7 8 9)	(9 10 11)	(11 12 13)	(13 14 15)	...
lever-arm [Meter]	(-1 -0.27 -0.72)								
Boresight [Degree]	(-30 -19 105)								

Table 2. The estimated lever-arm and bore-sight.

	Initial	Estimated	Real
lever-arm [Meter]	(0.1 0 0)	(-0.99019 -0.27181 -0.72125)	(-1 -0.27 -0.72)
Boresight [Degree]	(0 0 0)	(-29.982 -19.017 105.01)	(-30 -19 105)

$$\frac{\sum_{i=0}^n |F_i|}{n} = 0.0440, \sum |\Delta| = 4.5483e - 006, \text{ iteration number is } 20$$

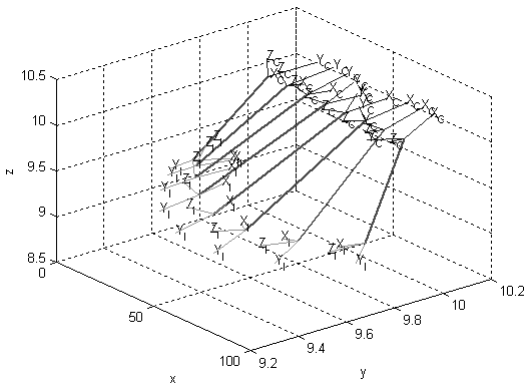


Fig. 6. Orientation of a system installed with a camera and an IMU in 3D space.

4. 시뮬레이션 결과

본 논문에서 제안한 수학적 모델을 검증하기 위해, MATLAB으로 상대적인 위치와 자세추정을 수행 하였다. 표 1은 카메라의 외부표정과 상대적인 위치와 자세 데이터이다. 이 데이터를 기반으로 IMU의 위치/자세를 식 (3) 과 (7)을 통하여 계산한다. 그림 6에서 파란색의 좌표축은 카메라 좌표축이며 녹색 좌표축은 IMU좌표이다. 표 2는 카메라 외부표정과 계산된 IMU의 위치/자세 정보를 식 (1)와 (2)에 입력하여 상대적인 위치와 자세를 추정한 결과이다. 반복수가 20번에 매우 정밀한 결과를 얻었다.

5. 결 론

본 논문은 IMU/GPS와 카메라의 좌표축간 관계를 위한 새로운 수학적인 모델을 제안 하였다. 제안한 수식은 좌표계가 상이한 카메라 외부표정과 IMU/GPS 데이터만을 이용하여 카메라와 IMU관계를 상대적인 위치와 자세로 표현 한 것이다. 제안한 수학적 모델을 통하여 카메라와 IMU의 상대적인 위치와 자세를 추정 할 수 있다.

정밀하고 신속하게 3D GIS 정보를 취득하고자 하는 모든 모바일 매핑 시스템에는 카메라와 IMU/GPS가 기본적으로 설치되어 있다. 제안한 수학적 모델은 지상기준점 측량이 필요하지 않기에 모바일 매핑 시스템의 캘리브레이션을 신속하게 할 수 있으리라 기대된다.

참고문헌

- 전재춘, 2008, 벡터내적 기반 카메라 자세 추정, 대한원격탐사학회지, 24(6), pp. 641-644
- 전재춘, S. Sastry, 2008, 벡터내적기반 카메라 외부파라미터, 응용: 절대표정, 제어로봇시스템학회지, 14(1), pp. 70-74.
- 전재춘, S. Sastry, 2007, 벡터내적 기반 카메라 외부 파라미터 응용: 카메라와 레이저스캐너간의 캘리브레이션, 대한원격탐사학회지, 23(6), pp. 553-558.
- 전재춘, 서용철, 김형석 (2004), 동적계획법과 적응 비용 변환을 이용한 영상 모자이크의 seam-line 결정, 한국지리정보학회지, 7(2), pp. 16-28.

- Bayoud, F. A (2005), Vision-Aided Inertial Navigation Using a Geomatics Approach, Proceedings of the ION GNSS 2005 Meeting, Long Beach, USA, pp. 13-16.
- Brown, D.C. (1971), Lens Distortion for Close-Range Photogrammetry-, Photometric Engineering, Vol. 37, No. 8, pp. 855-866.
- Chon, J, Fuse, T., Shimizu, E, and Shibasaki, R. (2007), 3D Image Mosaicking Using Multiple Projection Planes, IEEE Tr. on SMC-B, Vol. 37, No. 3, pp 1-12.
- Edward M. Mikhail, James S. Bethel and J. Chris McGlone (2001), Introduction to modern photogrammetry, *JOHNWILEY & SONS, INC.*, pp. 80-151.
- El-Sheimy, N. and Schwarz, K. P. (1999), Navigating Urban Areas by VISAT - A Mobile Mapping System Integrating GPS/INS/Digital Cameras for GIS Application, Navigation, Vol. 45, No. 4, pp. 275-286.
- Gennery, Donald B., (2006), Generalized Camera Calibration Including Fish-Eye Lenses, International Journal of Computer Vision, Vol. 68, No. 3, pp. 239-266.
- Han, J.H. and Park, J.S. (2000), Contour matching using epipolar geometry, *IEEE Tr. on PAMI*, Vol. 22, No. 4, pp. 358-370.
- Heikkil, J. and Silven, O. (1997), A Four-step Camera Calibration Procedure with Implicit Image Correction, In Computer Vision and Pattern Recognition, pp. 1106-1113.
- Mostafa, M.M.R. (2003), Design and Performance of the DSS, Proceedings, 49th Photogrammetric Week, Stuttgart, Germany, September 1-5, 2003.
- Pollefeys, M., Koch, R., Vergauwen, M., and Gool, L. V. (2000), Automated reconstruction of 3D scenes from sequences of images, *ISPRS Journal Of Photogrammetry And Remote Sensing*, Vol. 55, No. 4, pp. 251-267.
- Schwarz, K. P., Chapman, M. A., Cannon M.E and Gong, P. (1993). An Integrated INS/GPS Approach to the Georeferencing of Remotely Sensed Data, Photogrammetric Engineering & Remote Sensing, Vol. 59, No. 11, pp. 1667-1674.
- Skaloud, J (1999), Problems in direct georeferencing by INS/GPS in the airborne environment, ISPRS Barcelona, pp. 25-26.
- NASA (2008), Mars Mapping Technology Brings Main Street to Life, 50 Years of NASA-Derived Technologies(1958-2008), SPIN-OFF, pp. 141-142, http://www.sti.nasa.gov/tto/Spinoff2008/ct_9.html
- Tsai, R. Y. (1987), A versatile camera calibration technique for high accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses, IEEE Journal of Robotics Automat., Vol. RA-3, No. 4. pp. 323-344.
- Zhang, Z. (1999), Flexible Camera Calibration By Viewing a Plane From Unknown Orientations, In 7th IEEE International Conference on Computer Vision, pp. 666-673.

(접수일 2008. 11. 26, 심사일 2008. 12. 15, 심사완료일 2008. 12. 27)

부록- 식 (9)에서 각 편미분

$$\frac{\partial F_{1,2,3}}{\partial L_I^C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - R(\Theta_{C(t)}^C), \quad \frac{\partial F_{4,\dots,12}}{\partial L_I^C} = 0,$$

$$\frac{\partial F_{1,2,3}}{\partial \Omega_I^C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\omega_I^C}}{\partial \omega_I^C} R_{\phi_I^C} R_{\kappa_I^C} \\ R_{\omega_I^C} \frac{\partial R_{\phi_I^C}}{\partial \phi_I^C} R_{\kappa_I^C} \\ R_{\omega_I^C} R_{\phi_I^C} \frac{\partial R_{\kappa_I^C}}{\partial \kappa_I^C} \end{bmatrix}^T P_{I(t)}^T, \quad \frac{\partial F_{4,\dots,12}}{\partial \Omega_I^C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\omega_I^C}}{\partial \omega_I^C} R_{\phi_I^C} R_{\kappa_I^C} \\ R_{\omega_I^C} \frac{\partial R_{\phi_I^C}}{\partial \phi_I^C} R_{\kappa_I^C} \\ R_{\omega_I^C} R_{\phi_I^C} \frac{\partial R_{\kappa_I^C}}{\partial \kappa_I^C} \end{bmatrix}^T R(\Theta_{I(t)}^I) - R(\Theta_{C(t)}^C) \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\omega_I^C}}{\partial \omega_I^C} R_{\phi_I^C} R_{\kappa_I^C} \\ R_{\omega_I^C} \frac{\partial R_{\phi_I^C}}{\partial \phi_I^C} R_{\kappa_I^C} \\ R_{\omega_I^C} R_{\phi_I^C} \frac{\partial R_{\kappa_I^C}}{\partial \kappa_I^C} \end{bmatrix}^T$$

$$R_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \omega & -\cos \omega \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \end{bmatrix}, \quad R_\phi = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \phi & 0 & \sin \phi \end{bmatrix}, \quad R_\kappa = \begin{bmatrix} \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ -\cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial R_\omega}{\partial \omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \\ 0 & -\cos \omega & -\sin \omega \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial R_\phi}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} -\sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi & 0 & -\sin \phi \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial R_\kappa}{\partial \kappa} = \begin{bmatrix} -\sin \kappa & -\cos \kappa & 0 \\ \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$