韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 22권 제 4호. 2008. 11. 505-514

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 22 No 4, Nov. 2008. 505-514

방법유추를 통한 3차와 4차 방정식의 근의 공식 유도

류 익 승 (전주고등학교)
신 현 용 (한국교원대학교)
한 인 기 (경상대학교)

방정식의 가해성 탐구는 수학사의 중요한 연구주제의 하나였으며, 삼차방정식과 사차방정식의 일반적인 해법은 교사양성기관의 현대대수학 교과에서 다루는 중요한 내용이다. 본 연구에서는 norm 형식의 개념을 바탕으로 이차방정식의 근의 공식에 대한 방법유추를 통해 삼차방정식의 근의 공식을 유도하고, 삼차방정식의 근의 공식에 대한 방법유추를 통해 사차방정식의 근의 공식을 유도하였다.

1. 서 론

방정식의 가해성 탐구, 방정식의 근의 공식 유도는 수학사의 중요한 연구주제들 중의 하나였다. 일차방정식과 이차방정식의 해법(근의 공식)은 중등학교 교육과정에 제시되어 있지만, 삼차방정식과 사차방정식의 일반적인 해법은 중등학교 수학교육에서는 다루지 않는다. 그렇지만, 삼차방정식과 사차방정식의 일반적인 해법(근의 공식)은 교사양성기관의 현대대수학 교과에서 다루는 중요한 내용으로, 박한식(1991, p.2)이 '...학생들에게 지도하라는 것은 결코 아니다. 수학을 학생들에게 지도함에 있어서 이 책의 내용을 알고 있으면, 교실에서 수학을 지도할 때 마음의 여유가 생길 것이고...'와 같이 규정한 교직수학의 범주에 속하는 흥미로운 주제라 할 수 있으며, 교사 및 예비교사의 교과내용지식(pedagogical content knowledge)에 대한 전문성 계발이라는 측면에서 의미로운 주제라 할 수 있다.

최근 들어, 교사 및 예비교사의 교과내용지식에 관련된 다양한 수학교육학 연구가 이루어지고 있는 것은 주목할 만하다. 이들 연구를 교과내용지식의 양 및 수준에 대한 연구들과 교과내용지식의 구체적인 교수학적 변환에 대한 연구로 나눌 수 있다.

교과내용지식의 양과 수준에 대한 연구는 교사재교육 및 예비교사 양성교육의 교육과정 개발 연구로, 신준식(2003), 한인기(2003a), 신현용(2003), 박혜숙(2003), 강미광(2003), 이병수(2003), 이강섭(2003), 이재학(2003), 한인기・신현용(2003) 등의 연구를 들 수 있다. 한편, 교과내용지식의 교수학적 변환에 대한 연구는 신현용(2006), 정상권(2004), 한인기(2003b), 현종익(2005), 박혜숙・김서령・김완

* 2008년 9월 투고, 2008년 10월 심사완료
* ZDM 분류 : E55
* MSC2000 분류 : 97C90
* 주제어 : 다항식, 근의 공식, 교과내용지식, norm 형식

순(2005) 등의 연구를 들 수 있는데, 이들 연구에서는 교과내용지식의 다양한 측면들을 분석하여, 이를 바탕으로 교사 및 예비교사의 수학교육을 위한 구체적인 교수학적 변환을 제시하였다. 그러나 교과내용지식에 대한 창의적 탐구 및 수학적 지식의 확장을 중심으로 하는 구체적인 교수학적 변환에 대한 연구들은 많지 않다.

Polya(1990)에 의하면, 유추는 수학적 관계에 대한 창의적 탐구 및 수학적 지식의 확장을 위한 효과적인 방법이다. 에르든예프 · 한인기(2005)에 의하면, 유추는 대상 A, B 사이에 존재하는 유사성에 근거하며, 대상 A, B의 종류에 따라 개념유추와 방법유추로 나눈다. 대상 A와 B가 개념이며, 대상 A의 어떤 속성을 대상 B로 유추하면, 이를 개념유추라 하며, 대상 A와 B가 수학 문제이며, 문제 A의 증명 방법을 문제 B로 유추하면, 이것을 방법유추라 한다.

본 연구는 수학적 지식의 확장이라는 측면에서 이차방정식, 삼차방정식, 사차방정식의 근의 공식을 고찰하는 연구로, 다항식의 norm 형식 개념을 바탕으로 이차방정식의 근의 공식에 대한 방법유추를 통해 삼차방정식의 근의 공식을 유도하고, 삼차방정식의 근의 공식에 대한 방법유추를 통해 사차방정식의 근의 공식을 유도할 것이다. 이를 통해, 방법유추를 통한 방정식의 근의 공식 유도 방법을 확장하는 한 방법을 제시할 것이다.

2. x^n-1의 norm 형식

다항식에서 norm 형식의 개념을 Barbeau(2003)를 중심으로 살펴보자. n개의 근 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$을 갖는 다항식 $Q(\lambda)\in F[\lambda]$에 대해, 집합

$$RP_{Q(\lambda)}=\{P(\alpha_1)P(\alpha_2)\cdots\ P(\alpha_n)|\ P(\lambda)\in F[\lambda],\deg P(\lambda)\leqq n-1\}$$

을 다항식 $Q(\lambda)$의 norm 형식(form) 이라 한다.

어떤 다항식 $Q(\lambda)$에 대하여 $X_{Q(\lambda)}=\{p(\lambda)|\deg p(\lambda)<\deg Q(\lambda)\}$라 하자. 집합 $X_{Q(\lambda)}$의 임의의 원소 $P(\lambda)$는 $P(\lambda)=x_1+x_2\lambda+\cdots+x_n\lambda^{n-1}$라 놓을 수 있다. 그러므로 $x_1,\cdots,x_n$을 미지수로 보았을 때, $P(\alpha_1)\cdots P(\alpha_n)(\in RP_{Q(\lambda)})$는 $x_1,\cdots,x_n$에 대한 다항식의 형식을 갖는다. 이 형식은 임의의 $RP_{Q(\lambda)}$의 원소에 대하여 불변이다.

다항식 x^n-1에 대한 norm 형식을 생각하자. 단위원의 n제곱근 전체의 집합을 $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n$이라고 하면, $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \cdots,\ \zeta_n=\zeta,\zeta^2,\ \cdots,\ \zeta^{n-1}$가 된다. 이때, $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$는 단위원의 원시 n제곱근이다.

이제, 실계수 다항식 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$(단 n은 임의의 자연수), 단위원의 원시 n제곱근 $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{n}}$에 대해, 다항식 $P_n^*=P_n(\zeta_1)P_n(\zeta_2)\cdots P_n(\zeta_{n-1})P_n(\zeta_n)=$

$P_n(\zeta)P_n(\zeta^2)\cdots P_n(\zeta^{n-1})P_n(\zeta^n)$을 생각하자. 그러면, 다항식 P_n^*는 x^n-1의 norm 형식이다.

$n=2,\ 3,\ 4$에 대해, x^n-1의 norm 형식 P_n^*를 구해보자. 이를 위해, 단위원의 원시 2, 3, 4제곱근을 ζ로 나타내자. $n=2$인 경우에, x^2-1과 일차다항식 $P_2(x)=a+bx$로부터, norm 형식 $P_2^*=P_2(\zeta)P_2(\zeta^2)=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 얻을 수 있다.

한편, x^3-1과 이차다항식 $P_3(x)=a+bx+cx^2$으로부터, norm 형식 P_3^*를 구하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_3^* &= P_3(\zeta)P_3(\zeta^2)P_3(\zeta^3)=(a+b+c)(a+b\zeta+c\zeta^2)(a+b\zeta^2+c\zeta) \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= a^3+b^3+c^3-3abc. \end{aligned}$$

그리고 x^4-1과 삼차다항식 $P_4(x)=a+bx+cx^2+dx^3$으로부터, norm 형식 P_4^*을 구하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_4^* &= P_4(\zeta)P_4(\zeta^2)P_4(\zeta^3)P_4(\zeta^4) \\ &= (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+bi-c-di)(a-bi-c+di) \\ &= (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd) \\ &= a^4-b^4+c^4-d^4-4a^2bd+4b^2ac+4d^2ca-4c^2db-2a^2c^2+2d^2b^2. \end{aligned}$$

이제, $n=2,\ 3,\ 4$에 대해 얻어진 x^n-1의 norm 형식 P_n^*을 이용하여, 이차방정식, 삼차방정식, 사차방정식의 근의 공식을 유도하자.

3. 이차방정식, 삼차방정식, 사차방정식 해법의 방법유추

n차방정식 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$에서 $x=y-\dfrac{a_1}{n}$으로 치환하면, 주어진 방정식은 $(n-1)$차의 항이 없는 다항식인 $y^n+b_2y^{n-2}+\cdots+b_n=0$으로 변형된다. 이러한 치환을 바탕으로, 이차방정식의 근의 공식을 유도하자.

이차방정식 $x^2+px+q=0$에 치환 $x=y-\dfrac{p}{2}$를 이용하면, 방정식은 $y^2-\left(\dfrac{p^2}{4}-q\right)=0$으로 변형된다. 이제, norm 형식 a^2-b^2에서 $a=y$라 놓으면, 방정식 $y^2-b^2=(y+b)(y-b)$를 얻을 수 있다. 이제, 방정식 $y^2-\left(\dfrac{p^2}{4}-q\right)=0$, norm 형식 $y^2-b^2=(y+b)(y-b)$을 살펴보자. $b=\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$라 놓으면, $y^2-\left(\dfrac{p^2}{4}-q\right)=0$은 $(y+b)(y-b)=0$인 꼴로 인수분해가 된다. 그러

면, $y^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0$의 근 y는 $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$가 된다. 이제, 치환 $x=y-\frac{p}{2}$의 역치환을 이용하면, 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 근 x가 $-\frac{p}{2}\pm b=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$이 됨을 알 수 있다. □

이제, 이차방정식에서 근의 공식을 유도하는 방법을 분석하여, 이를 바탕으로 삼차방정식에서 근의 공식을 유도하는 방법유추를 수행하자. 우선, 이차방정식에서 근의 공식 유도 방법을 분석하자.

① $x^2+px+q=0$에 치환 $x=y-\frac{p}{2}$을 이용하여, 방정식 $y^2-k=0$을 유도한다.

② norm 형식을 이용하여, ①에서 얻어진 다항식 $y^2-k=0$의 근을 구한다.

③ ①의 치환에 대한 역치환을 이용하여, 처음 방정식의 근을 구한다.

이제, 방법유추를 통해, 삼차방정식의 근의 공식을 유도하는 다음 과정을 추리할 수 있다.

①′ 삼차방정식에서 적당한 치환 $x=y-\frac{a_1}{n}$을 통해, 이차항이 없는 방정식을 유도한다.

②′ norm 형식을 이용하여, ①′에서 얻어진 다항식의 근을 구한다.

③′ ①′의 치환에 대한 역치환을 이용하여, 처음 방정식의 근을 구한다.

얻어진 방법유추를 바탕으로, 삼차방정식의 근의 공식을 유도하자. 이를 위해, 임의의 삼차방정식 $z^3+az^2+bz+c=0$을 생각하자. 방정식 $z^3+az^2+bz+c=0$에서, 치환 $z=x-\frac{a}{3}$를 이용하면, $x^3+px+q=0$인 꼴의 방정식을 얻을 수 있다.

이제, x^3-1의 norm 형식 $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)=a^3+b^3+c^3-3abc$으로부터, 삼차방정식 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$이 $(x+a+b)(x+a\omega+b\omega^2)(x+a\omega^2+b\omega)=0$와 같이 인수분해가 된다는 것을 알 수 있고, 이로부터 삼차방정식의 세 근을 다음과 같이 얻을 수 있다(단, ω는 단위원의 원시 3제곱근임).

$$x_1=-a-b,\ x_2=-a\omega-b\omega^2,\ x_3=-a\omega^2-b\omega$$

이제, $x^3+px+q=0$과 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$의 계수를 비교하면, $p=-3ab$, $q=a^3+b^3$을 얻고, 이로부터 $a^3b^3=-\frac{p^3}{27}$, $a^3+b^3=q$가 된다. 즉, a^3과 b^3은 방정식 $z^2-qz-\frac{p^3}{27}=0$의 두 근이다. 여기서, $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geq 0$이고, $a=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$, $b=\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ 이다. 따라서 삼차방정식 $x^3+px+q=0$의 세 근은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$x_1=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}-\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$x_2 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,\omega - \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,\omega^2$$

$$x_3 = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,\omega^2 - \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,\omega \quad \square$$

이차방정식의 해법에 대한 방법유추를 바탕으로, 삼차방정식의 근의 공식을 유도하였다. 특히, 1의 세제곱근들에 대한 norm 형식에서 문자를 x로 놓아 삼차방정식의 인수분해식을 얻을 수 있었고, 삼차방정식의 세 근을 1의 세제곱근들로 표현할 수 있었다. 한편, $P_4(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$에 의한 $x^4 - 1$의 norm 형식 P_4^*를 이미 구했으므로, 삼차방정식에서와 유사한 방법으로 사차방정식의 근의 공식을 탐구할 수 있다. 이를 위해, 삼차방정식의 근의 공식 유도 과정을 다음과 같이 상세하게 기술할 수 있다.

④ 삼차방정식에서 치환 $z = x - \frac{a}{3}$을 통해, 이차항이 없는 방정식을 유도한다.

⑤ norm 형식의 인수분해를 이용하여 삼차방정식의 근을 1의 세제곱근들을 이용하여 나타낸다.

⑥ ④에서 얻어진 다항식과 norm 형식의 계수를 비교하여, $x^3 + px + q = 0$의 근을 구한다.

⑦ 근과 계수의 관계를 이용하여 p와 q를 계수로 갖는 이차방정식을 만든다.

⑧ 이차방정식의 풀이를 통해 삼차방정식의 근의 공식을 유도한다.

이제, 이것을 바탕으로 사차방정식의 근의 공식을 유도하기 위한, 다음과 같은 방법유추를 수행할 수 있다.

④′ 사차방정식에서 적당한 치환을 통해, 삼차항이 없는 방정식을 유도한다.

⑤′ norm 형식의 인수분해를 이용하여 사차방정식의 근을 1의 네제곱근들을 이용하여 나타낸다.

⑥′ ④′에서 얻어진 다항식과 norm 형식의 계수를 비교하여, $x^4 + px^2 + qx + r = 0$의 근을 구한다.

⑦′ 근과 계수의 관계를 이용하여 p, q, r을 계수로 갖는 삼차방정식을 만든다.

⑧′ 삼차방정식의 풀이를 통해 사차방정식의 근의 공식을 유도한다.

얻어진 방법유추를 바탕으로, 사차방정식의 근의 공식을 유도하자. 이를 위해, 임의의 사차방정식 $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$을 생각하자. $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$에 치환 $z = x - \frac{a}{4}$를 이용하면, 삼차항이 없는 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$인 꼴을 얻을 수 있다.

이제, norm 형식

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+bi-c-di)(a-bi-c+di)\\ &= a^4 - b^4 + c^4 - d^4 - 4a^2bd + 4b^2ac + 4d^2ca - 4c^2db - 2a^2c^2 + 2d^2b^2\end{aligned}$$

을 생각하자. 등식의 우변에서 $a = x$라 놓으면, 다음 식을 얻을 수 있다.

$$x^4 - 2(c^2 + 2bd)x^2 + 4c(b^2 + d^2)x - b^4 + c^4 - d^4 + 2b^2d^2 - 4bc^2d$$

이제, $P_4(1)P_4(-1) = a^2 + 2ac + c^2 - (b+d)^2$, $P_4(i)P_4(-i) = a^2 - 2ac + c^2 + (b-d)^2$임을 감안하고, $a = x$라 하면, norm 형식의 좌변은

$$(x^2 - 2cx + c^2 + (b-d)^2)(x^2 + 2cx + c^2 - (b-d)^2)$$

이 된다. 그러므로 방정식 $x^4 - 2(c^2 + 2bd)x^2 + 4c(b^2 + d^2)x - b^4 + c^4 - d^4 + 2b^2d^2 - 4bc^2d = 0$의 네 근은

$$x_1 = -(b+c+d),\ x_2 = b - c + d,\ x_3 = -bi + c + di,\ x_4 = bi + c - di$$

인 꼴이 된다. 한편, 등식

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 - 2cx + c^2 + (b-d)^2)(x^2 + 2cx + c^2 - (b-d)^2)$$

으로부터, 다음을 얻을 수 있다.

$$p = (c^2 + (b-d)^2) + (c^2 - (b+d)^2) - (2c)^2,\ q = 2c((c^2 + (b-d)^2) - (c^2 - (b+d)^2)),$$
$$r = (c^2 + (b-d)^2)(c^2 - (b+d)^2).$$

이제, p, q에 대한 식을 변형시키면, 등식 $p + (2c)^2 = c^2 + (b-d)^2 + c^2 - (b+d)^2$, $\frac{q}{2c} = ((c^2 + (b-d)^2) - (c^2 - (b+d)^2)$을 얻을 수 있다. 이들을 연립하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$c^2 + (b-d)^2 = \frac{1}{2}\left(p + (2c)^2 + \frac{q}{2c}\right),\ c^2 - (b+d)^2 = \frac{1}{2}\left(p + (2c)^2 - \frac{q}{2c}\right).$$

이제, 이들 식을 r에 관한 식과 연립하면, $r = \frac{1}{4}\left(p + (2c)^2 + \frac{q}{2c}\right)\left(p + (2c)^2 - \frac{q}{2c}\right)$를 얻게 된다. $t = 2c$라 하고, 식을 정리하면, $t^6 + 2pt^4 + (p^2 - 4r)t^2 - q^2 = 0$이 된다. 이 식은 t^2에 대한 삼차방정식이고, 삼차방정식의 근의 공식을 이용하면 $\pm u_1$, $\pm u_2$, $\pm u_3$인 꼴의 근 6개를 구할 수 있다.

이제, 방정식 $x^4 + px^2 + qx + r = 0$에 근과 계수의 관계를 이용하면, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$을 얻을 수 있다. 한편, $x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 - 2cx + c^2 + (b-d)^2)(x^2 + 2cx + c^2 - (b-d)^2)$의 우변에서 $x_3 + x_4 = 2c$, $x_1 + x_2 = -2c$임을 알 수 있다. 이때, $t = 2c$임을 감안하면, $x_3 + x_4 = 2c$, $x_1 + x_2 = -2c$는 방정식 $t^6 + 2pt^4 + (p^2 - 4r)t^2 - q^2 = 0$의 두 근임을 알 수 있다.

또한, $P(1)P(i)$와 $P(-1)P(-i)$, $P(1)P(-i)$와 $P(-1)P(i)$을 이용하여도 마찬가지로 방정식 $t^6 + 2pt^4 + (p^2 - 4r)t^2 - q^2 = 0$을 얻을 수 있으므로, $u_1 = 2c$, $u_2 = x_2 + x_4 = (b+d) + (b-d)i$, $u_3 = x_2 + x_3 = (b+d) - (b-d)i$라 할 수 있다.

이제, 방정식 $t^6 + 2pt^4 + (p^2 - 4r)t^2 - q^2 = 0$을 풀어 p, q, r로 표현되는 근을 구하여 연립하면, b, c, d를 구할 수 있다. $t^2 = k$라 하고, $k^3 + 2pk^2 + (p^2 - 4r)k - q^2 = 0$의 세 근을 α, β, γ

라 하자. 삼차방정식의 근의 공식을 이용하면, p, q, r로 표현되는 세 근 α, β, γ를 구할 수 있다.

이제, $2c=\sqrt{\alpha}$, $(b+d)+(b-d)i=\sqrt{\beta}$, $(b+d)-(b-d)i=\sqrt{\gamma}$라 하고 연립하면,

$$b=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}{2}+\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}{2}i\right),\ d=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}{2}-\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}{2}i\right),\ c=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$$

이다. 따라서 $x_1=\frac{1}{2}(-\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})$, $x_2=\frac{1}{2}(-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})$,

$x_3=\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})$, $x_4=\frac{1}{2}(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})$를 얻게 된다. □

$n=2, 3, 4$에 대해, x^n-1의 norm 형식 P_n^*과 적당한 치환을 이용하여, 이차방정식 $x^2+px+q=0$, 삼차방정식 $z^3+az^2+bz+c=0$, 사차방정식 $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$의 근의 공식을 유도하였다. 특히, 이들 유도과정을 방법유추를 바탕으로 수학적 지식의 확장의 관점에서 고찰하였다.

4. 결 론

본 연구는 수학적 지식의 확장이라는 측면에서 이차방정식, 삼차방정식, 사차방정식의 근의 공식을 고찰하는 연구로, norm 형식의 개념을 바탕으로 이차방정식의 근의 공식에 대한 방법유추를 통해 삼차방정식의 근의 공식을 유도하고, 삼차방정식의 근의 공식에 대한 방법유추를 통해 사차방정식의 근의 공식을 유도하였다.

이차방정식의 근의 공식을 유도하는 과정에 대한 분석을 통해, ① $x^2+px+q=0$에 치환 $x=y-\frac{p}{2}$을 이용하여 방정식 $y^2-k=0$를 유도하기; ② norm 형식을 이용하여 ①에서 얻어진 다항식 $y^2-k=0$의 근을 구하기; ③ ①의 치환에 대한 역치환을 이용하여, 처음 방정식의 근을 구하기 등을 얻었고, 이들 과정에 대한 방법유추를 통해 삼차방정식의 근의 공식을 유도하는 과정을 다음과 같이 추리하였다:

①′ 삼차방정식에서 적당한 치환을 통해, 이차항이 없는 방정식을 유도하기;

②′ norm 형식을 이용하여 ①′에서 얻어진 다항식 $x^3+px+q=0$의 근을 구하기;

③′ ①′의 치환에 대한 역치환을 이용하여, 처음 방정식의 근을 구하기.

얻어진 추리를 바탕으로 ④ 삼차방정식에서 적당한 치환을 통해, 이차항이 없는 방정식을 유도하기; ⑤ norm 형식의 인수분해를 이용하여 삼차방정식의 근을 1의 세제곱근들을 이용하여 표현하기; ⑥ ④에서 얻어진 다항식과 norm 형식의 계수를 비교하여, $x^3+px+q=0$의 근을 구하기; ⑦ 근과 계수의 관계를 이용하여 p와 q를 계수로 갖는 이차방정식을 만들기; ⑧ 이차방정식의 풀이를 통

해 삼차방정식의 근의 공식을 유도하기와 같은 정교화된 절차로 탐구과정을 확장할 수 있었다. 그리고 이를 바탕으로, 사차방정식의 근의 공식을 유도하기 위한, 다음과 같은 방법유추를 수행하였고, 실제로 사차방정식의 근의 공식을 얻을 수 있었다.

④′ 사차방정식에서 적당한 치환을 통해, 삼차항이 없는 방정식을 유도하기;

⑤′ norm 형식의 인수분해를 이용하여 사차방정식의 근을 1의 네제곱근들을 이용하여 표현하기;

⑥′ ④′에서 얻어진 다항식과 norm 형식의 계수를 비교하여, $x^4+px^2+qx+r=0$의 근을 구하기;

⑦′ 근과 계수의 관계를 이용하여 p, q, r을 계수로 갖는 삼차방정식을 만들기;

⑧′ 삼차방정식의 풀이를 통해 사차방정식의 근의 공식을 유도하기.

본 연구에서 방법유추를 통해 얻어진 방정식들의 근의 공식 유도 방법은 수학적 지식의 확장이라는 측면에서 의미로운 시사점과 연구 방향을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강미광 (2003). 중등교사 양성을 위한 미적분학 강좌 운영방안, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.523-540.

박한식 (1991). 교직수학 I, 서울: 대한교과서주식회사.

박혜숙 (2003). 중등교사 양성을 위한 기하 영역의 교육과정 개발, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.503-522.

박혜숙·김서령·김완순 (2005). 수학적 개념의 발생적 분해의 적용에 대하여: 추상대수학에서의 Z_n의 경우, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **44(4)**, pp.547-564.

신준식 (2003). 초등교사 양성 대학의 초등수학교육에 대한 교수-학습 프로그램 개발, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.453-464.

신현용 (2003). 교사양성 대학에서의 대수 영역의 학습과 지도, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.481-502.

신현용 (2006). 교사를 위한 현대대수학, 서울: 교우사.

에르든예프·한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

이강섭 (2003). 중등교사 양성을 위한 확률과 통계 영역의 교육과정 개발, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.561-578.

이병수 (2003). 교사양성 대학에서의 해석학의 학습과 지도, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.541-560.

이재학 (2003). 중등교사 양성을 위한 이산수학 강좌에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.579-588.

정상권 (2004). 교사를 위한 해석학, 서울: 교우사.

한인기 (2003a). 중등교사 양성을 위한 수학교육학 및 수학사 강좌에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(4)**, pp.465-480.

한인기 (2003b). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

한인기 · 신현용 (2003). 러시아의 수학교사 양성을 위한 국가 수준 교육과정에 대한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **42(5)**, pp.595-606.

현종익 (2005). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

Barbeau E. J. (2003). *Pell's equation*. New York: Springer.

Polya G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning*/이만근 외 4인 역(2003). 수학과 개연추론, 서울: 교우사.

A study on derivation of root's formulas of cubic and quartic equation by method analogy

Lyou, Ikseung
Jeonbuk Science High School, 570-911, Korea
E-mail: infgrp@hanmail.net

Shin, Hyunyong
Department of Math. Edu., Korea National University of Education, 363-791, Korea
E-mail: shin@knue.ac.kr

Han, Inki
Department of Math. Edu., Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail: inkiski@gnu.ac.kr

In this paper we study on derivation of formulas for roots of quadratic equation, cubic equation, and quartic equation through method analogy. Our argument is based on the norm form of polynomial. We also present some mathematical content knowledge related with main discussion of this article.

* ZDM Classification : E55
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90
* Key Words : method analogy, formulas for roots of equation, mathematical content knowledge