韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 22집 제 4호. 2008. 11. 417-444

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 22 No 4, Nov. 2008. 417-444

공과대학 신입생들의 함수개념 연구와 함수 영역의 교육과정에 대한 제안[1)]

김 연 미 (홍익대학교)

본 논문에서는 세 가지 관련된 분야의 연구를 통하여 우리나라 대학 신입생들의 함수 개념을 조사하였다: 대학 신입생들은 함수를 어떻게 이해하고 있는가?; 인식론적 장애를 포함한 오 개념에는 어떤 것들이 있는가?; 함수 개념은 어떤 경로를 거쳐서 획득 되는가? 등이다. 이와 함께 대학의 여러 분야에서 함수가 어떻게 정의되고 쓰이는 지를 살펴보고, 미국의 교과서들에 나타난 함수 정의와 도입을 살펴보았다. 설문조사와 이들을 토대로 함수를 대응의 관점에서 도입하는 새로운 교육과정에 대하여 수직선 테스트의 도입을 포함한 몇 가지 제언을 하였다.

I. 서 론

몇 년 전부터 이공계 대학 신입생들의 수학 및 과학 학습 능력이 저하되고 있다는 목소리들이 들리기 시작하였다. 많은 대학에서 이미 미적분학 강좌의 수준별 학습이나 일정 기준 미달인 경우에 기초 수학과목을 수강하도록 하는 제도들도 도입되는 실정이다. 이와 같은 우려는 우리나라만의 문제가 아니어서 미국의 경우에도 대학에 진학하는 신입생들과 미적분학을 수강하는 많은 학생들이 매우 취약한 함수 개념을 보유하고 있다는 다양한 연구 결과들이 보고되었다(Monk, 1992; Dubinsky & Harel, 1992; Carlson & Oehrtman, 2005). 함수는 대학에서 본격적으로 배우게 되는 미적분학(Calculus)의 기초가 되며, 함수개념의 발달이 곧 뉴턴과 라이프니츠 이래의 현대 수학이 발전해온 과정이라 해도 무리가 아닐 것이다. 그러므로 함수는 학생들이 대학에서 과학이나 공학 등 전공 분야에서 성공하기 위해서 필수적으로 익히고 사용해야하는 영역이다. 위의 연구들에 의해 밝혀진 바는 대학에 진학할 때까지 학생들이 수년간 수학을 배웠음에도 불구하고 함수개념이 기대와 같이 단순하게 이해되지 않으며 학생들의 사고 패턴은 교육과정 입안자들이 생각하는 바와는 달리 매우 복잡하다는 것을 이해하기 시작했다는 것을 뜻한다. '함수개념을 이해 한다는 의미는 단순히 공식을 대수적으로 조작해서 결과를 얻거나 정의를 암기하여 적용하는 이상을 의미하는 것으로 함수의 다양한 측면(정의, 표현, 개념들)을 수평적으로 뿐만 아니라 수직적으로도 깊이 있게 다룰 수 있는 능력을

1) This research has been conducted while the author was visiting New York University

* 2008년 10월 투고, 2008년 11월 심사완료
* ZDM 분류 : I25
* MSC2000 분류: 97C30
* 주제어: 함수개념, APO 이론, 수직선 테스트, 동시 변화적 관점

의미 한다'(Carlson & Oehrtman, 2005).

기존의 연구 결과를 토대로 본 논고에서는 다음의 세 가지를 주된 연구 주제로 선택하였다.

첫째, 대학생들은 함수의 다양한 면들을 어떻게 이해하고 있는가?

둘째, 그들이 갖고 있는 인식론적 장애를 포함한 오 개념에는 어떤 것들이 있는가?

셋째, 구성주의적 면에서 함수 개념은 어떻게 발달하며 획득되는가에 대한 이론적 접근(이하 APO 이론으로 칭함)이 그것이다.

7차 교육과정을 통하여 함수를 배운 현 대학생들은 종속의 개념과 대응의 개념을 모두 다루었다. 한편 국제간 학업 성취도 평가에서 뛰어난 성적을 보이는 한국 학생들은 유럽이나 미국 등의 학생들보다 우수할 것이라는 기대를 해보는 것도 사실이다. 그러므로 그들이 고교 교육과정을 마친 후에 함수를 어떻게 이해하고 있는지를 파악하는 것은 유의미한 작업이라 생각된다. 이를 위하여 미적분학을 배우기 직전의 대학 신입생들에게 설문조사를 통하여 그들의 함수 개념을 측정하고자 하였으며 외국의 연구 사례와도 비교하기 위하여 일부는 발표된 문제를 사용하였다.

함수는 개념정립의 긴 역사적 발달과정이나 내재된 복잡성에도 불구하고 한국 수학교육학계에서는 그동안 도입단계에서 종속/대응 개념 중 어느 쪽을 택할 것인가가 주된 관심을 받아왔다. 실제로 함수는 여러 전공분야에서 다양하게 등장한다. 그 도입 방식이 전공 영역에 따라 매우 다양한데 기존의 연구에서는 대학 진학 후의 여러 학문과의 연계성까지 고려하여 도입 방식을 고민하지는 못하였다. 본 연구의 네 번째 주제는 경제학, 심리학, 컴퓨터 공학 등 여러 분야에서 함수가 어떻게 정의되는지를 살펴봄으로써 수학 이외의 분야와의 연관성을 살펴보고자 한다. 또한 외국의 수학 교재들에서 함수가 도입되는 방식을 살펴봄으로써 함수의 교육 과정에서 오랜 논쟁의 대상이었던 함수 개념 도입 방법에 작은 견해를 덧붙이고자 한다.

본 연구를 토대로 학생들의 개념 획득의 어려움을 보다 잘 이해하고, 이를 기초로 고등 수학의 다른 중요한 주제들, 예를 들면 극한개념, 미분, 적분 개념의 연구가 활성화 되는 계기가 될 것으로 기대한다.

II. 본 론

함수는 오랜 시간을 거치면서 개념이 진화해 왔으며(Kleiner, 1989), 다양한 표현 양식을 갖고 있다. 함수의 정의, 표현들 및 이와 관련된 특징을 살펴보고 함수와 관련된 오 개념을 살펴본다.

1. 함수 개념의 다양한 면들(Aspects of the function concept)

1) 종속으로서의 함수 개념

한 변화하는 양의 값(y)이 다른 변화하는 양의 값(x)에 의존할 때, 혹은 y값이 x값에 의하여 완

전히 결정되는 경우 y를 x의 함수라고 부르는 개념이다. 이것은 원의 넓이가 반지름에 의하여 결정된다든지, 물이 끓는 온도는 고도에 의해 결정 된다 등 두 변수 사이의 종속 관계를 표현할 때 필요한 함수의 핵심 개념이다. 이 개념은 현재 대학생들이 함수를 배웠던 7차 교육과정에서는 [7-가]단계에서 '비례관계'를 바탕으로 변하는 두 양 사이의 종속관계로 도입 되었다. 그런데 '비례관계'로 함수 개념을 도입하면서 '정의역', '치역', '공역'과 같은 집합 개념을 함께 사용함으로써 함수 개념을 일관되게 설명하기 어려운 상황도 벌어졌다. 7차 교육과정의 7-가 단계, 8-가 단계에서는 정비례, 반비례, 일차함수를 위주로 다룬다. 그리고 이러한 접근은 주로 독립변수 x를 포함하는 공식이나 표현을 포함한다. 그러나 함수를 이렇게 제한적인 맥락에서 처음 접하는 학생들은 고등학교에서 대응 관계로 함수 개념을 확장한다든가(조영완·양재식, 2003), 둘 이상의 공식을 포함하는 예들을 접할 때 혼란을 겪을 수도 있다(Norman, 1992; Vinner & Dreyfus, 1989).

2) 두 집합간의 대응관계(correspondence between two sets)로 함수를 정의하는 것은 1837년 Dirichlet 에 의한 함수의 정의를 따르는 것으로 우리나라의 경우 7차 교육과정에서 [10-나] 과정에서 도입되었다. 한편 새로운 교육 과정에서는 [7-가]과정에서 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'를 이용하여 도입된다(교육과정 평가원, 2008). 이렇게 함으로써 연속적으로 변화하는 두 양 사이의 관계뿐만 아니라, 임의의 이산적인 두 양 사이의 관계도 주목할 수 있게 하며 중, 고등학교 함수 개념 사이에 관련을 지어주게 된다. 또한 이 정의는 정의역과 공역의 개념, 일대 일 대응이나 전사함수의 개념소개를 용이하게 해준다는 장점이 있다. 함수를 대응관계로 생각할 때, 두 영역을 화살표를 이용해서 연결하는 식으로 사고 과정을 시각적으로 나타내는 방법을 사용하기도 한다. 이러한 다이어그램들은 교과서에도 소개 되고 있다. 그러나 이 방법은 함수의 합성이나 집합론의 간단한 증명 등을 이해하는데 도움을 주지만 초보자들의 경우에는 화살표를 이용한 다이어그램을 유연하게 사용하지 못한다는 조사 결과가 있다(Selden & Selden, 1992). 대응의 개념은 함수 개념 진화과정에서 보다 현대적인 개념이지만, 대응의 개념만으로 함수를 배운 경우(즉 독립 변수와 종속 변수의 의미를 모르는 경우)에 다 변수 함수나 매개 변수 식을 배울 때 학생들이 어려워하는 사례가 목격 된다.

3) 순서쌍으로의 함수 개념

함수를 순서쌍(ordered pair)으로 정의하는 형식적 정의는 1939년 처음 소개되었으며, Bourbaki 정의라고 부르기도 한다. [10-가] 과정에서 순서쌍은 함수의 그래프로 정의되고 있다. 많은 수학교육 연구자들은 이 접근이 너무 추상적이므로 대학 이전의 과정에서는 도입하지 말 것을 주장한다(Sfard, 1991). 이 정의를 사용한 경우 학생들은 정의를 무시하는 경향을 보이며- 비록 정의를 암기는 하고 있을지라도- 자신들의 부정확하고 직관적인 함수 개념을 사용한다는 것이 밝혀졌다(Vinner & Dreyfus, 1989; Sfard, 1991; Schwartz, 1989). 그러나 물리적 응용이나 실수에 국한된 단계를 넘어서 고등 수학과 컴퓨터 공학을 살펴보면, Bourbaki 식 정의 수준에서의 추상화가 요구되는 영역이 다양

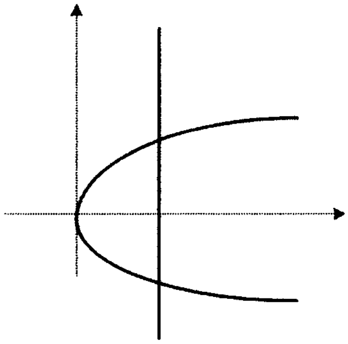
하게 나타나는데, 투링 머신(turing machine)이나, 그래프 이론, 데이터 베이스, 자동장치(automata) 등이 그 일부의 예가 될 수 있다. 그러므로 추상적인 접근은 가능하면 피해야 한다는 견해는 언제까지라도 지속될 수 있는 것이 아니며, 특히 수학을 전공하는 학생들에게는 그러할 것이다(Selden & Selden, 1992). 미국의 교과서들 중에는 함수 도입의 초기부터 순서쌍 (혹은 관계)를 이용하여 함수를 정의하는 교재도 있다(Cummins et al., 2006).

4) 함수의 표현(representation)과 관련해서는 그래프, 표, 대수식(algebraic equation)등을 생각할 수 있다. 이 중 그래프는 함수(예로 $R \rightarrow R$인 경우)를 표현하기위해 광범위하게 사용되고 있으며 시각적 이미지는 함수의 증감, 볼록 성, 최대, 최소, 변곡점 등을 쉽게 설명할 수 있게 해 준다. 함수와 관련된 표현으로 대수식이 가장 빈번히 사용되지만 외국의 경우는 함수의 초기 도입 단계에서 타 과목과의 연계성을 통한 자연스러운 도입을 위해서도 표를 이용한 도입을 고려하는 방법(예를 들면 과학이나 사회 과목에서는 월 별 강수량이나 지역의 인구 분포 등을 표로 나타내고, 이는 대응으로서의 함수의 훌륭한 예가 된다)에도 많은 관심을 기울이고 있다(Foster, Gordon, Winters & Rath, 1995; Smith, 1993).

5) 함수의 조작적 성질과 구조적 성질과 관련하여서는 함수를 활동(action), 과정(process), 대상(object)으로 보는 관점이 받아들여지고 있다(APO 이론)(Dubinsky & Harel, 1992; Sfard, 1991). 우리는 이 개념들을 2장에서 자세히 다룰 것이다.

6) 이 밖에도 함수 개념을 다룰 때 함수의 임의성과 일가 성(one-valuedness)을 빼놓을 수 없다. 임의성이란 함수가 정의된 집합과 관계(relationship) 모두에 적용되는 성질로 함수가 구체적인 공식이나, 특별한 형태를 갖는 그래프에 의해서 주어질 필요가 없음을 의미한다. 또 함수가 정의된 집합이 수집합일 필요도 없는 임의의 집합이 정의역이 될 수 있는 것이다. 한 예로 공간에서의 회전을 생각하면 이 때 정의역은 평면위의 점들이 된다. 또한 Dirichlet함수(유리수에는 1을 대응시키고 무리수에는 0을 대응시키는 함수)는 함수의 임의성을 보여주는 대표적 예라 하겠다. 그러나 함수 개념의 역사적 발달 과정에서 임의성이 등장하게 된 배경이나 Euler, D'Alembert, D. Bernoulli 등의 수학자들의 긴 논쟁과 혼란의 시기 등을 고려해보면(Kleiner, 1989) 많은 고등학생과 대학생들이 함수의 임의성에 대하여 어려워 할 것이라고 짐작할 수 있다.

함수의 일가 성은 학생들이 정의를 배우는 과정에서 많이 강조되는 성질이다. 함수 여부를 판단하기 위해 수직선 검사(vertical line test)를 통해 일가 성을 확인할 수 있다. 우리의 교육과정에서는 소개되지 않았지만 많은 외국의 교과서들에서 함수의 일가 성을 확인하기 위하여 사용하는 검사법으로 우리 교육과정에도 도입되어야 한다고 생각한다. 그러나 이해가 따르지 않는 경우 극좌표로 정의된 함수의 경우에도 수직선 검사를 적용하는 교사들의 사례도 보고된다(Norman, 1992).



<그림 1> 수직선 테스트

우리는 이상에서 함수 개념의 다양한 면들을 살펴보았다. 학생들이 이러한 개념들 중 몇 가지를 불완전하게 소유하고 있는 경우라면 한 관점에서 다른 관점으로의 질적인 변화는 상당히 어려울 수도 있다. 반면에 일상적인 대수적 문제나 미적분학의 문제들을 효과적으로 푸는 데만 집중한다면 함수 개념의 다양한 측면을 무시할 수도 있을 것이다. 이러한 여러 개념들 사이의 관계나 변화는 전문가들의 입장에서는 단순하게 보이겠지만 함수를 처음 접하는 학생들에게는 여러 오 개념의 요인이 발생할 여지를 포함하고 있다. 또한 현대 수학과 그 응용분야들을 고려한다면 위에서 언급한 함수의 풍부한 개념을 통달하는 것이 필요하다.

2. 함수개념 이해의 어려움과 원인 분석

학생들과 교사들에 대한 함수 개념을 조사한 연구들에 의하면 그들이 다양한 오 개념과 장애를 공통적으로 갖고 있다는 것이 알려졌다. 이러한 관찰은 여러 나라- 프랑스, 영국, 이스라엘, 미국 등에서 광범위하게 이루어졌다(Selden & Selden, 1992). 이 장에서는 학생들에게서 나타나는 있는 오 개념의 원인을 몇 가지 범주로 나누어보고자 한다. 물론 오 개념이나 장애의 원인은 복합적이고 상호적일 가능성이 높으므로 스마트 폭탄(smart-bomb)처럼 한 가지 요인으로 귀속시키는 것은 무리가 있을 수 있지만 큰 갈래로 나누어 분석하는 시도는 교수 방법론의 계획과 개발을 위해서도 필요할 것이다.

1) 인식론적 장애(epistemological obstacles)

인식론적 장애란 함수와 같이 복잡한 개념에 포함된 내재적(inherent) 어려움이다. 어떤 장애가 개인과 한 두 사람의 문제가 아니라, 보다 광범위하며 시간과 문화를 초월해서 나타난다면, 이것을 인식론적 장애라 부를 수 있을 것이다(Sierpinska, 1992). 이러한 어려움은 함수 개념의 역사적 진화과정에서 자주 모습을 드러냈으며 학습자에게도 인지적 어려움을 제공한다. 그러므로 함수를 처음 접하는 학생들이나 혹은 이전의 함수 개념을 새로운 아이디어로 대체해야 하는 경우에 나타날 수 있

다. 예를 들면 대수 방정식을 배운 후에 미지수 x의 개념만 존재하는 학생이 동일한 x를 사용하여 이것을 변수의 개념으로 확장시켜야 한다든지, 혹은 독립 변수와 종속변수의 의미, 변화하는 순서(order)에 대한 혼란 등을 들 수 있다. 한 예로 미국의 중등 교사에게 $2x = y^2$ 식을 주고 x가 y^2의 함수인가를 물었을 때 그 교사는 y가 x의 함수여야 하므로 아니다 라고 답한 사례가 보고된다 (Norman, 1992).

외국의 사례에서는 Dirichlet 함수를 접한 대부분의 학생들은 이를 함수의 예로 받아들이지 못하는데 18세기 많은 수학자들의 혼란을 생각하면 학생들에게는 오히려 자연스러운 현상이라 할 수 있다.

2) 개념 정의(concept definition)와 개념 이미지(concept image)와의 차이에서 발생하는 오류

교수 현장에서 볼 수 있는 여러 오류들 중에는 함수에 대한 수학적 정의와 학생들이 문제 해결을 위해 사용하는 개념 이미지 사이의 불일치에서 비롯된다고 여겨지는 것들이 종종 존재한다. Vinner는 수학의 구조와 개념 획득이라는 인지 활동 사이에는 피할 수 없는 갈등이 존재한다고 주장한다. 수학에서 정의를 쓰는 데는 한 줄이면 가능하지만 추상적으로 쓰인 정의를 풀어서 재구성하여 자신의 것으로 만들어가는 과정은 학생들에게는 매우 힘든 인지적 과제인 것이다. 실제로 문제 해결 과정에서 학생들이 개념 정의 보다는 개념 이미지-특정한 개념과 관련하여 자신들이 알고 있는 예들, 반례들, 교사들의 설명, 정리나 관련된 사실들의 총합으로 구성됨-를 보다 빈번하게 사용한다는 연구 결과가 있다(Tall & Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1989).

한편 개념 이미지를 일단 형성하게 되면 수학적 정의는 비 활성적으로 되거나 변형 될 수도 있다. 예를 들면, 함수는 하나의 공식에 의해서만 주어져야 한다고 믿는다든지, 입력 값과 출력 값은 반드시 수(number)여야 한다는 믿음, 함수는 조작을 할 수 있는 어떤 것이라는 믿음, 독립 변수가 변할 때 종속 변수도 변해야 하므로 $y = k$의 그래프는 함수의 그래프가 될 수 없다는 믿음, 함수의 개념과 일대일 대응의 정의를 혼란스러워하는 경우들이 있다. 그러나 학생들이 중, 고등학교나 대학의 수학 과목에서 접하는 함수의 예들은 하나의 공식으로 주어지는, 일차함수, 이차함수, 삼각함수 등 좋은 성질을 가진 그래프들로 이러한 예들이 학생들의 개념의 전형(prototype)을 만드는 것이다. 그러므로 학생들이 함수에 대하여 갖는 기대는 한편 생각하면 이해할만하다.

3) APO 이론과 이의 심화과정에서 발생하는 장애

함수 개념을 포함하여 수 개념이나 도형의 개념이 주체의 내면에서 심화되는 과정을 여러 학자들은 구성주의적 관점에서 활동(action)개념 - 과정(process)개념 - 대상(object)개념 의 순서로 위계화하였다(Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Sfard, 1991; Carlson, 2005).

대학 수준 이상의 고급 수학에서 성공적이기 위하여 함수 개념은 초기의 활동 개념에서 진화하여 과정 개념을 넘어 대상 개념으로까지 발전해야 한다는 것이 공통적인 의견이다. 그러나 외국의 몇 연구에 의하면 A학점을 받는 미적분학 수강 대학생의 상당수가 과정 개념에 머물러 있다고 한다

(Carlson, 2005). 그리고 각 단계를 뛰어넘는 데는 교육자들이 기대하는 것 이상의 시간과 노력이 요구된다는 사실이다. 함수 개념이 그만큼 복합적이고 어렵다는 의미일 것이다. 이제 각 단계의 특징과 이 때 발생할 수 있는 오류를 살펴보자.

3-1) 함수의 활동 단계(Action stage of function)와 이 단계에서 발생하는 오류

"활동"의 의미는 함수가 운동을 묘사한다는 뜻이 아니라 함수의 정의로부터 함수 값을 얻기 위하여 액션(action)이 요구된다는 의미이며(예를 들면 $f(x)=2x^2-1$인 경우 x를 제곱해서 2를 곱한 뒤 1을 뺀다는 등) 함수개념의 진화론적 관점에서는 가장 하위수준이다. 함수를 이 관점에서만 배운 학생들은 공식을 일종의 명령으로 간주할 것이고, 대수적 조작단계에 머물 것이다.

한 번에 한 단계씩 사고할 수 있다는 의미에서 이것은 정적인 개념이다. 구체적인 공식을 통한 계산을 넘어 보다 광범위하게 해석할 수 없는 한계로 인해 오 개념이 발생할 수 있는데 몇 가지 예들은 다음과 같다.

◦ 구분연속인 함수를 여러 개의 다른 함수로 간주한다.

◦ 하나의 함수가 알고리듬에 따라 다른 공식으로 표현될 수 있다는 가능성을 고려하지 못한다. 예를 들면

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x}$$

와

$$f_2(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... \quad (|x| < 1)$$

는 주어진 구간에서 동일한 함수를 나타낸다.

◦ 두 함수의 합성을 대수적 식에 의해 주어진 대로 입력 -> 출력 -> 입력의 순서로 계산할 수는 있다. 그러나 이 학생들은 표나 그래프 등 다른 표현이나 맥락에서 주어진 함수의 합성과 관련된 문제를 해결하는데 어려움을 느낀다.

◦ 역함수를 구하는 문제에서도 이 단계의 학생들은 단순히 x와 y 를 바꾼 다음 y 에 대해서 정리하는 수준을 넘지 못한다. 이들은 역함수의 그래프를 직선$y=x$에 대하여 대칭시켜 구할 수 있다는 사실을 알고리듬과 절차만으로 이해하는 수준에 머물게 된다. 답을 구하는 기계적 절차만이 가능한 단계이기 때문에 그러한 과정이 왜 의미가 있는지에 대한 이해가 병행되지 않는다면 조금 더 복잡한 사고를 요구하는 상황에서 그들은 당황하게 될 것이다.

◦ 입력과 출력의 과정을 전체 정의역으로 확장시키지 못하고 한 점에서의 국소적 절차에 한정되므로 미적분학에서 요구되는 고차적 사고가 불가능하며 함수에 대한 동적인사고와 추론이 어렵다.

3-2) 함수의 과정 단계(process conception stage of function)에서 발생하는 오류

주어진 공식이나 대수적 알고리듬에서 자유로워지고 함수를 총체적으로 다룰 수 있을 때, 활동 개념이 내면화 되었을 때 함수의 과정 개념이 세워진 단계라고 할 수 있다. 이 수준에서는 합성함수나 역함수를 다룰 때도 공식에 x를 대입하고 y를 구해가는 절차적 단계나 역함수의 경우라면 x와

y를 바꾼 다음 y에 대해서 푸는 기계적 단계에서 벗어나 함수의 입력 값과 출력 값 전체의 집합을 (혹은 그래프 전반을) 광역적으로 볼 수 있는 능력이 생기는 단계라 할 수 있다.

이 단계에서는 대상(x)에 어떤 조작을 가해 새로운 대상(출력 값)을 얻는 과정을 총체적으로 볼 수 있는 능력이 생기며 과정 개념이 형성됨에 따라 학생들은 유연하게 함수를 합성하거나 역변환 시킬 수 있고 일대 일이나 전사함수(onto)의 개념들에도 보다 익숙해진다(Sfard, 1991). 예를 들면 실수 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)=2x^2-3$이 주어질 때 활동 관점의 학생은 이 식을 각각의 x 값에 대하여 y 값을 구하는 절차로 보지만 과정 관점을 소유한 학생은 f가 정의된 식을 볼 때 입력 값과 출력 값의 집합을(혹은 그래프) 전체적으로 볼 수 있다(Carlson, 2005).

한편 과정 개념은 활동 개념에 비하여 심화된 것이지만 이 과정 개념도 생물학적 성숙처럼 자연스럽게 발생하지도 않으며, 교육과정의 기간이 길다하더라도 여기에 큰 영향을 끼치지도 않는다는 점이다(Even, 1988). 학생들의 과정 관점을 키우기 위해 어떤 경우에는 함수를 기계로(function machine) 소개하는 경우가 종종 있는데 어린 학생의 경우 컴퓨터가 하는 일을 문서처리에 국한되어 알고 있는 경우라면 큰 효과를 갖지 못하다는 것이 학자들의 지적이다(Seldon & Selden, 1992).

함수의 과정 관점은 미적분학의 중요한 개념들- 극한, 도함수, 부정적분 등-을 이해하는데 필수적이다. 예를 들어 함수의 극한의 정의를 생각해 보자. 수많은 학생들이 $\epsilon-\delta$가 처음 등장하는 이 정의를 얼마나 어려워하는가!

정의 극한

f가 c의 근방에서 정의되어 있다고 가정하자. c와 L은 실수다. x가 c로 접근할 때 f가 극한값 L을 갖는다는 것은, 주어진 임의의 양수 ϵ에 대하여, 양수 δ가 존재하여 모든 x에 대하여 $0<|x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\epsilon$이 성립하는 경우다. 이 때 $\lim_{x\to c} f(x)=L$이다.

이 개념을 이해하기 위하여 학생들은 (1) 출력 값 집합 혹은 그래프 상에 나타난 y 값의 범위를 통합적으로 볼 수 있어야 하며 (2) 함수과정을 역으로 사고해서(y좌표에서 x좌표로 혹은 출력 값에서 입력 값으로) (3) 대응되는 입력 값 집합에서 c를 중심으로 한 δ값에 대한 아이디어를 떠올려야 할 것이다.

그러나 불행히도 대부분의 학생들이 이 정의를 배우면서 수학에 대한 공포심을 갖게 되는 경우를 여러 번 목격하였을 것이다.

그러나 또 다른 갈래의 연구 중에는 교수방법의 개발을 통하여 학생들에게 보다 영속적인 과정 개념을 갖게 할 수 있다는 긍정적인 보고도 발표되고 있다(Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992; Slavit, 1997). 다만 이 연구들 중에는 컴퓨터 프로그램이나 그래프 계산기 등을 이용한 수업의 개발들이 많다는 점을 밝혀둔다.

<표 1> 활동개념과 과정 개념

활동 개념	과정 개념
함수 개념은 구체적인 공식이나 규칙, 혹은 계산과 연결되어 있으며 매 단계의 계산을 요구한다.	함수 개념은 일반화된 입력-출력의 과정이고 전체적인 과정을 사고할 수 있다.
"해답"은 공식에 의존한다.	"과정"은 공식과는 독립적이다.
합성함수는 매번 x에 대한 공식에 대입하는 것이다.	함수의 합성은 입력-출력-입력 과정을 통합하는 것이다.
역함수는 대수적 문제이다.	역함수는 출력변수 집합에서 입력변수 집합으로 보내는(mapping) 역과정이다.
함수는 정적으로 이해된다.	함수는 동적으로 이해된다.

이상에서 살펴본 대로 과정 개념은 활동 개념에서 보다 자유로워지고 심화된 상태다. 또 학자들은 이 단계를 미적분학에서의 높은 성취를 위해 필수적으로 여긴다. 그러나 이 수준에서도 몇 가지 함수 개념에 대한 오 개념이 나타난다. 예를 들면 어떤 학생들은 규칙(rule)으로 정의된 함수(대수적 공식이 아니라)는 구체적인 조작을 할 수 있는 경우가 아니면 함수가 아니라고 생각한다. 또 다른 경우는 함수의 입력과 출력 값은 반드시 수여야 한다고 믿고 있으며, 혹은 함수의 그래프는 반드시 연속이어야 한다고 믿는다. 그러나 이 과정 개념조차도 함수를 대상으로 다룰 수 있는 능력인 대상 개념에 비하면 일반적으로 하위 개념으로 간주된다. 이제 함수 개념의 구조화의 마지막 단계를 고찰해 보겠다.

3-3). 함수의 대상화 단계(Object concept stage of function)

앞의 활동이나 과정 개념이 함수의 조작적 성질과 관련이 있다면 대상으로서의 함수개념은 구조적인 면과 관련이 있으며 함수개념 발달에서 기대할 수 있는 가장 높은 수준이다. 학생들이 함수를 미분하고 부정적분을 구하는 것은 함수를 대상으로 다룰 수 있는 능력을 요구하는 것이다. 그러나 이와 같은 개념이 형성되는 데는 아주 많은 시간이 필요하며 대부분의 학생들은 기계적으로 연산을 수행할 뿐 자신들이 함수를 대상으로 다루고 있다는 사실조차 깨닫지 못하고 있다(Selden & Selden, 1992).

함수의 대상 지향적 관점을 현존하는 몇 가지 이론을 중심으로 논의하고자 한다. 이 이론들은 각각 Sfard(1991), Carlson(2002), Slavit(1997) 등에 의해 독자적으로 주장되었지만, 구획된 것이 아니고 구조적인 큰 틀 안에서 보면 내적으로 연결되어 있고, 통합 될 수 있으며, 다만 구조화의 목표를 달리한 것에서 비롯된 것으로 이해해야 할 것이다. 이 관점들은 각각 함수의 대응적 관점(correspondence view), (변수들의)동시 변화적 관점(covariational view), 속성 지향적 관점(property oriented view)으로 부르겠다.

∘ 함수의 대응적 관점

과정 개념이 심화되고 내면화 될 때 그것은 함수의 대상 개념으로 진입하는 통로를 열어준다. 그런데 활동 개념에서 과정 개념으로의 발전이 조작적 측면에서 볼 때 점진적이고, 양적인 내면화라면 과

정 개념에서 대상 개념으로의 변화는 질적인 도약이다(Sfard, 1991). 이것은 이제 구조적으로 완전히 새로운 시각으로 함수를 보는 능력을 의미한다. 예를 들어 $2(x+3)-5$라는 식이 있을 때 조작적 측면에서 이 식을 본다면 이것은 다양한 출력 값을 주는 하나의 알고리듬으로 간주할 수 있지만, 다른 한편으로는 그 자체로서 미지수 x의 어떤 고정된 값 혹은 계산의 결과를 나타내는 하나의 독립체(entity)인 것이다. 대수를 배우는 학생들이 식의 계산의 결과를 놓고 혼란스러워하는 경우가 종종 목격 된다. 예를 들면 중학생들의 경우 식의 계산 결과가 $2a-3b$인 경우 계산이 끝나지 않았다고 생각한다. 본 연구 중에 중학교 학생들과의 면담 중 $f(x)=x^2+x+1$의 식을 주고 $f(x+2)$의 값을 구해보라는 문제에 소수의 학생들만이 $f(x+2)=(x+2)^2+(x+2)+1=x^2+5x+6$으로 답했지만 어떤 경우에는$x^2+5x+6=0$, $x=-2,-3$으로 답한 학생들도 있었다. 무언가 값을 얻어야만 계산이 끝났다고 믿는 것이다. Davis는 이를 process-product dilemma 라고 부른다(Davis, 1975).

함수를 과정으로 한정시킨 데서 벗어나서 연산자의 작용을 받는 벡터 공간 상의 원소로 받아들이는 지적인 도약을 Dubinsky는 Piaget(1977)등을 따라서 반영적 추상화(reflective abstraction)를 통해서라 부르고(Dubinsky & Harel, 1991), Breidenbach 등은 요약화(encapsulation)라 칭한다(Breienbach et al., 1992). 한편 Sfard는 수학 개념의 양면성(dual nature)을 언급하며 조작적(operational) 측면으로 과정 개념을, 그리고 구조적 측면(structural)으로 대상 개념을 들고 있다. 현재의 수학 교육 연구 분야에서는 구조적인 개념을 일반적으로 상위개념으로 취급하고 있지만 조작적 개념의 성숙이 구조적 개념의 획득을 위해 필수적이라는 것이다. 그리고 구조적 개념은 위계적인 세 단계; 내면화(interiorization), 응축화(condensation), 추상적 개념의 구체화(reification)라는 세 단계를 거쳐서 발생한다고 설명한다. 여기서 응축화란 많은 양의 정보가 하나의 실체(entity)속에 축적되는 것으로, 그 결과로 인지적 긴장을 줄여주고 문제를 효율적으로 해결하도록 도와준다. 또한 추상적 개념의 구체화란 (1)함수에 작용하는 여러 종류의 과정들, 예를 들면 합성함수나 역함수, 일대일 대응관계, 전사함수 등의 성질들을 잘 이해하고 설명할 수 있으며, (2)미분 방정식이나 매개변수 방정식과 같이 함수가 포함된 문제를 해결할 때 능숙한 솜씨를 보이고 (3)현대적 의미의 함수개념을 이해하여 순서쌍을 함수로 받아들일 수 있는 능력 등을 포함한다.

Sfard가 주장하는 교수 방법론적 원리를 중 하나는 새로운 개념을 결코 추상적인 (혹은 구조적인) 설명을 통해 도입하지 말 것을 주문한다. 비록 새로운 개념을 구조적으로 도입할지라도 학생들은 이 정의를 조작적 방법으로 해석하는 경향이 있다는 것이다(Vinner & Dreyfus, 1989; Sfard, 1991).

∘ 변수들의 동시 변화적 관점(covariance view)

위의 관점과 관련 있으면서 함수의 과정 개념을 기반으로 발전되는 개념 중 하나로 Carlson 등은 동시 변화적 관점을 들고 있다. 이것은 동역학적인 함수관계를 탐구할 때, 예를 들면 속력이 시간에 따라 어떻게 변화 하는 가라든지, 혹은 물병에 물을 채울 때 물의 높이가 시간에 따라 어떻게 변화하는가 등을 고려할 때 부딪치는 문제들이다. 즉 동시 변화적 추론능력이란 독립변수와 종속변수가 함께 변화할 때 그 변화하는 양식을 이해하는 능력을 의미한다고 볼 수 있다. 또 그러한 변화를 통

합(coordinate)해 가면서 학생들이 동역학적인 함수관계를 나타내는 그래프의 형태에서 중요한 특징을 이해하고 해석할 수 있는 능력도 포함한다. Carlson 등에 의하면 함수에 대한 이러한 관점은 미적분학의 중심 개념들, 평균 변화율, 볼록 성, 변곡점 등을 이해하는데 필수적이라고 주장한다(Carlson, 2005;, Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002).

∘ 함수의 속성 지향적인 관점(property oriented view)

Slavit은 함수의 대상화에 이르는 다른 경로로 속성 지향적 관점을 도입하였다(Slavit, 1997). 이것은 동시 변화적 추론 능력처럼 두 변수가 변화하는 양식보다는 변수들이 변화한 결과로 나타나는 속성 혹은 예들이 공유하는 불변의 특질에 더 큰 무게를 둔다는 점에서 차이가 있다. Slavit은 함수의 속성을 광역적 속성과 지역적 속성으로 나누어 분류하였으며, 광역적 속성들은 대칭성, 주기성, 단조성, 수평 점근선 등을 포함하고, 지역적 속성들은 극점, 변곡점, 첨 점(cusps), 수직 점근선, 절편 등을 포함한다(이러한 주제들은 대학 미적분학 과정에서 깊이 있게 다루어지므로 신입생을 대상으로 한 본 연구의 설문 문항으로는 제외하였다.)

∘ 관점의 통합

위에서 소개한 이론들은 다른 관점에 의하여 설명될 수도 있을 것이다. 예를 들어 일대일 관계, 역함수, 전사함수 등은 함수의 속성 적 관점보다는 입력 값과 출력 값 사이의 대응관계라는 측면에서 바라보는 것이 더 타당하다. 또 대칭성, 절편, 극값, 첨 점 등의 속성은 대응관계 보다는 함수의 증가성을 고려할 때 자연스럽게 연결될 것이다. 한편 (두 변수의) 동시 변화적 관점은 미적분의 중심개념들- 극한, 순간 변화율, 변곡점 등을 이해하기 위하여 요구되는 관점이다. 그러므로 위의 세 관점들이 함수의 대상화를 설명하는 세 가지 다른 측면으로 유기적으로 연결되어 있는 상호 보완관계라고 생각할 수 있다.

함수의 대상 지향적 관점을 획득한 학생은 어떤 특별한 알고리듬에 의존하지 않고도 함수를 다루고 탐구할 수 있을 것이다. 그들은 구체적인 알고리듬 보다는 증가율과 같은 함수의 광역적 운동 양식이나, 지역적 성질들 사이의 관계, 입력 값과 출력 값 사이의 전반적인 관계 등을 바라볼 수 있게 된다. 그 뿐 아니라 이 단계의 학생들은 함수의 활동/대상 의 양면성을 초월한 이해가 가능하므로 함수를 활동/대상 모두로 바라볼 수 있는 유연성을 가지게 된다(Gray & Tall, 1994)[2].

3. 여러 학문 분야에 등장하는 함수의 정의들과 미국의 수학 교재에 나타난 함수 정의

그동안 함수 영역에 대한 교육과정상의 논의 중에는 도입 단계에서 종속 개념과 대응 개념이냐를 놓고 많은 토론이 있어왔다. 함수의 내재적인 문제 이외에도 실제로 학생들이 대학에서 다양한 전공을 선택할 때 함수가 어떻게 정의되고, 쓰이는지를 알아보는 것도 수학의 응용 면에서 중요하다고 생각된다. 그런 의미에서 경제학, 심리학, 통계학 및 컴퓨터 공학에서 사용되는 함수의 정의 들을 소

2) 그들은 이를 procept라고 부른다

개하고 외국의 수학 교과서(중, 고등학교 및 Calculus 교재들)에 나타나는 함수의 정의를 살펴본다.

1) 다양한 전공 분야에 등장하는 함수 정의

먼저 **경제학** 교재를 살펴보자.

'한 변수가 다른 변수의 값에 직접적으로 영향을 미치거나 이를 결정할 때 인과관계(causal relation)가 있다고 한다. 이러한 인과관계를 결정하는 변수를 독립변수라 하고, 그 영향을 받는 변수를 종속변수라 한다. .....(중략) 두 경제 변수의 관계를 설명하는 대부분의 그래프는 한 변수의 값이 다른 변수의 값에 영향을 미치거나 그 값을 결정하는 인과관계를 설명한다'(김재영 외 역, 2008).

'...(중략)...수요의 법칙을 수리적으로 표현하면 다음과 같다.

$Q^D = f(P)$, (Q^D는 P의 함수라고 읽는다.) Q^D는 한 상품의 수요량, P는 그 상품의 가격을 표시한다. '함수란 한 변수의 값이 결정되면 다른 변수의 가격이 유일하게 결정되는 관계를 말한다' (김대식 외, 2007).

심리학 분야는 어떠할까?

'...(중략)... 대부분의 심리학자들은 인과관계에 관한 질문에 응답하기 위해서 실험법을 사용한다(예를 들면 알코올과 공격성의 관계). 여기서 알코올은 독립변수이다. 독립변수는 여러 가지 수준에서 실시될 수 있다. 실험에서 측정된 결과는 종속변수라 불린다. 심리학자들은 복잡한 실험설계를 사용해 독립변수의 효과를 결정 한다'(김현택 외, 2006).

한편 한 **통계학** 교재에서는 종속변수와 독립변수를 다음과 같이 정의하고 있다.

실험: 한 변수가 다른 변수에 미치는 효과를 알기 위하여 설계된 연구

종속변수: 값이 측정(혹은 관측)되는 변수

ANOVA[3]에서 종속변수는 계량적 변수(예를들면 청량음료 소비, 시험 성적, 혹은 문서 입력 시 걸리는 시간 등)이다.

독립변수: 종속변수에 미치는 효과를 알기 위하여 관측되거나 통제되는 변수

ANOVA에서 독립변수는 (결혼 여부와 같은) 정성적 변수거나 혹은 연령대 같은 계량적 변수이다(통계학, 2006).

자동장치(automata)에서는 함수를 어떻게 정의하는지 살펴보자.

'A **function** is a rule that assigns to elements of one set a unique element of another set. If f denotes a function, then the first set is called the **domain** of f, and the second set is its **range**'(Linz, 2001).

그 밖에 **데이터베이스 교재**에서는 함수를 다음과 같이 정의한다.

'For every element in the attribute A, there is a unique corresponding element in the attribute B'(O'neil & O'neil, 2001).

3) ANOVA: 두 개 이상의 표본 평균을 동시에 비교하는 기법인 분산분석(analysis of variance)

수학의 사촌뻘 되는 **물리학**에서는 일곱 가지 기본 단위(길이, 질량, 시간, 온도, 전류, 광도, 몰) 등을 이용하여 힘, 운동량, 속도, 가속도, 중력, 전기력, 자기력 일 등과 관련된 **물리 법칙**(혹은 관계식)을 유도하므로 함수라기보다는 법칙이 올바른 표현으로 보인다.

그 외에도 전자 공학 분야에서는 독립 변수/종속 변수라는 용어보다는 전공 특성상 입력 값/출력 값이 일반적으로 사용되고 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 함수는 여러 전공분야에서 다양하게 나타난다. 그리고 사회학이나 심리학, 경제학 등의 실험 과학 분야에서는 변수들 간의 인과관계를 설명하는 데는 종속의 개념으로 충분할 수 있다.

한편 외국의 수학 교과서들은 어떠할까?

2) 미국 중, 고등학교 교재들에 소개되는 함수 정의

다음은 미국의 대수 II 교과서와 Calculus 교재에서 발췌한 함수의 정의이다.

'A **function** is a rule that establishes a relationship between two quantities, called the input and the output. For each output, there is exactly one output - even though two different inputs may give the same output' (Foster, Gordon, Winters, & Rath, 1995).

여기서는 대응이나 종속이라는 용어 대신에 규칙(rule)을 사용하였고, 독립변수/종속변수 대신 입력 값/출력 값의 용어를 사용하였음을 알 수 있다.

우리의 중학교 1학년 정도에 해당하는 다음 교재도 비슷한 정의를 하고 있다.

'A **function** is a relationship that assigns exactly one output value to each input value. The **input value** is also called the **independent variable**. The **output value** is also called the **dependent variable**. The **domain** of a function is all possible input values. The **range** of a function is all possible output values(Illingworth et al., 2008).

한편 미국에서 많이 이용되는 대학 선수학습용 미적분학 교재(Finney et al, 2007)에서는 함수의 도입을 다음과 같이 한다.

(1) 한 변화하는 양의 값(y)이 다른 양의 값(x)에 의존하는 경우들이 종종 있다(예들의 소개한다).

(2) 위에서 언급한 y를 **종속변수**로, x를 **독립변수**로 부른다.

(3) 함수를 정의한다. 'A **function** from a set D to R is a rule that assigns to each element in D a single element in R.

(4) 부연 설명으로 다음을 덧붙인다. 'Thus a function is like a machine that assigns an **output** to every allowable **input**'.

여기서도 입력 값/출력 값과 독립변수/종속변수가 함께 사용됨을 알 수 있다.

그 외에도 **순서쌍**(혹은 관계)으로 함수를 정의하는 Glencoe Mathematics의 Algebra 교재에서도 **독립 변수**와 **종속 변수**를 정비례 식에서 소개한다(Cummins et al., 2006).

여기서 모두 소개하지는 못했지만 많은 미국의 교재들은 고등학교 이상에서는 대응의 개념과 종속의 개념 모두를 소개하며, 동시에 입력 값 출력 값이란 용어도 함께 사용하고 있다.

한편 대응의 관점으로만 함수를 배운 경우에 미적분학을 공부할 때 나타나는 부작용도 상당하다. 그 예들로는 다변수 함수 $z=f(x,y)$ 혹은 $w=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$를 다룰 때 $x_1,x_2,\ldots,x_n$은 독립변수로, w는 종속변수로 부르는 것이 합리적인 설명으로 보인다. 이를 대응의 개념으로 소개한다면 대부분의 학생들은 $x_1,x_2,\ldots,x_n$이 동일한 집합의 서로 다른 원소로 생각할 것이기 때문에 상당한 혼란을 초래할 수 있다. 또는 $x^3+y^3-15xy=0$의 예와 같이 $F(x,y)=0$으로 표현된 음함수 식을 보고 이를 다변수 함수라고 생각하는 학생들이 의외로 많은데, 대응의 개념으로만 함수를 다룬다면 문제가 발생할 것이다. 왜냐하면 대응의 개념으로 음함수 식을 설명하면 정의역 $X\times Y$의 원소 (x,y)가 0으로 대응되는 것이기 때문에 음함수의 본질을 놓칠 수 있다. 그 외에도 곡선의 매개 변수 식 $x=f(t), y=g(t)$ 을 소개할 때도 t를 매개 변수(parameter)로 소개하는 것이 대응의 관점보다 일반적인 소개 법이다.

또한 앞에서 소개한 변수들의 동시 변화적 관점은 미적분학의 중심 개념을 소개할 때 필요한 개념으로 대응의 개념보다 편리함을 관찰할 수 있다.

이와 같이 미적분학을 위해서는 함수의 다양한 측면을 이해할 필요가 있으며, 교육과정에서 함수를 종속의 개념과 대응의 개념 모두를 소개하는 것은 적어도 고등학교 이상에서는 가능한 것으로 보인다. 또 외국의 교재에서 보듯이 이는 기술적으로 충분히 해결 가능한 문제로 보인다. 중, 고등학교에서의 교육의 일관 성 뿐만 아니라 이공계 진학 학생들이 필수적으로 배우는 미적분학과의 연계성, 위에서 소개한 여러 전공분야에서 사용되는 함수의 풍부한 측면도 고려되어야 할 것이다.

III. 문항 검사를 통한 대학생들의 함수 개념 분석

앞에서 살펴본 이론들과 오 개념의 예들은 외국의 사례들이 대부분을 차지한다. 우수한 우리나라의 경우에는 외국과는 다른 결과가 나타날 수 있으리라 기대하였다. 또 한국의 대학생이라 할지라도 조사 대상의 수학적 성숙도에 따라서 동일한 문항에 대하여도 본 연구와는 상이한 결과를 가져올 수도 있다(임석윤, 2007). 앞에서 살펴본 오 개념의 사례들과 APO이론에 근거하여 문항들을 개발하였는데 일부는 비교를 위하여 선행 연구에서 발췌하였으며(문항 7, 12, 14), 일부는 독자적으로 개발하였다. 문항들을 유형별로 소개하면 다음과 같다.

- 함수의 정의를 올바르게 이해하는가[문항 1, 4, 6, 20].
- 함수의 다양한 측면을 어떻게 이해하는가[문항 17].
- 함수의 활동적 개념은 잘 정립되어있는가[문항 3, 8, 9].
- 함수의 과정적 측면에 도달하였는가[문항 5, 10, 19].
- 함수의 대상 개념을 획득 하였는가[문항 12, 13].

◦ 함수의 그래프의 해석[문항14].

본 설문에 참여한 학생들은 서울소재 공과대학 신입생 95명으로 그 들은 모두 고교 재학 시 미적분학을 수강했으며 수능에서 수리 가형을 선택하였다. 본 설문 조사는 3월 첫 주 미적분학 강의 첫 날 실시되었다. 그 들의 수능 수리등급은 다음과 같다.

	명수
1등급	13
2등급	30
3등급	18
4등급	7
5등급	4
6등급	1
7등급	1
기타	21

여기서 기타는 수시 입학생이거나 무응답인 경우 등을 포함한다.

1. 대학생들의 함수 개념 이해를 위한 설문조사

학번: 이름:

다음을 읽고 물음에 답하시오.

1. 다음은 잘 정의된 함수인가? 아니라면 이유를 쓰시오.

(a) F : {사람} --------> {사람}
$F(x) = x$의 여 동생

(b) F : {사람} --------> {사람}
$F(x) = x$의 아버지

(c) F : 실수 --------> 실수
$F(x) = x$의 제곱근

(d) F : 실수 --------> 실수
$F(x)$는 x의 역수

(e) $f(x) = \begin{cases} x, & x\text{가 유리수} \\ 0, & x\text{가 무리수} \end{cases}$

2. 자신이 이해하는 (혹은 알고 있는) 함수의 정의를 써 보시오.

3. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x$일 때 $f(x+1)$의 값은?

4. 다음 명제의 참, 거짓을 말하고 근거를 쓰시오.
"함수 $y = f(x)$에서 입력 값 x의 값이 연속적으로 변하면 출력 값 y의 값도 연속적으로 변한다."

5. 고등학생인 동생이 함수 $y = 2^x$의 역함수는, $(2^x)^{1/x} = 2$이므로, $y^{-1}(x) = 2^{1/x}$라고 하였다. 어떤 설명을 동생에게 해 줄 것인가?

6. 함수와 방정식의 차이는 무엇인가?

7. (a) n이 자연수일 때 $f_1(n)=n^2$와 $f_2(n)=\sum_{k=1}^{n} 2k-1$은 동일한 함수인가? 이유를 쓰시오 (Carlson, 2005).

(b) $f_1,\ f_2 : N \to N$(자연수)일 때, $f_1(x)=x^2$과 $f_2(0)=0,\quad f_2(x+1)=f_2(x)+2x+1$로 정의된 함수는 동일한 함수인가 아닌가? 근거를 쓰시오(Sfard, 1991).

8. 다음의 규칙은 하나의 함수를 나타내는가? 혹은 두 개의 서로 다른 함수를 나타내는가? 근거를 쓰시오.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3, & x<0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$$

9. 다음 두 함수 f_1, f_2의 곱을 구하시오.

$$f_1(x)=\begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ -2x+4, & \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

10. $f, g,\ h$는 모두 정의역과 치역이 실수인 함수들이고, $h=f \circ g$이다. 다음 표가 주어졌을 때 $f(1)$의 값을 구할 수 있는가? 가능하다면 값을 구하시오.

x	$f(x)$	$g(x)$
-1	3	1
0	0	-2
1	2	3

11. 다음 명제의 참, 거짓을 말하고 판단한 근거 혹은 반례를 들어보시오.

(a) 함수 $f,\ g$의 정의역과 치역이 실수일 때, $f,\ g$가 1: 1 함수이면 $f+g$도 1: 1 함수이다.

(b) 위와 동일한 조건에서 합성함수 $g(f(x))$는 1: 1이다.

(c) 위와 동일한 조건이고, $f,\ g$가 전사함수(onto)이면 $f+g$도 전사함수이다.

12. A를 정의역과 치역이 실수인 함수들의 집합이라 하자. D를 A의 원소 f에 작용하는 연산으로 f를 f(f의 도함수)으로 변환시킨다. 즉 $D(f)(x)=f'(x)$(예: $f(x)=x^2$이면 $Df(x)=2x$). 이 때 D를 함수라 부를 수 있는가? (Breidenbach et al., 1992)

있다 없다

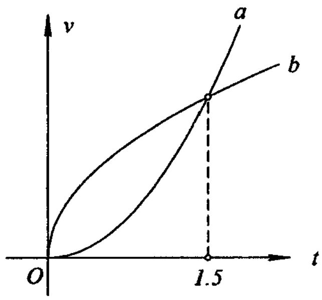
선택한 근거를 설명해 보시오.

13. A를 정의역과 치역이 실수인 함수들의 집합이라 하자. K는 A의 원소 f에 작용하는 연산으로 K: $f(x) \rightarrow f(2x)$로 변환시킨다. 이 때 K를 함수라 부를 수 있는가?

있다 없다

K의 역연산을 L이라 할 때 $L(f(x))$ = ?

14. 오른쪽은 달리는 두 자전거의 운동 속도를 나타낸 것이다. 맞는 것에 0 표 하시오. (Monk, 1992)



(a) $t = 1.5$일 때 두 자전거는 충돌한다(혹은 만난다).

yes no

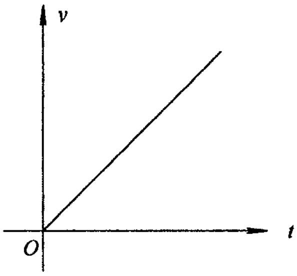
판단한 근거를 서술해보시오.

(b) $t = 1.5$ 이 후에는 a가 b를 앞선다.

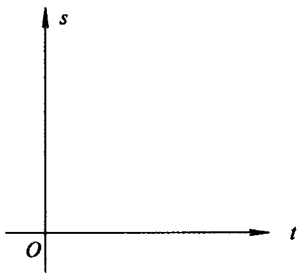
yes no

판단한 근거는?

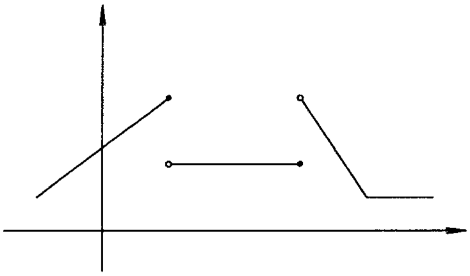
15. 다음은 자동차의 속도를 나타냈다.



이 때, 자동차의 시간에 대한 움직인 거리를 그래프로 나타내보시오.



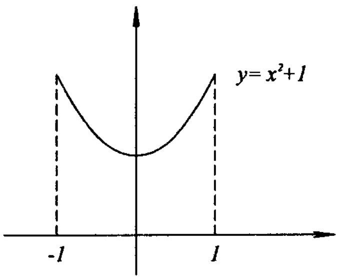
16. 다음을 어떤 하나의 함수의 그래프라고 볼 수 있는가?



17. 다음은 함수에 대한 여러 가지 설명이다. 그 중 옳다고 판단되는 것에 0표 하시오.
(1) 함수란 두 변수 사이의 종속관계(dependence relation)이다. ( )
(2) 모든 x값에 y값을 부여하는 연산으로 생각할 수 있다. ( )
(3) 집합 사이의 대응관계로 X 집합의 모든 원소에 대하여 Y 집합의 한 원소를 대응 시킨다. ( )
(4) $x_1 \neq x_2$면 함수 값 $y_1 \neq y_2$이다. ( )
(5) 함수는 두 변수 (예를 들면 x와 y) 사이의 관계를 나타내는 공식(formula)이다. ( )
(6) 함수란 일종의 규칙(rule)으로 x값을 대입하여 y값을 구하는 관계식이다. ( )

18. 위의 문제에서 둘 이상을 선택한 경우 함수의 정의를 가장 잘 표현 한다고 생각되는 것을 고른다면? ( )

19. 다음은 어떤 함수의 그래프이다. 이 함수의 역함수가 존재하는지 생각해보고, 그래프를 그려보시오(필요하다면 정의역을 바꾸어도 무관함)



20. 다음의 주어진 직선의 식은 함수의 그래프가 될 수 있는가? 그렇게 판단한 이유를 쓰시오.
(a) $y = 3$
(b) $x = 3$

다음은 통계처리를 위해서만 사용합니다.

수학II 수강여부	네( )	아니요 ( )
선택과목	미적분학( )	통계학 ( )
재수강여부	네 ( )	아니요 ( )
수능선택	수리 가 형 ( )	수리 나 형 ( )
수능수리등급		

2. 분석

문항1.(정답자 수: (a)-28명, (b)-7 명, (c)-45명, (d)-19 명, (e)-52 명)

함수의 정의 이해를 확인하는 문제로 일가 성과 함께 정의역과 치역에 대한 지식을 요구한다. 예상과는 전혀 다른 매우 빈약한 이해를 보여주는 의외의 결과다. 정답률이 가장 낮은 문항은 (b), 높은 문항은 (e)다. (a) 문항의 경우 여동생이 없는 경우라면 대응되는 원소가 없고, 여동생이 둘 이상일 수 있다는 생각을 못한 학생들이 의외로 많았으며, (b)문항의 경우 아버지가 돌아가셔서 생존하지 않을 경우를 고려하지 못해서 많은 학생들이 함수라고 답했다. (c) 문항의 경우는 많은 학생들이 '제곱근이 2개일 수 있다', '음수의 경우 제곱근이 허수다'라는 언급을 하였다. (d)문항의 경우는 $f(x)=\frac{1}{x}$ 함수를 자주 접한 것이 오히려 사고에 방해가 된 것으로 보인다. $x=0$일 때 함수가 정의되지 않는다는 사실을 절반 이상의 학생들이 간과한 것으로 보인다. (e) 문항은 Dirichlet 함수가 처음 소개될 때 많은 학자들이 당혹스러워 했던 사실에 비추어보면 절반 이상의 학생들이 이 예를 함수로 받아들인다는 사실은 의외로 보일 수 있다. 이 결과는 10-나 단계에서 함수를 두 집합 사이의 대응관계로 배운 결과로 받아들여진다.

문항2.

본 문항은 함수의 정의 이해에 관한 질문으로 학생들이 개념 정의와는 별도로 다양한 개념 이미지를 소유하고 있다는 사실을 확인한 문제였다. 그들이 배운 함수의 정의보다는 대부분자신들의 언어로 표현하고자 하였으며, 절반 정도의 학생들은 대응관계로, 일부는 x와 y의 관계식으로 소개하였다. 대응관계로 이해하는 학생들도 일가 성을 언급하지 않은 경우가 많았다. 예들을 살펴보면,

'정의역의 임의의 한 원소가 치역의 원소와 대응하는 관계'

'하나의 정의역에 두 개 이상의 치역이 없는 것'

'x에 대응하는 y값이 존재하는 것'

관계식으로 설명한 경우에도

'$y=f(x)$', '종속 변수와 독립 변수와의 관계를 나타내는 등식', '서로 다른 x값에 하나의 y값이 결정될 때', '변수에 따라서 그 값이 달라지고 기하학적으로 표현이 가능함' 등의 다양한 응답이 있었

다. 이러한 결과는 고교 과정에서 함수의 정의 자체를 자세히 다루는 경우가 별로 없고, 문제 풀이 과정에서 다루는 전형적인 예들이 주로 공식에 의해서 주어지는 대수적 함수이기 때문으로 풀이된다.

문항 3, 8, 9, 16 (정답률이 90% 이상)

수학적 개념보다는 문제 풀이 위주로 공부하는 학생들의 학습 습관상 높은 정답률은 당연한 것으로 보인다. 적어도 본 조사에 참여한 수능 3등급 이상의 학생들은 함수의 활동적 개념에는 도달했으며 기능적인 면에서도 우수하다고 볼 수 있다.

문항4.(77명이 거짓이라고 응답함)

정답률이 높은 문항으로 학생들은 반례로 가우스 함수($y=[x]$)나 기타 불연속 함수를 들었다. 그 외에도 많은 학생들이 상수 함수를 반례로 들어서 $y=k$는 연속이지만 값이 변하지 않으므로 연속적으로 변하지 않는다고 답하였다.

문항5.

학생들이 어려워했던 문제들 중의 하나다. 무응답이거나 단순히 '틀리다' 혹은 의미 없는 답을 한 학생이 52명이었다.

'역함수란 x, y를 바꾸는 것이고, 그러면 $x=2^y$이므로 $y=\log_2 x$다'라는 응답이 21명, 그 중 추가로 '역함수의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다'라는 언급을 한 경우는 10명이었다. 아무 설명 없이 '$y=2^x$의 역함수는 $y=\log_2 x$다' 라고 한 경우가 6명 있었다.

문항6.

외국의 사례에서 대학생들이 방정식과 함수의 구분을 어려워한다는 보고가 있어서 우리나라 학생들의 반응이 궁금했던 문제였다. 정답 혹은 그에 가까운 응답으로 처리된 경우가 절반 을 밑돌았다(35명). 학생들의 서술 중 정답으로 처리한 것들을 살펴보면 다음과 같다.

'함수는 x값에 따라 y값이 변하는 것이고 방정식은 x값에 따라 참, 거짓이 달라진다.'

'함수는 $y=f(x)$이고 방정식은 $f(x)=0$이다'

'함수는 식에 어떤 수를 넣어서 값을 구하는 것이고 방정식은 미지수가 있는 식에서 미지수를 구하는 것'

'방정식은 정해진 몇 개의 해에서만 성립하지만, 함수는 정의역이 입력되어서 치역 y가 출력된다.'

'함수는 변수를 가지고 값을 찾는 것이고, 방정식은 결과 값을 가지고 변수를 구하는 것이다.'

그러나 정답으로 간주되지 못한 응답 중에는 함수와 방정식의 차이를 '숫자와 그래프의 차이', '좌표(혹은 그래프로) 에 표시가 가능한가의 여부', '일대일 또는 다대일 관계로 구분 한다'는 응답도 볼 수 있었다. 함수의 그래프와 방정식의 그래프를 구분할 수 있는 교육과정 강의 기술적인 조절이 필요하다고 느껴진다.[4)]

문항7. (정답자수: (a)-58명, (b)-40명)

문항 (a)와 (b) 사이에는 정답률에서 약간의 차이가 존재함을 알 수 있었다. (a)의 경우는 수열의

4) 8-가 에서는 일차 방정식이 일차 함수식으로 표현될 수 있는 경우를 다룬다.

합과 관계된 주제로 학생들이 비교적 자주 접해 본 기본 문형이며 학생들은 대부분 수열의 합을 구하는 공식을 사용하여 직접 구하거나 전개하여 구하였다. (b)의 경우는 일반적인 수열의 표기법 a_n 대신 $f(n)$으로 표현한 것인데 정답을 구한 학생들의 대다수가 수열 단원에서 배운 일반적인 풀이법[5] 대신에 하나씩 전개하고 대입하여

$$f_2(1)=1,\ f_2(2)=f_2(1)+2+1=4,\ f_2(3)=f_2(2)+4+1=9$$

등으로 계산하였다.

그 외에도 귀납법을 사용한 학생들도 있었다. 이 결과에서 조사대상 학생들이 비교적 다양한 문제 풀이 전략을 사용한다는 사실과, Sfard(1992)와 비교해볼 때 함수의 다른 표현들에 대한 이해는 외국 학생들보다는 상대적으로 높음을 알 수 있었다. 그러나 난이도가 높은 문제의 해결을 위하여 고차적 전략을 구사하기보다는 오히려 정의에 의존하는 태도도 엿볼 수 있었다.

문항10. (정답자 수: 65명)

이 문항은 합성함수와 관련해서 표로 주어진 결과를 이용하여 함수 값을 유추하는 문제다. Tall, Sfard 등은 합성함수, 역함수 등을 유창하게 다루는 능력을 함수의 과정 개념 단계에 포함시켰다. 대부분의 학생들은 이 문제를 어려움 없이 해결한 정답률이 높은 질문이었는데 정답을 구하지 못한 학생 중에는 $h=f\circ g$, $h(1)=2, g(1)=3$이므로 $f(1)=\dfrac{h(1)}{g(1)}=\dfrac{3}{2}$라고 답한 학생도 2명 있었다.

문항11. (정답자 수 (a)-34명, (b)-32명)

문항 (a)를 '거짓'으로 답한 34명 중 29명이 $f(x)=x$, $g(x)=-x$ 등의 반례를 들었다. 문항 (b)에서는 대부분이 설명 없이 '참'이라고 했고, 화살표로 함수의 합성과정을 나타내거나 최소한의 시도를 한 경우가 5명 미만이다.

문항12, 13. (정답자 수 문항 12번-4명, 13(a)-47명, (b)-25명)

함수에 대한 대상 개념이 형성 되었는지를 확인하는 질문이었으며 정답률은 예상했던 대로 저조하였다. 그리고 13번은 함수의 그래프의 형태만 축소시키는 것이므로 문항12번에 비하여 상대적으로 쉽게 느껴졌으리라 짐작된다. 12번 문항에서 '함수가 아니다'라고 답한 학생들 중에는 '$\sum$, $\int$, D와 같은 연산 기호를 사용한 것은 함수가 될 수 없다', 또는 '미분을 함수에 대입하는 것은 의미가 없으므로 함수가 아니다' '함수는 하나의 정의역의 값에 하나의 치역을 대응시키는 것이지 관계식을 바꾸는 것이 아니므로 안 된다' 는 응답이 있었지만(4명) 정답으로 처리하지 않았다. 학생들 대부분 문제를 파악하지 못하였다. 미분 불능인 함수, 혹은 절대 값 함수를 반례로 든 경우는 극소수였다(4명). 13번 문항도 구체적인 근거 없이 답만 한 경우가 많았으며(22명 명) 그런 경우에는 (b)를 답하지 못하였다. 이 문항을 통해서 함수의 대상성 개념은 아직 형성되지 못한 경우가 대부분이라고 판단되었다.

---

5) $f_2(1)-f_1(0)=1, f_2(2)-f_2(1)=3, \ldots\ldots, f_{2(n)}-f_{2(n-1)}=2n-1$이므로 항들을 모두 더하면 $f_2(n)-f_2(0)=\sum 2k-1=n^2$ 가 되어 a와 동일하다.

문항 14, 15. (정답자: 90명)

이 문항들은 그래프의 해석과 관계있는 문제로 Carlson(2006), 임석윤(2007) 등에서 그래프를 실제 상황으로 인식한다는 보고가 있던 문제이다. 그러나 이 질문은 본 검사지에서 다룬 문제들 중 가장 높은 정답률을 기록했다. 학생들은 시간-속도의 그래프가 주어질 때 이동한 거리는 그래프 아래의 면적이라는 사실을 정확히 진술하였고 움직인 거리를 포물선으로 올바르게 나타냈다. 이는 예비교사를 대상으로 한 임석윤(2007)의 연구 결과 보다 높은 정답률을 보인 것이다. 이러한 차이는 본 검사 대상이 공대생이며, 고교 재학 시 미적분학을 이미 배웠으며, 수리 가 형을 선택한 집단이라는 것과 무관하지 않은 것으로 보인다. 또한 본 문제는 고등학교 물리I 에서도 많이 다룬 내용이므로 학생들이 익숙한 것으로 보인다.

문항 17, 18. 이 문항들은 학생들이 이해하는 함수 개념을 좀 더 구체적으로 파악하기 위하여 2번 문항의 연장선에서 시도한 것으로 종속, 대응, 관계식, 규칙 등의 용어를 모두 포함하였다. 그 결과는 다음의 표에 나타나 있다.

문항	선택 학생 수	()안은 가장 옳다고 답한 학생
1(종속)	64	14
2(연산)	63	14
3(대응)	52	27
4(일대일)	2	0
5(공식)	73	26
6(규칙)	77	15

이 문제는 중복 선택이 가능한 문제였다. 그런데 좀 더 세분된 분석 결과 문항 (1)과 (3) 을 중복 선택한 학생 수는 32명, 문항 (1)과 (5)를 중복 선택한 수는 47명, 문항 (3)과 (5)를 중복 선택한 수는 40명, 문항 (1), (3), (5)를 모두 선택한 학생은 25명 이었다 (종속 + 공식 > 대응 + 공식 > 종속 + 대응 순이다). 이 학생들은 중학교에서는 종속의 개념으로, 10-나 단계에서는 함수의 정의를 집합 간의 대응 관계로 배웠다. 위 표에서 학생들은 함수의 올바른 표현으로 4 번을 제외하고 나머지 문항을 골고루 선택하였다. 그러나 가장 올바른 함수의 표현으로는 3, 5번을 많이 선택하였다. 또한 규칙을 선택한 학생 수가 문항 14에서는 가장 많았음에도 규칙관계를 함수의 가장 올바른 표현으로 선택한 학생은 4번을 제외하고는 가장 적었다. 그들의 의식 속에는 규칙만으로는 부족하다고 생각하는 것으로 보인다. 또 대응 개념을 선택한 학생의 수도 두 질문에서 이와 같이 차이가 있는 것은, 대응 개념을 선택한 학생들은 그 수는 적지만, 교과서적 정의를 올바르게 기억하는 학생들임을 의미한다. 여기서 학생들의 함수 개념은 교과서를 통해 배운 수학적 정의, 자신들이 접해온 전형적인 예들, 잠재의식 속에 남아있는기억 등 다양한 경로를 통하여 형성됨을 보여준다.

함수의 정의를 필기하는 것은 한 줄이면 가능하지만 추상적인 표현을 풀어서 이해하고 자기 것으로 소화하는 것은 오랜 시간과 노력이 요구되는 힘든 작업이다. 학생들이 중. 고등학교 과정을 통해서 만나는 함수들이 공식을 통하여 주어지는 경우가 대부분이다. 한 번 형성된 개념 이미지는 경우

에 따라서는 그들의 함수 개념을 왜곡시킬 수도 있는 것이다. 교과서 제작 시 전형적인 문제 풀이뿐만 아니라 함수의 개념 이해를 도와줄 수 있는 다양한 예들과 반례도 함께 소개해야 할 것이다.

문항 19. (정답자 5명)

정답자 수만 보면 의외의 결과다. 이 문항은 역함수의 그래프를 그리는 것으로 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 그래프를 그리는 것이다. 주어진 함수가 일대일 대응이 아니므로 정의역을 축소해야 한다는 것을 알아차린 학생이 3명이고, 일대일이 아니므로 역함수가 없다고 답한 학생은 2명밖에 안되었다. 23명의 학생들이 별다른 관찰 없이 그대로 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 그래프$y=\pm\sqrt{x^2-1}$를 그렸다. 또 (1,0)의 대칭점 (0,1)을 올바르게 찾지 못한 경우도 11명이었다. 함수의 과정 개념 단계를 넘어서기 위해서는 대수적으로 역함수를 구하는 절차적인 지식으로는 충분치 않으며 역함수의 의미와 존재할 조건, 기하 적으로 역함수의 과정을 이해시키는 노력이 필요한 것이다.

문항20. 정답자:(a)-83 이상, (b)-58명

상수 함수를 함수로 인지하지 못한다는 외국의 사례 보고가 있어서 관심을 가졌던 문항이다. 그러나 우리나라 학생들은 $y=k$를 상수함수로 인지하는 데에는 아무런 문제가 없었다. 오히려 놀라운 것은 상당수의 학생들이 $x=k$를 상수 함수라고 믿는다는 것이다. 위의 내용은 8-가 단계에서 한 번 다루었지만 우리나라의 교과과정이 나선형 보다는 직선형을 따르기 때문에 고등학교 과정에서 심화할 기회가 없고, 10-나 단계에서도 함수의 그래프 여부를 확인하는 수직선 테스트를 다룬 적이 없다는 것이 두 직선의 그래프를 모두 함수의 그래프로 오인하는 원인을 제공한 것으로 보인다.

IV. 결론 및 제언

서론에서 밝힌 바와 같이 본 연구는 네 가지 주제를 대상으로 전개되었다. 그 중에서 함수 개념의 발달과 획득에 대한 이론적 접근은 본문 2장에서 소개하였으므로 여기서는 생략하고 처음 두 주제에 대한 연구 결과를 설문지 조사를 통한 분석을 통하여 제시하고자 한다.

◦ 학생들은 함수의 다양한 면들을 어떻게 이해하고 있는가?

본 설문 조사에서 제시한 문항들만으로는 서론에서 소개한 함수 개념 다양한 면들 -종속/대응 관계로서의 함수, 일가 성, 임의성 등을 모두 점검하기에는 다소 부족한 측면이 있다. 그렇지만 본 조사를 통하여 대학생들의 함수 개념 이해를 살펴봄으로써 몇 가지 유용한 관찰을 할 수 있었다. 먼저 위에서 소개한 외국의 연구 결과 및 사례들과 비교하였을 때 본 연구 대상인 대학 신입생들은 함수 개념에 대하여는 상대적으로 높은 이해를 보여주었다. 특히 그래프의 해석과 관련된 문제, 동일한 함수 여부를 파악하는 문제, 상수함수의 인지 문제, 단순 계산 문제 등에서는 조사 대상 학생 대부분이 어려움을 느끼지 않았다. 이는 조사 대상학생들의 수학 수리 등급이 상위권이며, 고교과정에서 이미 미적분학과 물리를 수강해서 상대적으로 준비가 잘 돼있는데도 기인한다고 보인다. 그러나 학생들은 함수의 개념 정의 및 이해와 관련하여서는 그야말로 다양한 개념을 갖고 있음이 나타났다. 함수를

집합간의 대응 관계로 배웠지만 대응 규칙에 보다 많은 주의를 기울이고 여기에 수반되는 정의역, 공역의 문제, 일가 성을 간과하는 경우가 많았다. 역함수가 존재할 조건을 묻는다면 일대일 대응을 말할 수 있지만, 정작 문제 해결 상황에서는 일대일 대응의 조건을 대부분 간과했으며, 역함수를 단순히 x와 y를 바꾸는 정도로만 기억하고 있었다. 한편 대응관계로 함수를 10-나 과정에서 도입한 것은 함수의 임의성(예를 들면 Dirichlet 함수)을 이해하는데 많은 기여를 하는 것으로 보인다. 그러면서도 그들은 함수 개념을 교과서적 정의 외에도 다양한 경로를 통하여 형성하였으며 중학교에서부터 다룬 함수의 전형들로 인하여 함수를 일종의 규칙, 공식으로 이해하는 뿌리 깊은 경향도 동시에 보여준다.

◦ 그들이 소유한 인식론적 장애를 포함한 오 개념에는 어떤 것들이 있는가?

학생들이 보여준 가장 광범위한 오 개념은 함수의 정의와 관련된 것이다. 함수를 대응 관계로 인식하면서도 함수를 가장 잘 표현한 것으로는 '두 변수 사이의 관계를 나타내는 공식'으로 인정하고 있는 점을 고려한다면[문항 17] 새로운 교육 과정에서 7-나 단계에서부터 함수를 대응관계로 소개하는 것이 어느 정도 영향을 미칠이지 의문이 생긴다. 왜냐하면 중학교 시기의 학생들은 수학에서의 정의라는 개념에 대한 이해도 부족한 실정이므로 교과서에 소개된 정의에 큰 주의를 기울이지 않을 것이고, 교사들도 정의를 이해시키는 것을 어렵게 느낄 수 있고, 학생들이 중학교, 고등학교 과정을 통하여 접하는 함수의 예들이 공식 등으로 표현된 규칙성이 있는 전형적인 예들을 계속해서 다룰 것이기 때문이다. 또한 문항 17에서 종속 관계로 함수를 이해하는 학생이 많았음에도(60명) 함수를 가장 잘 표현한 식으로 종속 관계를 선택한 학생은 소수였다는 사실(14명)에 주목하면 중학교 때 배운 함수의 종속 개념은 새로운 정의에 의해서 어느 정도 대체되고 있음을 알 수 있다.

그 외에도 적지 않은 학생들이 함수의 일가 성, 정의역의 문제, 함수의 그래프와 방정식의 그래프의 구분 등에서 오 개념을 소유한 것으로 나타났다. 고등학교 교과과정에서는 매 학년마다 다루어야 하는 특별한 유형의 함수들에 치중하는 나머지 함수의 개념 정의에는 소홀한 면이 있다. 그러므로 함수의 정의와 관련된 예제, 반례 등이 강조되는 교육과정을 운영할 필요가 있다.

◦ APO 이론을 통하여 조망한 학생들의 대상 개념 획득에 대하여

앞에서 살펴본 APO이론은 학생들의 함수에 대한 대상 개념을 획득해가는 단계를 조작적이고 구조적으로 설명하고 있다. 설문 조사 결과 대학 신입생들은 함수를 집합간의 대응 관점에서 바라볼 수 있었다. 또 대부분의 학생들이 미분과 적분을 선택과목으로 수강했음에도 아직은 미분 개념을 함수에 작용하는 대응관계로는 인정할 수 없다는 사실은 조사대상 학생들은 자신들이 함수를 대상으로 다룬다는 사실을 깨닫지 못하고 있다는 Selden & Selden(1992)의 관찰과 일치한다. 한편 수리 영역 수능 성적이 1, 2, 3 등급 정도의 학생들이면 다양한 함수를 미분할 수 있고 부정적분을 잘 구한다는 일반적인 관찰과 종합해보면 조사대상 학생 중 함수의 대상성 개념을 획득한 경우는 극소수이지만, 대부분이 함수의 과정 개념 단계에는 도달한 것으로 판단된다. 대부분의 대학 신입생들이 과정 개념의 초기 단계에 머물러있다는 외국의 연구 결과보다는 좀 더 고무적이기는 하다. 그러나 우리나라

학생들의 수학 수준이 매우 우수할 것이라는 통념과는 반대로 그들의 개념 이해와 스킬의 유창함 정도는 별개로 보인다.

또한 함수의 대상 개념 획득 여부를 묻는 질문에서도 문제에 따라 정답률에서 큰 차이가 난 것은 대상 개념에도 단계가 있음을 시사한다.

이에 대하여 우리는 Schoenfeld(1993)의 언급에 주목해야 할 것이다:

'어떤 학생이 함수의 대상 관점을 실제로 소유했는지를 판단하는 것은 단순한 문제가 아니다. 이것은 예/아니요 형태의 지식이 아니라 단계의 문제이며, 학습의 과정은 단순히 단조 성장하는 형태가 아니라 많은 진동을 포함한다.'

◦ 교육과정에 대한 제안

7차 교육과정과는 달리 개정되는 교육과정에서는 일관되게 대응의 개념으로 함수가 도입된다고 한다. 이렇게 함으로써 중, 고등학교 함수 개념 사이에 연관성을 유지할 수 있고, 변수 개념과 관련해서는 중학교에서 집합을 가르칠 것이냐의 논란도 자연스레 사라질 것이다. 고교 교육과정에서 함수의 정의 부분에서 독립변수/ 종속변수 혹은 변수라는 용어가 사라진지 오래되었다. 그리고 대학에서 수학을 강의하는 분들 중에 이러한 사실을 인지하고 있고 관심을 기울이는 경우는 수학 교육에 관심을 갖는 경우가 아니면 드문 것이 현실이다. 그렇지만 이 개념은 미적분학을 배우기 위해서 필수적인 개념이고 그러한 용어를 대학에 와서 처음으로 접해야 한다는 것은 매우 기이한 현상이다. 비록 중학교 과정에서 변수가 소개되나 중학생들의 함수 개념의 빈약함을 이해한다면 그 것으로는 충분치 않다고 본다. 본문에서 소개한 다변수 함수, 음함수 개념, 매개변수 식 등은 대응의 개념보다는 변수의 의미, 종속의 개념을 요구한다. 또 대학에서 배울 여러 전공에서도 필요한 개념이다. 고등학생 수준이면 두 개념을 모두 배운다고 해서 문제될 것이 없어 보이며, 이는 외국의 교재들을 살펴본 것처럼 충분히 기술적으로 해결될 수 있다고 믿어진다. 학생들이 함수의 풍부한 개념을 이해하는 것도 중요하다.

한편 함수 단원에 대하여는 함수의 그래프에 대한 수직선 테스트를 포함할 것을 제안한다. 수직선 테스트는 외국 교과서의 경우는 대부분 대수I, II(Algebra I, II)에서 도입되는데 시각적인 특성으로 인해 중학생도 쉽게 이해할 수 있다.

참 고 문 헌

김대식 · 노영기 · 안국신 (2007). 현대 경제학 원론, 서울: 박영사.

김재영 · 박대근 · 전병현 (역), Krugman, P & Wells, R. (2008). 크루그먼의 경제학, 서울: 시그마프레스.

김현택 외 (2006). 심리학, 서울: 학지사.

신용준 외 역, Weiers, R. (2006). 통계학, 서울: 학현사.

임석윤 (2007): The development of the subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge in function instruction, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **21**(4). pp.575-596. 서울: 한국수학교육학회.

조완영 · 양재식 (2003). 중학교 1,2 학년 학생들의 함수 개념 이미지와 함수 정의 능력, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **16**, pp.147-153. 서울: 한국수학교육학회.

교육과학기술부 (2008). 중학교 교육과정 해설(III) 수학, 과학, 기술, 가정. 서울: 교육과정평가원.

Breidenbach, D; Dubinsky, E.; Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics* **23**, pp.247-285.

Carlson, M. & Oehrtman, M. (2005). Key aspects of knowing and learning the concept of function, *MAA Research sampler* **9**. www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html)

Carlson, M.; Jacobs, S.; Coe, E.; Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education* **33(5)**, pp.352-378.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions, *Journal for Research in mathematics Education* **26(1)**, pp.66-86.

Cummins, J.; Malloy, C.; McClan, K.; Mojica, Y. & Price, J. (2006). *Algebra concepts and applications*, Glencoe Mathematics, Columbus, OH: Glencoe/ McGraw Hill.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function, in G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy. *MAA Notes*, **25**. Washington: Mathematics Association of America.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions, *Educational Studies in Mathematics* **21**, pp.521-544.

Finney, R. Demana, F.., Waits, B. & Kennedy, D. (2007). *AP Calculus*, Boston, MA: Prentice Hall.

Foster, A.; Gordon, B.; Winters, L. & Rath, J. (1995). *Algebra II,* Columbus: Glencoe/ McGraw Hill.

Gray, D. O. & Tall, E. M. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A 'proceptual' view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education* **25(2)**, pp.116-140.

Illingworth, R.; McNemar, B., Mills, D. & Ramires, A. (2008). *Mathematics course 3,* Boston.: Prentice Hall.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey, *College Mathematics Journal* **20(4)**, pp.282-300.

Linz, P. (2001). *An Introduction to formal languages and automata,*, Sudbury.: Jones and Barett Publishers.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy (pp175-194), *MAA Notes*, **25**. Washington: Mathematics Association of america.

Norman, F. (1992). Teachers' mathematical knowledge of the concept of function, In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 215-232). *MAA Notes*, **25**. Washington, D. C.: Mathematical Association of America.

Oneil, P & O'neil, E. (2001). *Database* (2nd edition), Academic Press, CA.

Piaget, J.; Grize, J.-B.; Szeminska, A. & Bang, V. (1977). *Epistemology and Psychology of Functions*, Reidel, Dordrecht.

Schoenfeld, A. H., Smith, J. P. & Archavi, A. (1993). Learning: The microgenetic analysis of one student's evolving understanding of a complex subject domain, in R. Glaser(Ed.), *Advances in Instructional Psychology*, **4**, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Schwartz, B. B. (1989). The use of a microworld to improve ninth graders' concept image of a function: The triple representation model curriculum. Doctoral Dissertation, Weizmann Institute of science, Rehovot, Israel.

Selden, A. & Selden, J. (1992). Research Perspectives on concepts of functions: Summary and overview, In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects and epistemology and pedagogy (pp. 1-16). *MAA Notes*, **25**. Washington, D. C.: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature on mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**, pp.1-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of concept of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 25-58). *MAA Notes*, **25**. Washington, D. C.: Mathematical Association of America.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function, *Educational Studies in Mathematics* **33**, pp.259-281.

Smith, K. (1993). *Pre calculus with graphing and problem solving*(5th edition), Belmont, Ca.: Wadsworth, Inc.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mahematics* **12(2)**, pp.151-169.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education* **20**, pp.356-366.

Vinner, S (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, In Tall, D (Ed.), *Advanced mathematical thinking*(pp65-81), Dordrechet: Kluwer Academic Publishers.

The Function Concept in Korean Engineering Freshmen and Some Suggestions on the Curriculum in the Function Area.

Kim, Yeon Mi

Department of basic Science, School of Engineering, Hong Ik University, Ma Po Gu, Sang Su dong 72-1, Seoul, 121-791, Korea

E-mail: yonmikim@wow.hongik.ac.kr

Many research papers on the college students' functional concept show they have poor understanding on this topic. To compare the results with that of Korean students, four interrelated topics are chosen: How do they understand the concept of function?; what are their misconceptions including epistemological obstacles?; How do the function concepts develop and are acquired? For this a survey has been conducted to 95 engineering students just before they start Calculus course. We have done research on other major areas including psychology, economics and statistics to see how function is defined in these areas. Function definitions from US math text books are also introduced. Based on the these and the survey, some suggestions are made on the new curriculum which treat function as a correspondence relation. Vertical line test should be added to the Algebra II/Pre calculus course to check the univalent property.

* ZDM Classification : I25

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

* Key Words : function concept, APO(action, process, object)이론, vertical line test, covariance view.