韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2008. 11. 제 47권, 제 4호, 519-543

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2008, Vol. 47, No. 4, 519-543

자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해 분석

황 우 형 (고려대학교)
김 경 미 (고려대학교 교과교육연구소)

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

1970년대 후반부터 지난 30년간 많은 학자들에 의하여 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈에 관한 연구가 진행되었다. 자연수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈에 관한 연구(Carpenter et. al., 1981; 1982; 1983; 1984; 1988; 1993; Nesher et. al., 1982; Fischbein et al., 1985; Vergnaund, 1988; Kouba, 1989; Fuson, 1992; Greer, 1992; Mulligan et al., 1997)는 80년대 수학교육 연구의 중요한 초점이었다. 그 당시 덧셈과 뺄셈 상황, 곱셈과 나눗셈 상황에 대한 아동의 다양한 사고에 대한 이해는 발달심리학과 인지심리학의 상당한 진전을 이루게 하였다. Carpenter, Moser, Romberg 등 많은 연구자들은 연구결과를 서로 공유하였으며, 각자의 연구 결과, 패러다임, 모델 등을 통합하려는 시도를 하였다(Fuson, 1992; Greer, 1992; English, 1995).

사칙 연산에 대한 인식론적 연구는 크게 덧셈과 뺄셈/곱셈과 나눗셈에 대한 아동의 초기 직관 모델과 덧셈과 뺄셈/곱셈과 나눗셈의 문장제 상황의 의미론적 구조의 분류, 사칙연산에 대한 아동의 비형식적/형식적 문제 해결 전략으로 구분할 수 있다. 여러 학자들에 의해 각 연산의 직관모델과 의미론적 구조, 계산 전략은 다양한 용어로 정의되었고, 더욱 세분화되었다(Fischbein et al., 1985; Fuson, 1992; Greer, 1992; Mulligan et al., 1997; van Putten et al., 2005; Sherin & Fuson, 2005).

첫 번째, 사칙연산에 대한 직관 모델은 사칙연산에 대한 아동의 초기 정신 구조로 Fischbein et al.(1985)의 직관 모델 분류가 대표적이다. Fischbein et al.(1985)은 덧셈의 직관모델로 '합병', 뺄셈은 '제거'와 '동등화', 곱셈은 '반복된 덧셈', 나눗셈은 등분제의 경우 '등분할', 포함제의 경우 '반복된 뺄셈'으로 아동의 초기 직관모델을 제시하였다. 다른 한 편, Mulligan, et. al.,(1997)은 직관모델을 계산 방법과 일치하는 내적 정신 구조로 정의하고, 곱셈의 직관모델로 '직접세기', '반복된 덧셈', '곱셈 연산'을 제시하고, 나눗셈의 직관모델로 '직접 세기', '반복된 뺄셈', '반복된 덧셈', '곱셈 연산'으로 제시하였다. Fischbein et al.(1985)의 직관모델은 Ⅱ장에서 좀 더 자세히 살펴볼 것이다.

두 번째, 덧셈과 뺄셈 문장제의 의미론적 구조는 그 분류가 매우 다양하고 세분화되어 있는데, Carpenter et al.(1993)는 덧셈과 뺄셈 상황을 '첨가/제거', '부분-부분-전체', '비교', '동등화'로 분류하고, 미지수가 처음 집합, 변화 집합, 결과 집합의 어느 위치에 있느냐에 따라 이를 더 세분화하기도 하였다(Carpenter et al.,1999). 우리나라에서는 덧셈과 뺄셈의 상황을 크게 '첨가'와 '합병', '제거'와 '비교'로 분류하였다(강지형 외, 2005). 곱셈과 나눗셈 문장제의 의미론적 구조 또한 그 분류가 다양한데, 곱셈 상황은 크게 '동치 묶음', '곱셈적 비교', '조합', '직사각형 넓이'로 분류하고(Greer, 1992), 나눗셈 상황은 크게 '포함제'와 '등분제'로 구분하였다(Fischbein et al., 1985; Kouba, 1989). Ⅱ장에서 Fuson(1992)의 덧셈과 뺄셈 상황의 분류와 Greer(1992)의 곱셈과 나눗셈 상황의 분류에 대하여 자세히 살펴볼 것이다.

세 번째, 덧셈과 뺄셈에 대한 아동의 계산 전략은 '직접적 모델링', '높은 수준의 셈', '유추된 지식', '회상' 등으로 범주화하거나(Carpenter et al., 2004), '직접 세기',

* 2008년 8월 투고, 2008년 10월 심사 완료.
* ZDM분류 : C32
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈, 이해, 직관모델, 문장제의 의미론적 구조

'일, 십, 백 단위로 세기', "뛰어세기" "묶어세기" 등으로 세분화할 수 있다. 곱셈에 대한 아동의 계산 전략은 '직접세기', '반복세기', '뛰어세기', '덧셈', '곱셈'으로 분류하고(Mulligan et al., 1997), 나눗셈에 대한 계산 전략은 아동의 계산 행위에 따라 '손가락으로 세기', '구체물 분배하기', '구체물 묶어세기', '수막대를 손으로 짚어가면서 묶어세기', '수막대 가르기', '구체물을 묶어서 빼기', '머릿속으로 묶어세기', '뛰어세기', '덧셈', '뺄셈', '곱셈구구', '나눗셈(세로셈)' 등으로 구분하며(박현미 · 강완, 2006), 인지 발달 수준에 따라 범주화하여 분류하기도 한다(van Putten, et al., 2005).

우리나라에서는 최근 자연수의 사칙연산 문장제의 구문론, 의미론, 해결 방법 등에 관한 연구가 이루어졌으나(김연 · 박만구, 2004; 남승인 · 서찬숙, 2004; 노현옥 · 정은실, 2005; 이종욱, 2007), 국외의 방대한 이론 연구와 실험 연구에 비하면 아직 초보적인 단계라 할 수 있다.

자연수의 사칙연산은 학교수학의 기초로 매우 중요함에도 불구하고, 학교 현장에서는 아직도 형식적인 계산 알고리즘과 빠른 계산 능력을 강조하고 있다. 그로 인하여 많은 학생들이 문장제를 어려워하고, 소수와 분수, 정수, 대수의 사칙연산을 자연수의 사칙연산과 연결하여 이해하지 못하고 있다. 자연수의 사칙연산을 학생이 의미 있게 학습할 수 있도록 돕기 위해서는 학생들이 사칙연산을 어떤 의미로 이해하고 있는지에 대한 고찰이 선행되어야 한다(Kilpatrick et al., 2001). 또한 연산의 직관모델과 문장제의 의미론적 구조가 동일한 의미로 혼용되어 사용되고 있어(Kouba, 1989; Mulligan et al., 1997) 명확한 정의가 필요하며, 아동의 이해가 문제해결 과정에 어떤 영향을 주는지에 대한 연구도 함께 수반되어야 한다.

Mulligan et al. (1997)는 문제의 의미구조와 학생들이 그 문제를 풀기위해 사용하는 해결 방법 사이에는 직접적인 일치가 없음을 주장한 반면, Christou & Philippou (1998)는 문제 상황과 아동의 인지 발달 수준, 아동의 문제 해결 능력 사이에는 연관성이 있음을 실험 연구를 통하여 알아내었다. 서로 다른 연구 결과들로 말미암아 아동이 자연수의 사칙연산을 어떤 의미로 이해하고 있으며, 그것이 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아볼 필요가 있다.

따라서 본 논문에서는 아동이 자연수의 사칙연산을 어떤 의미로 이해하고 있는지 조사하고, 그것이 1단계 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보고자 한다. 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

1) 아동은 자연수의 사칙연산을 어떤 의미로 이해하고 있는가?
1-1. 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해는 어떻게 범주화할 수 있는가?
1-2. 사칙연산에 대한 아동의 이해는 Fischbein의 직관모델과 일치하는가?
2) 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해는 문장제 해결에 어떤 영향을 주는가?
2-1. 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해는 아동의 문장제 해결 방법에 어떤 영향을 주는가?
2-2. 자연수의 사칙연산에 대하여 같은 이해 범주에 속한 아동들은 문장제 해결 방법에 공통된 특성을 가지고 있는가?

2. 용어 정의

1) 직관 모델

직관 모델은 아동의 초기 정신 구조로, 연산에 대한 아동의 직관 모델은 계산 전략과 일치하는 내적 정신 구조이다(Fischbein et al., 1985; Mulligan et al., 1997). 아동이 연산에 대하여 갖고 있는 의미, 심상, 연산 기호와 강하게 연결된 계산 전략 등이 직관 모델에 포함된다. 즉, 연산의 직관 모델은 연산 문장제의 의미론적 구조를 포함한다.

2) 의미론적 구조

의미론적 구조는 언어표현과 의미와의 관계를 나타내는 것으로, 언어의 배열과 수학적 연산 구조의 관계를 의미한다. 문장제의 의미론적 구조는 문제 상황이 수학의 어떤 의미와 연결되는지에 따라, 문장제에 포함된 양이 정적인지, 동적인지에 따라, 미지수의 위치가 처음 위치, 변화 위치, 결과 위치인지에 따라, 언어의 배열 순서와 수식의 배열 순서가 일치하는지 등 다양한 변인으로 세분화할 수 있다(Fuson, 1992; Greer, 1992).

Ⅱ. 문헌 연구

1. 직관 모델

직관(Intuition)은 명백한 정당화나 해석 없이 직접적으로 파악되는 인지작용을 일컫는다. Fischbein et. al.(1985)은 산술의 기본 연산은 일반적으로 암묵적이고, 무의식적이며, 초기의 직관 모델과 연결되어 있다고 가정하였다. Fischbein et. al.(1985)에 의하면 두 수가 포함된 문제를 해결하는데 필요한 연산을 알아내는 것은 즉시 일어나는 것이 아니라 모델에 의해 조정되는 것이다. 예를 들어, 곱셈의 개념이 직관적으로 '반복된 덧셈' 모델과 결부되어 있다면, 5×3은 5+5+5를 의미하게 된다. 이것은 연산자가 범자연수일 때만 성립한다. 연산자가 0.22 또는 $\frac{5}{3}$ 일 때는 직관적인 의미를 가지지 못하기 때문이다. 이러한 직관 모델은 아동의 초기 연산 과정에 중요한 비계 역할을 하기도 하지만, 위 예처럼 상황에 직관모델이 적합하지 않은 경우에는 연산과정에 중요한 형식적인 산술 구조와 내적인 정신 구조 사이에 충돌이 생기기 때문에 문제 해결을 방해하거나 빗나가게 하는 등 인지적 장애를 일으킬 수 있다(English, 1995). 따라서 교사는 가르칠 수학 지식에 대한 아동의 초기 직관 모델이 무엇인지 이해하려는 노력이 필요하다. Fischbein et. al.(1985)은 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈에 대한 아동의 초기 직관 모델을 다음과 같이 제시하였다.

1) 덧셈과 뺄셈의 직관 모델

Fischbein et. al.(1985)에 의하면 덧셈의 직관 모델은 두 개의(또는 그 이상의) 분리되어 있는 대상 집합을 전체 집합의 한 집합으로 합치는 것(Putting Together)으로 생각할 수 있다. 반면, 뺄셈은 제거(Take away)와 동등화(Buiding Up)의 두 가지 행위로 나타날 수 있다. 예컨대, "영희는 10개의 구슬을 가지고 있습니다. 영희는 동수에게 4개의 구슬을 주었습니다. 영희가 가지고 있는 구슬은 몇 개입니까?"에서 뺄셈은 제거의 의미를 가지고, "영희는 6개의 구슬을 가지고 있습니다. 영희가 10개의 구슬을 갖기 위해서는 몇 개의 구슬이 더 필요합니까?"에서 뺄셈은 동등화의 의미를 가진다.

2) 곱셈과 나눗셈의 직관 모델

곱셈과 관련된 초기 모델은 '반복된 덧셈(Repeated Addition)'이다. 그것은 같은 크기의 집합들을 합치는 것으로 직사각형 패턴과 같은 다른 모델에 기초가 된다. 3×5는 5+5+5 또는 3+3+3+3+3을 의미한다. 이 해석은 축적으로서의 곱셈 관점이 아니다. 하나의 원소(동치 집합의 수)는 연산자이며, 다른 원소(각 집합의 크기)는 피연산자이다. 이때 피연산자는 어떤 양(陽)의 양(量)이어야 하고, 연산자는 범자연수이어야 한다. 이때, 곱셈의 결과는 피연산자의 양보다 커진다.

Fischbein et. al.(1985)은 나눗셈의 직관 모델을 '등분제(Partitive Division)' 상황과 '포함제(Quotative Division)' 상황으로 나누어 제시하였다. 등분할 나눗셈으로 불리는 등분제는 대상 또는 대상 집합이 동일한 조각 또는 하위 집합으로 나누어지는 것이다. 피제수는 제수보다 커야 하며, 제수(연산자)는 범자연수이어야 한다(예: "12개의 사탕을 3개의 주머니에 똑같이 나누려고 합니다. 하나의 주머니에는 사탕이 몇 개 들어갑니까?"). 몫은 피제수(피연산자)보다 작아야 한다. 이때 나눗셈의 직관 모델은 '등분(Sharing)'이다.

측정 나눗셈으로 불리는 포함제는 주어진 양이 큰 전체 양에 몇 번 포함되는지 알아보는 것이다(예: "12개의 사탕을 3개씩 주머니에 넣으려고 합니다. 몇 개의 주머니가 필요합니까?"). 이 경우, 피제수는 반드시 제수보다 커야 한다. 몫이 범자연수라면, 나눗셈의 직관 모델은 '반복된 뺄셈(Repeated Subtraction)'이다.

2. 의미론적 구조

Goldin & McClintock(1984)은 문재해결의 과제 변인들을 총망라하여 구문론, 의미론, 구조, 발견술 등 크게 4가지로 분류하였다(English, 1995). 문장제의 구성요소로서 구문론을 언급하는 것은 문장제를 구성하는 표면적인 구조가 언어이기 때문이다. 구문론은 언어 표현간의 관계, 의미론은 언어표현과 의미와의 관계를 의미한다. 의미론은 언어의 배열과 수학적 연산구조의 관계를 유형화한 것을 의미한다(김진숙, 1998). 사칙연산 문장제의 의미론적 구조는 연산 과정이 내포된 상황, 언어표현과 수학적 연산구조의 관계를 포함한다. 많은 연구에서 덧

셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 상황 또는 문장제의 상황을 분류하였는데, 이것은 연산의 의미론적 구조와 일치한다고 볼 수 있다. 연산의 직관모델이 연산에 대한 아동의 내적표상을 의미한다면, 연산의 의미론적 구조는 연산이 내포된 문장 또는 상황(언어적 외적표상)에서 언어표현과 의미와의 관계를 의미한다.

1) 덧셈과 뺄셈의 상황

자연수의 덧셈과 뺄셈 상황의 분류는 학자마다 매우 다양하여, 본 논문에서는 Fuson(1992)의 분류를 중점적으로 살펴보고자 한다. Fuson(1992)은 자연수의 덧셈과 뺄셈을 크게는 '비교(Compare)', '합병(Combine)', '첨가에 의한 변화(Change add to)', '제거에 의한 변화(Change take from)'로 분류하였다. 두 양이 존재하는 경우, 하나의 양을 다른 양과 비교하거나, 하나의 양을 다른 양에 합병할 수 있다. 비교와 합병 상황은 이원 연산이다. 반면, 오직 하나의 양이 존재하는 경우, 그것에 다른 양이 첨가되거나, 그것의 부분이 제거될 수 있다. 첨가에 의한 변화와 제거에 의한 변화 상황은 단일 연산이다.

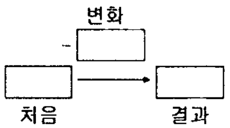
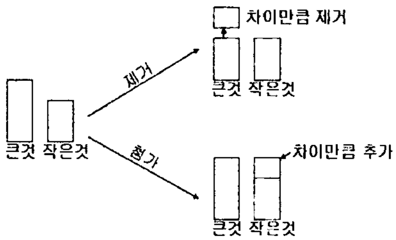
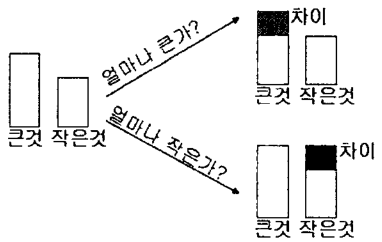
관련된 양이 변하는지, 변하지 않는지에 따라 정적인 상황과 동적인 상황으로 분류한다. 앞에서 이원의 합병과 비교는 정적이고, 단일 원의 첨가와 제거는 동적으로 구분하였으나, <표1>과 <표2>에서와 같이 이원의 합병과 비교문제는 동적인 문제로 구성될 수 있다. 여기서 동적인 이원의 비교 문제는 비교와 변화가 결합된 것으로 따로 '동등화' 문제로 분류할 수 있다. 또한 두 양 사이의 차를 단일 원의 첨가와 제거로서 나타낼 수 있다. 다음 <표 1>과 <표 2>는 Fuson(1992)의 덧셈과 뺄셈 상황의 분류를 정리한 것이다. Fuson(1992)은 덧셈과 뺄셈 상황의 분류를 덧셈 상황을 '첨가에 의한 변화', '물리적 합병', '개념적 합병'으로, 뺄셈 상황을 '제거에 의한 변화', '동등화', '비교'로 구분하였다. 또한 덧셈과 뺄셈 상황의 문장제는 미지수의 위치와 언어의 배열 순서와 수식의 배열 순서가 일치하는지에 따라 더욱 세분화하였으나, 본 연구에서는 세분화하지 않았다.

각 덧셈, 뺄셈 상황에서 +, −, = 기호(표기)는 다른 의미를 가지고 있다. 예들 들어, "14 - 6 = 8"에서 "-", "=" 표기의 의미를 살펴보면, "14개의 구슬에서 6개의 구슬을 가져가면 8개의 구슬이 남습니다."에서 "-"는 제거의 의미를 가지며, "="는 '되다', '결과'를 의미한다. 반면, "영희는 14개의 사탕을 가지고 있고, 철수는 6개의 사탕을 가지고 있습니다. 영희는 철수보다 몇 개의 사탕을 더 가지고 있습니까?"에서 "-"는 비교의 의미를 가지

<표 1> 덧셈의 의미론적 구조 분류(Fuson, 1992)

	덧셈 상황	문장제
동적상황 단일연산 $Q_a \to Q_b$	첨가에 의한 변화(Change add to) 변화 + 처음 결과	철희는 3개의 사과를 가지고 있습니다. 영희는 철희에게 5개의 사과를 더 주었습니다. 철희는 지금 몇 개의 사과를 가지고 있습니까?
동적상황 이원연산 $(Q_1 : Q_2) \to Q_3$	(물리적)합병((Physically) Combine) 부분 부분 전체	상희는 빨강색 연필 4개와 파랑색 연필 5개를 가지고 있습니다. 상희는 그것을 모두 책상위에 올려놓았습니다. 책상 위의 연필은 모두 몇 개 있습니까?
정적상황 이원연산 $(Q_1 : Q_2) \to Q_3$	(개념적)합병((Conceptually) Combine) 부분 부분 전체	축구팀에 남학생 6명, 여학생 8명이 있습니다. 축구팀은 모두 몇 명입니까?

<표 2> 뺄셈의 의미론적 구조 분류(Fuson, 1992)

	뺄셈 상황	문장제
동적상황 단일연산 $Q_a \rightarrow Q_b$	제거에 의한 변화(Change take from) 	성준이는 8개의 구슬을 가지고 있습니다. 성준이는 동혁이에게 5개의 구슬을 주었습니다. 성준이는 지금 몇 개의 구슬을 가지고 있습니까?
동적상황 이원연산 $(Q_1 : Q_2) \rightarrow Q_3$	동등화(Equalize) 	동우는 9개의 연필을 가지고 있습니다. 진희는 4개의 연필을 가지고 있습니다. 1) 진희는 동우와 똑같은 개수의 연필을 가지려면 몇 개의 연필을 더 받아야 합니까? 2) 동우는 진희와 똑같은 개수의 연필을 가지려면 몇 개의 연필을 버려야 합니까?
정적상황 이원연산 $(Q_1 : Q_2) \rightarrow Q_3$	비교(Compare) 	서정이는 8개의 인형을 가지고 있습니다. 서빈이는 5개의 인형을 가지고 있습니다. 1) 서정이는 서빈이보다 몇 개의 인형을 더 가지고 있습니까? 2) 서빈이는 서정이보다 몇 개의 인형을 덜 가지고 있습니까?

고 "="는 '와 같은 수이다'의 의미를 가진다. "6개의 구슬이 있습니다. 몇 개의 구슬이 더 있어야 14개의 구슬이 됩니까?"와 같이 동등화의 상황에서 "-"는 '알지 못한 부분'의 의미를 가지고, "="는 '동일한'의 의미를 가진다. "="에 대한 비교의 의미는 '같다'의 수학적 의미 또는 '~은 ~와 동치이다.'의 의미를 가진다.

그러나 교과서는 아동들이 "+, -, ="의 다양한 의미에 대해 고찰할 수 있는 기회를 거의 제공하지 못하고 있다. 초등 교과서에 제시된 의미는 대부분 변화의 의미이다(Fuson,1992). 많은 아동들이 "=" 표기를 일정방향의 '결과'로 해석하는 것은 "6=6 또는 5=2+3"과 같은 형태를 보지 못했기 때문이다(Baroody & Ginsburg, 1983; Behr, Erlwanger, & Nichols, 1980). 이것은 교과서와 교사가 "=" 표기를 '어떤 것을 하는 것'의 의미로 사용하고 있기 때문이다.

2) 곱셈과 나눗셈 상황

Greer(1992)는 곱셈의 상황을 '동치 묶음(Equal Groups)', '곱셈적 비교(Multiplicative Comparison)', '조합(Cartesian Product)', '직사각형 넓이(Rectangular Area)'로 분류하였다.

동치 묶음은 "세 명의 아이들이 각각 4개의 과자를 가지고 있습니다. 아이들이 가지고 있는 과자는 모두 몇 개입니까?"와 같이 각 묶음에 같은 수를 갖는 여러 묶음을 가지고 있는 상황을 말한다. 동치 묶음의 문제는 비율 문제로도 나타낼 수 있다. 예를 들면, "한 아이가 4개씩의 과자를 가지고 있다면, 세 아이가 가지고 있는 과자는 모두 몇 개입니까?" 이 동치 묶음 문제는 등분제와 포함제의 나눗셈으로 변형할 수 있다. 위 예를 등분제의 상황으로 바꾸면, "12개의 과자를 세 명의 아이가 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 아이는 몇 개의 과자를

가지게 됩니까?", 포함제의 상황으로 바꾸면 "12개의 과자를 세 개씩 접시에 놓으려고 합니다. 몇 개의 접시가 필요합니까?"이다. 사람 전체를 묶음의 수로 나누어 각 묶음에 있는 원소의 수를 구하는 것을 등분제라 하고, 전체를 묶음에 있는 원소의 수로 나누어 묶음의 수를 구하는 것을 포함제 또는 측정 나눗셈이라 한다.

곱셈적 비교는 기준이 되는 한 집합의 크기와 다른 집합의 크기를 비교하여, 제시되지 않은 집합의 크기가 기준이 되는 집합 크기의 몇 배가 되는지를 구하는 상황이다. 예를 들어, "철수는 영희의 세 배만큼 사과를 가지고 있습니다. 영희는 4개의 사과를 가지고 있습니다. 철수는 몇 개의 사과를 가지고 있습니까?"와 같이 일반적으로 "~배 만큼"의 단어가 포함된 상황을 의미한다. 비교 상황은 덧셈적 비교와 곱셈적 비교로 나눌 수 있는데, 10명의 남학생과 5명의 여학생을 비교할 때 덧셈적 구조에서 비교하면, "남학생은 여학생보다 5명이 많다", 이를 곱셈적 구조에서 비교하면, "남학생은 여학생보다 2배 많다."로 대부분의 아동들은 곱셈적 비교보다는 덧셈적 비교를 더 선호한다(Christou & Philippou, 1998; Valentin & Sam, 2004). 많은 초등학생들이 분수를 어려워하는 이유 중에 하나가 분수학습을 위해서는 비교 관점이 덧셈적 관점에서 곱셈적인 관점으로 전환되어야 하는데, 전체-부분의 의미에 치우친 현행의 학습방법으로는 학생의 비교 관점을 곱셈적인 관점으로 전환하는 것이 어렵기 때문이다.

조합(Cartesian 곱)은 각 쌍의 처음 수가 m이라는 집합에, 두 번째 수는 n이라는 집합에 속할 때 형성될 수 있는 순서쌍의 수인 $m \times n$을 의미한다. 조합 문제는 두 개의 원소가 쉽게 교환될 수 있으므로 대칭적이다. 이런 구조는 곱셈에 대한 언어적 암시가 없어서 아동들로 하여금 덧셈의 경우로 생각하게 할 수 있다(English, 1995). 카테시안 곱은 두 개의 집합 m과 n의 교차곱으로 집합 m의 각 수들이 집합 n의 각 수들과 차례로 짝지어질 수 있는 조합의 집합으로 볼 수 있다(예 : "희진이는 3개의 블라우스와 4개의 치마를 가지고 있습니다. 희진이가 서로 다른 블라우스와 치마를 입을 수 있는 방법은 모두 몇 가지입니까?").

직사각형 넓이는 가로가 3cm, 세로가 4cm인 직사각형의 넓이를 구하는 상황이다. 이 직사각형의 넓이는 이 직사각형에 가로와 세로가 1cm인 정사각형(단위넓이)이 몇 번 들어가는지 세어 구할 수 있다. 또한 직사각형 넓이는 m행 n열의 직사각형 정렬과 유사하다. 이 곱셈의 넓이 모델은 곱셈의 시각적 구조와 곱셈의 교환법칙을 직관적으로 쉽게 알 수 있다는 점에서 유용한 모델이다.

Carpenter et al.(1999)는 곱셈 상황에서 넓이, 정렬 문제를 대칭적인 문제로 보았고, 이를 제외한 동치 묶음, 비율, 가격, 비교 문제인 비대칭적인 문제를 각각 등분할과 측정의 나눗셈 문제로 제시하였다. 나눗셈 문장제의 의미론적 구조로는 대부분 등분제와 포함제로 나눈다. 등분제는 승수에 의한 나눗셈으로 정의하고, 포함제는 피승수에 의한 나눗셈으로 정의하기도 한다(Greer, 1992). 국내 연구에서는 곱셈과 나눗셈의 상황을 동수누가, 비교, 비율, 조합, 정렬로 분류하고 있다(남승인 · 서찬숙, 2004; 이종욱, 2007).

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

서울시 강북에 소재한 초등학교의 4, 5, 6학년들을 대상으로 A구청과 B대학이 주최한 수학교실에 참여하기를 희망하는 아동들을 인터넷으로 접수받은 후 전자추첨을 통하여 무작위로 30명을 추출하였다. 30명의 아동들 중 불참한 1명을 제외한 29명 중 4학년이 16명, 5학년이 9명, 6학년이 4명이었고, 남학생은 19명, 여학생은 10명이었다. 29명의 아동들은 강북에 소재한 19개 학교에 다니는 학생들로 기초생활대상자에 해당하는 아동이 4명이었고, 가정의 사회경제적 수준이 중하위권에서 중상위권까지 고르게 분포되어 있었다.

2. 예비연구

연구자가 작성한 도구가 연구검사 도구로 적절한지를 알아보기 위하여 2007년 9월 1일부터 10월 27일까지 서울의 B대학의 사회교육원에서 운영하고 있는 수학교실에 수강중인 초등학교 5학년 4명의 아동을 대상으로 자연수의 사칙연산을 어떤 의미로 이해하고 있는지 연구하였다. 이 과정에서 초안으로 작성한 연구도구의 오류를

수정하고 수학교육 전문가의 조언을 통하여 연구도구를 확정하였다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구는 2007년 1월에서 2008년 7월까지 1년 6개월 동안 수행되었다. 우선 아동의 일반적인 수학 수준과 수학적 성향 및 사회적 배경에 관한 정보를 알기 위해 진단평가, 자기관찰 체크 리스트, 사회적 배경 관련 설문을 실시하였다. 자연수의 사칙연산에 대하여 아동들이 어떤 의미로 이해하고 있는지 알아보기 위하여, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 설문을 실시하였고, 아동들의 문장제 해결 능력을 알아보기 위하여 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈 문장제의 의미론적 구조로 분류된 평가지로 시험을 실시하였다. 그 다음 설문지와 평가지의 결과를 토대로 분석 틀을 고안하고, 그 분석 틀에 기초하여 사칙연산에 대한 아동들의 이해를 범주화하고 분석하였다. 설문지와 평가지로 확인할 수 없는 부분들에 대해서는 개별 면담을 실시하여 확인하였다. 모든 개별 면담은 비디오로 촬영하여 전사하였다. 개별 면담 자료는 사칙연산에 대한 아동의 이해와 문장제 해결 과정에서 아동의 오류, 오개념 등을 알 수 있어 중요한 분석 자료로 사용되었다.

1) 사칙연산에 대한 아동의 이해

사칙연산에 대하여 아동이 어떤 의미로 이해하고 있는지 알아보기 위하여 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에 대하여 각각 다음과 같은 형식의 질문을 하였다. "3 + 5(삼 더하기 오)를 나타내는 예를 가능한 많이 써보세요.", "3 + 5(삼 더하기 오)가 의미하는 것은 무엇인가요?" 아동에게 적어도 3가지 이상의 예를 쓰도록 했으며, "공이 3개가 있는데 동생이 5개를 더 갖다 주었다. 총 공의 개수는?(H3:2)[1]"과 같이 연산의 문장제를 만들도록 권장하였다. 아동이 작성한 연산 문장제의 의미 구조와 연산의 의미로 작성한 개념이 일치하는지를 분석하고, 불일치하는 경우에는 아동과의 개별 면담을 통해서 아동이 각 연산을 어떤 의미로 이해하고 있는지 확인하였다. 개별 면담은 반구조화 면담으로 실시하였으며, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 설문지와 면담 내용을 바탕으로 각 연산에 대한 아동의 이해를 범주화하여 분석하였다.

2) 사칙연산 문장제의 해결

사칙연산에 대한 아동의 이해가 아동의 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 문장제의 의미론적 구조로 분류된 평가지를 작성하였다. 덧셈과 뺄셈 문장제는 English(1995)가 제시한 덧셈과 뺄셈의 문제를 재구성한 것이고, 곱셈과 나눗셈 문제는 Greer(1992)가 규명한 10가지 의미론적 구조에 기초하여 이종욱(2007)이 재구성한 문제를 사용하였다. <표3>와 <표4>는 본 연구에서 사용한 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈 문장제이다. 추측을 통한 문제 해결 가능성을 최소화하기 위하여

<표 3> 덧셈과 뺄셈 문장제

덧셈	뺄셈
첨가	제거
1. 제희는 23개의 구슬을 가지고 있었습니다. 수진이는 제희에게 18개의 구슬을 더 주었습니다. 제희는 지금 몇 개의 구슬을 가지고 있습니까?	9. 동수는 120개의 사탕을 가지고 있었는데 그 중 23개를 먹었습니다. 동수는 지금 몇 개의 사탕을 가지고 있습니까?
합병	비교
3. 수지는 15개의 녹색 연필과 19개의 파란색 연필을 가지고 있습니다. 수지는 모두 몇 개의 연필을 가지고 있습니까?	7. 현주는 11마리의 금붕어를 가지고 있습니다. 현주는 미희보다 8마리의 금붕어를 더 가지고 있습니다. 미희는 몇 마리의 금붕어를 가지고 있습니까?
	동등화
	14. 수지는 27개의 돌을 가지고 있습니다. 제희는 19개의 돌을 가지고 있습니다. 제희가 수지만큼의 돌을 가지기 위해서는 몇 개의 돌을 더 가져야 합니까?

1) 학생이 작성한 예문의 코딩번호이다.

<표 4> 곱셈과 나눗셈 문장제

곱셈	나눗셈
동치 묶음	등분할
2. 긴 의자 한 개에 4명의 어린이가 앉을 수 있습니다. 긴 의자가 2개 있다면, 모두 몇 명이 앉을 수 있습니까?	4. 어린이가 8명 있습니다. 긴 의자 2개에 똑같이 나누어 앉으려고 합니다. 긴 의자 한 개에는 몇 명이 앉을 수 있습니까?
11. 철수는 매일 아침 우유를 2개 먹습니다. 3일 동안에는 모두 몇 개의 우유를 먹겠습니까?	10. 콜라가 6병 있습니다. 3명의 어린이가 똑같이 나누어 가지려고 합니다. 한 어린이가 몇 개의 콜라를 가지면 됩니까?
직사각형 정렬	측정
16. 어린이가 3명씩 4줄 서 있습니다. 어린이는 모두 몇 명입니까?	12. 어린이가 10명 있습니다. 한 의자에 2명씩 앉으려고 합니다. 모두 몇 개의 의자가 필요합니까?
비교	곱셈의 역
8. 상일이는 책을 3권 가지고 있습니다. 경미는 상일이의 4배만큼 가지고 있습니다. 경미가 가지고 있는 책은 모두 몇 권입니까?	6. 세발 자전거가 몇 대 있습니다. 바퀴를 세어보니 모두 12개입니다. 세발 자전거는 모두 몇 대 있습니까?
비율	비교
15. 지우개를 1개를 사는데 백 원짜리 동전 5개가 필요합니다. 지우개 2개를 사려면 백 원짜리 동전 몇 개가 필요합니까?	13. 철수는 책을 9권 가지고 있습니다. 이것은 순희가 가지고 있는 책의 3배가 됩니다. 순희가 가지고 있는 책은 모두 몇 권입니까?
조합	비율
5. 연주는 긴소매 티와 반팔 티를 가지고 있습니다. 또 긴 바지, 반바지, 치마를 가지고 있습니다. 연주는 옷을 모두 몇 가지로 입을 수 있습니까?	17. 지우개 3개를 백 원짜리 동전 12개를 주고 샀습니다. 지우개 1개는 백 원짜리 동전 몇 개를 주고 살 수 있습니까?

문항을 무작위로 배열하였다.

본 연구에서 사용된 문장제는 하나의 수 연산(덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈)으로 해결할 수 있는 문제 즉, 1단계 문제(One-Step Problem)로 제한하였다. 1단계 문장제는 문장제에 주어진 자료의 표상과 답으로 나타나는 수의 표상 사이의 관계 구조를 잘 알 수 있게 하기 때문이다 (Christou, C. & Philippou, G., 1998).

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 사칙연산에 대한 아동의 이해 범주화

아동이 작성한 문제 설정 예시와 의미 예시와 개별 면담 자료를 기초로 연산에 대한 아동의 이해를 범주화하였다. 우선 문제 설정 예시와 의미 예시를 분석한 결과 29명의 아동 중 문제 설정 범주와 의미 범주가 하나의 연산이라도 일치하지 않은 아동이 21명이었다. 덧셈은 11명, 뺄셈은 2명, 곱셈은 14명, 나눗셈은 11명이 문제 설정 상황과 의미를 확인하기 어렵거나 일치하지 않았다.

K의 경우 덧셈의 문제 설정으로는 첨가의 상황을 쓴 반면 의미는 합병의 의미를 썼다. K의 경우처럼, 문제 설정과 의미가 불일치하는 경우에 대해서는 모두 개별 면담을 하여 연산에 대하여 아동이 어떤 의미로 이해하고 있는지 확인하였다.

R: 여기 덧셈의 상황과 의미를 다르게 썼네. 덧셈의 상황은 "사탕 3개가 있는데 어떤 사람이 5개를 줬을 때"라고 하고, 의미에는 "삼하고 오를 합치는 것, 삼하고 오를 더하는 것"이라고 썼는데, 삼하고 오를 합치는 것과 삼하고 오를 더하는 것은 무엇

을 의미하는 거예요?
K: 3개 있을 때 5개를 더 주는거요.

연구자는 면담을 통하여 K는 더하는 행위, 합치는 행위, 첨가하는 행위를 모두 같은 것으로 인식하고 있음을 알 수 있었다. K의 경우 덧셈을 첨가의 의미로 이해하고 있다고 코딩되었다.

다음은 B의 사례로 뺄셈의 문제 설정으로 제거와 비교 상황을 모두 썼고, 의미는 제거의 의미로만 쓴 경우에 뺄셈에 대하여 B가 어떻게 이해하고 있는지 알아보는 면담과정이다.

R: 여기를 보면, 뺄셈의 상황을 "과자 5개에서 3개를 먹는 경우"와 "1시간에 5km를 가는 차가 3km가는 차 보다 얼마나 많이 갔는가?"라고 썼는데, 5 빼기 3이 의미하는 게 뭐예요?
B: 5개에서 3개를 없애는 거요.
R: 이 두 가지는 서로 다른 상황을 나타내는 것 같은데?
B: 네.
R: 그럼, 왜 의미는 한 가지만 썼어요?
B: 그냥 없애는 거라고 생각해서요.
R: B가 생각하기에 뺄셈은 없애는 것만 인 것 같아?
B: 네. 그게 가장 큰 의미 같아요.

B와 같이 제거와 비교의 상황을 모두 적었어도 뺄셈의 주된 의미를 제거의 의미로 이해하고 있는 경우에 의미에는 제거의 의미만 적었다. 상황과 의미가 일치하지 않은 대부분의 아동들이 B와 유사하게 여러 상황에서 자신이 가장 중요하게 생각하는 의미를 의미 란에 적었다. B의 경우는 뺄셈을 제거의 의미로 이해하고 있다고 코딩되었다. 각 연산에 대하여 아동이 기술한 문제 상황과 의미 내용, 그리고 개별 면담 내용을 기반으로 심층 분석하여 각 연산에 대한 아동의 이해를 다음과 같이 범주화하였다.

1) 덧셈

아동이 작성한 문제 설정 예시와 의미 예시와 개별 면담 자료를 기초로 덧셈은 크게 첨가와 합병으로 범주화하였다. 첨가는 덧셈을 하나의 양에 다른 양을 더 첨가하거나 더 늘리는 상황으로 이해하고 있는 경우로 이는 이전에 살펴 본 Fuson(1992)의 '첨가에 의한 변화'와 동일한 의미이다. 합병은 덧셈을 두 개의 독립된 양을 동시에 모아 하나의 양으로 합치는 상황으로 이해하고 있는 경우이다. 덧셈의 합병은 Fuson(1992)이 언급한 물리적 합병과 개념적 합병 모두를 포함한다. <표5>는 덧셈, 뺄셈에 대한 아동의 의미 범주화 과정에서 아동이 작성한 문제설정 예시와 의미 예시이다.

자연수의 덧셈에 대하여 아동이 어떤 의미로 이해하고 있는지 설문지와 개별 면담을 통하여 분석한 결과 자연수의 덧셈을 첨가의 의미로만 이해하고 있는 아동이 19명(65.5%), 합병의 의미로만 이해하고 있는 아동이 4명(13.8%), 첨가와 합병 두 가지 의미로 이해하고 있는 아동이 6명(20.7%)이었다. 전체적으로 자연수의 덧셈을 첨가의 의미로 이해하고 있는 아동은 25명(86.2%), 합병의 의미로 이해하고 있는 아동은 10명(34.5%)으로 대부분의 아동이 첨가의 의미로 덧셈을 이해하고 있었다. Fischbein et al.(1985)은 덧셈에 대한 아동의 직관 모델을 '합병'으로 제시하였으나, 본 연구에 참여한 아동들은 대부분 첨가의 상황으로 덧셈을 이해하고 있었다. 노현옥・정은실(2005)이 제 7차 초등학교 교과서에 제시된

<표 5> 덧셈의 이해 범주

	범주	문제설정 예시	의미 예시
덧셈	첨가	씨앗이 3개가 있는데 5개를 더 샀다. 씨앗의 개수는?(E7:1) 배가 3개가 있었는데 5개를 또 받았다. 배는 모두 몇 개인가?(J7:1)	3개에서 5가 더 생기는 것, 3개에서 5개를 더 가져오는 것(Q7:4), 3개의 무언가에 5개를 더 넣는다는 것(다1:4), 3에 5를 더 늘린 것입니다.(라1:4) 3에서 5가 더 많아진 것이다.(바1:5)
	합병	어제 산에 가서 동생은 도토리를 3개 주웠고, 나는 도토리를 5개 주었다. 동생과 내가 주운 도토리는 몇 개일까?(N7:1)	3에다 5을 합하는 것(N7:1), 3과 5를 모으는 것(가1:4), 3+5는 3에 5가 합쳐진다는 뜻입니다.(사1:4)

의미론적 덧셈 상황의 유형별 문장제 수를 조사한 결과를 살펴보면 첨가는 45.12%, 합병은 54.88%로 합병의 문장제가 더 많은 것으로 나타났다. 그럼에도 불구하고 본 연구에서 많은 아동이 덧셈을 첨가의 상황으로 이해하고 있는 것은 아동의 일상생활 속에서 덧셈 상황으로 첨가의 상황이 합병의 상황보다 더 익숙하고 빈번하게 일어나기 때문으로 분석되었다.

<표 6> 자연수의 덧셈에 대한 아동의 이해

범주 \ 학년	4학년	5학년	6학년	총합	비율(%)
첨가	14명	4명	1명	19명	65.5
합병	2명	1명	1명	4명	13.8
첨가,합병	0명	4명	2명	6명	20.7

덧셈의 의미로 특별한 예를 들었던 아동도 있었다. 예를 들어, C는 3 더하기 5를 나타내는 문제 상황으로 "난 지금 3살이다. 5년 후 난 몇 살인가? 내가 3층에 있다. 5층을 올라가면 몇 층인가?(P7:1)"라고 기술하였다. C는 개별 면담에서 "삼과 오를 더하는 의미는 무엇이니?"라는 질문에 "삼과 오를 합치는 거요."라고 대답하였다.

2) 뺄셈

뺄셈은 제거와 비교로 범주화하였다. 제거는 뺄셈을 하나의 양에서 그 부분이 없어지거나 가져가는 상황으로 이해하는 경우로 Carpenter et al. (1999)의 '부분-부분-전체'와 Fuson(1992)의 '첨가에 의한 제거'와 동일한 의미를 지닌다. 비교는 뺄셈을 두 양의 크기를 서로 비교하여 두 양의 차를 구하는 상황으로 Fuson(1992)의 '비교'와 동일한 의미를 가진다. 본 연구에서는 뺄셈을 Fuson(1992)의 '동등화' 상황으로 이해하고 있는 아동이 없었다. 따라서 비교에는 개념적으로 동등화 상황이 포함되지만 본 연구에서는 포함하지 않았다. <표7>은 뺄셈에 대한 아동의 의미 범주화 과정에서 아동이 작성한 문제설정 예시와 의미 예시이다.

자연수의 뺄셈에 대하여 아동이 어떤 의미로 이해하고 있는지 분석한 결과 제거의 의미로만 이해하고 있는 아동이 25명(86.2%)으로 가장 많았으며, 제거와 비교 두 가지 의미를 모두 가지고 있는 아동이 4명(13.8%)이었고, 뺄셈을 비교의 의미로만 이해하고 있는 아동은 아무도 없었다. 전체적으로 제거의 의미로 이해하고 있는 아동이 29명(100%)으로 모든 아동이 뺄셈을 제거의 의미로 이해하고 있었다.

<표 8> 자연수의 뺄셈에 대한 아동의 이해

범주 \ 학년	4학년	5학년	6학년	총합	비율(%)
제거	14명	7명	4명	25명	86.2
비교	0명	0명	0명	0명	0
제거, 비교	2명	2명	0명	4명	13.8

제거의 상황은 Fischbein et al.(1985)이 제시한 뺄셈에 대한 아동의 직관 모델과 일치하였다. 아동은 뺄셈을 두 대상을 비교하여 그 차이를 구하는 것보다 전체 대상에서 부분을 제거하는 것으로 이해하고 있었으며, 그 이유는 덧셈과 유사하게 아동의 일상생활 속에서 뺄셈이 제거의 상황으로 더 빈번하게 사용되고 있었기 때문이었

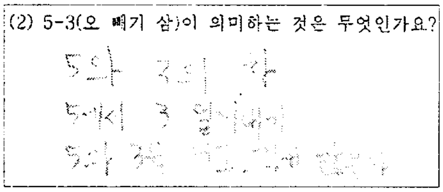
<표 7> 뺄셈의 이해 범주

	범주	문제설정 예시	의미 예시
뺄셈	제거	나무가 5그루가 있었는데 3그루를 베어서 가져갔습니다. 남은 나무는 몇 그루?(W8:3) 문성이는 동전 5개가 있다. 그런데 3개의 동전이 바닥에 떨어졌다. 문성이는 몇 개의 동전을 가지고 있을까?(아2:2)	5에서 3만큼을 없애는 것(V8:4), 5개에서 3을 제거하는 것(J8:4), 전체(5)에서 필요없는 부분(3)을 버려서 필요한 부분만 가지는 것(2)을 말한다.(F8:6) 5에서 3이 줄어든 것이다.(바2:5), 숫자 오 중(다섯개) 숫자 삼이 빠지는 것을 의미한다. (아2:4) 5개에서 3개가 사라진 것(차2:4)
	비교	정원사 A는 꽃씨 5개가 있고, 정원사 B는 꽃씨 3개가 있습니다. 정원사 A는 정원사 B보다 꽃씨가 몇 개 더 많습니까?(E8:1)	5와 3의 차(E8:3), 5와 3을 비교, 몇 개 많은가(E8:5)

다. 또한 뺄셈 문제를 풀 때 없애는 활동을 하는 것도 아동이 뺄셈을 제거의 의미로 이해하는 이유가 되었다. 또 다른 이유로 아동이 교과서를 통하여 제거 상황의 뺄셈 문제에 많이 노출된 점을 들 수 있다. 제 7차 초등학교 교과서에 제시된 의미론적 뺄셈 상황의 유형별 문장제 수를 살펴보면 제거가 63.12%, 비교가 36.88로 제거의 문장제가 더 많이 제시되었다(노현옥 · 정은실, 2005). 노현옥 · 정은실(2005)은 교과서에 뺄셈의 제거와 비교 상황별 문제유형이 고르게 제시되어 있지 않고 편중되어 있음을 지적하였다.

뺄셈의 의미를 제거와 비교의 상황으로 이해하고 있는 4명의 아동 중에 E는 뺄셈의 의미를 물어보는 설문지에 <그림 1>과 같이 작성하였고, 뺄셈의 의미를 묻는 질문에 대하여 다음과 같이 응답하였다.

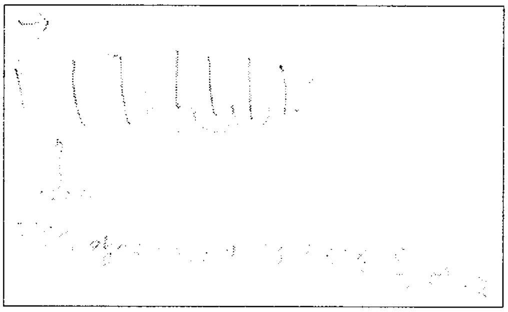
R: 5 빼기 3이라는 건 뭘 의미하는 거예요?
E: 5개에서 3개를 덜어내는 거요.
R: 그리고 또?
E: 5개와 3개를 비교해서 어떤 것이 몇 개 많은지 알아보는 거요.



<그림 1> E의 뺄셈의 의미

E는 뺄셈의 의미를 제거와 비교의 상황으로 이해하고 있었으며, 뺄셈의 제거, 비교, 동등화 문제를 모두 성공적으로 해결하였다.

본 연구에서는 뺄셈의 의미가 다른 아동과는 다소 다른 경우도 발견되었다. C의 경우 뺄셈의 상황으로 "나는 지금 8살이다. 5년 전에는 난 몇 살인가? 난 지금 5층인데 3층 내려가면 몇 층인가?"라고 적었다. C은 면담시 "덧셈과 똑같은 상황으로 만들려고 이렇게 했어요"라고 말하였다. C는 덧셈과 뺄셈 상황 모두 서수적 개념을 이용하여 이해하고 있었다. 서수적 개념으로 이해하고 있는 카 또한 <그림 2>와 같이 뺄셈의 의미를 "여기서 5칸을 앞으로 갔다가 3칸 뒤로 돌아오는 것(카2:5)"이라고 적었다. 본 연구에서는 덧셈과 뺄셈의 의미를 서수적 개념에 기초하여 알고 있는 두 아동을 따로 범주화하여 구분하지 않았다.



<그림 2> 카의 뺄셈의 의미

3) 곱셈

곱셈과 나눗셈은 Greer(1992)가 분류한 곱셈 상황인 '동치묶음', '곱셈적 비교', '조합', '직사각형 넓이'에 '비율'을 추가한 5가지 범주와 나눗셈 상황인 등분제와 포함제를 이론적 기초로 곱셈과 나눗셈에 대한 아동의 이해를 범주화하였다.

곱셈은 아동의 곱셈 문제 설정 예시와 의미 예시, 개별 면담 자료를 기반으로 '동치묶음', '비교', '직사각형 정렬', '비율', '조합'으로 범주화하였다. 동치묶음은 각 묶음에 같은 수를 갖는 여러 묶음을 가지고 있는 상황으로 곱셈을 동수누가의 의미로 이해하고 있는 경우를 포함한다. 이것은 Greer(1992)와 Carpenter et al. (1999)가 제시한 '동치묶음'과 같은 의미이다. 비교는 곱셈적 비교 상황으로 곱셈을 한 양이 몇 배로 늘어나는 것으로 이해하는 경우로 Greer(1992)의 '곱셈적 비교'와 동일한 의미를 지닌다. 조합은 곱셈을 한 집합의 원소가 다른 집합의 원소와 짝지어질 수 있는 모든 조합의 수로 이해하는 경우로 Greer(1992)의 '조합(Cartesian Product)'과 같은 의미이다. 직사각형 정렬은 곱셈을 어떤 대상을 가로와 세로로 정렬하는 상황 또는 직사각형의 넓이를 구하는 상황으로 이해하는 경우를 의미한다. 직사각형 정렬은 Carpenter et al.(1999)가 제시한 '정렬'과 Greer(1992)가 제시한 '직사각형 넓이'와 같은 의미이다. 비율은 서로 다른 성질을 가지고 있는 두 양 사이의 비교로 동치묶음과 다른 부분이 있어 하나의 범주로 분류하기도 한다. 동치묶음은 같은 수를 몇 번 더하는 행위를 포함하지만

비율은 의미상 그렇지 않다. 예를 들어, 동치묶음 상황의 곱셈 문제인 '구슬이 3개 들어있는 주머니가 2개 있다면, 구슬은 모두 몇 개인가?'와 비율 상황의 곱셈 문제인 '자전거로 1시간에 3km를 갈 수 있다면, 2시간에는 몇 km를 갈 수 있는가?'에서 두 수 3과 2를 교환한 결과는 6으로 동치묶음과 비율 상황이 같지만 그 의미는 서로 다르다. 또한 비율은 분수와 소수까지 그 범위를 확장할 수 있다는 점에서 동치묶음보다는 수 체계에서의 확장성이 높다. 따라서 본 논문에서는 곱셈에 대한 아동의 의미를 '동치묶음', '비교', '직사각형 정렬', '비율', '조합'으로 범주화하였다. <표 9>는 곱셈에 대한 아동의 의미 범주화 과정에서 아동이 작성한 문제설정 예시와 의미 예시이다. 곱셈의 의미로 비율과 조합의 의미를 기재한 아동은 한 명도 없었고, 조합의 경우는 곱셈의 문제 상황으로도 언급되지 않아 표에 기재하지 않았다.

자연수의 곱셈에 대한 아동의 이해를 분석한 결과를 살펴보면, 곱셈을 동치묶음의 의미로만 이해하고 있는 아동이 14명(48.3%)으로 가장 많았으며, 동치묶음과 직사각형 정렬 또는 동치묶음과 비교의 의미로 곱셈을 이해하고 있는 아동이 각각 4명(13.8%)으로 두 번째로 많았다. 그 다음은 동치묶음과 직사각형 정렬, 비교의 의미를 모두 가지고 있는 아동이 3명(10.3%)이었고, 동치묶음과 비율의 의미로 곱셈을 이해하고 있는 아동이 2명(6.9%) 등의 순으로 나타났다. 전체적으로 곱셈의 의미를 동치묶음의 의미로 이해하고 있는 학생은 29명(100%)으로 모든 학생들이 곱셈을 동치묶음의 상황 또는 동수누가로 이해하고 있었다. 이것은 Fischbein et al.(1985)이 제시한 곱셈에 대한 아동의 직관모델인 반복된 덧셈과 일치하였다.

<표 9> 곱셈의 이해 범주

	범주	문제설정 예시	의미 예시
곱셈	동치묶음	필통에 연필이 3자루 담겨있는 필통이 4개 있다. 연필은 모두 몇 개인가?(O6:2)	3을 4번 더한 것(W5:4), 3이 4개 있는 것(Y8:4), 삼이 네 번 더해진 것(O6:4), 삼이 네 묶음 있는 것(O6:5), 3+3+3+3을 간단하고 쉽게 계산하기 위하여 하는 것(마3:4),
	직사각형 정렬	가로 3m, 세로 4m인 땅이 있습니다. 땅은 몇 제곱미터입니까?(O6:1) 가로가 3칸 세로가 4칸짜리 빙고판은 몇 칸일까?(K8:3) 게임을 해야한다. 3명씩 4줄로 서야한다. 학생들은 모두 몇 명인가?(G9:3) 3명씩 4줄을 섰다. 학생의 수는?(A1I)	3개씩 4줄(EI), 3이 4개 있는 것(V8:4), 3에다 4를 가로, 세로로 그 수대로 펼쳐 그 수를 알아내는 것(나3:4) 4가 3개 있다는 뜻입니다(사3:4), 3을 4번씩 더한 것(차3:4)
	비교	물이 3L있었는데 물을 1시간 동안 받으니 받기 전보다 4배로 늘었습니다. 지금 물은 몇 L입니까?(V9:1) 스펀지가 3g이었는데 물 속에 담갔다가 꺼냈더니 무게가 4배로 늘었습니다. 지금 스펀지는 몇 g입니까?(V9:2)	3의 4배가 오는 것(T12:4), 배로 늘어나는 것(N10:4) 3의 4배(I10:4), 3+3+3+3(X10:4) 3에서 일정한 규칙대로 4만큼 불어난다.
	비율	샤프심이 한 개에 3원이라면 4개를 살려면 돈이 얼마나 있어야 할까요?(I10:3) 숙수는 4일 동안 수학문제를 풀려고 한다. 하루에 3쪽씩 푼다면 4일 뒤엔 몇 쪽이 풀어져 있을까?(아3:2)	

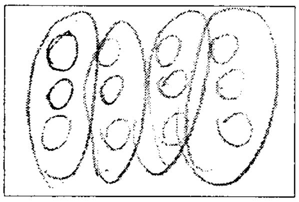
<표 10> 자연수의 곱셈에 대한 아동의 이해

범주 \ 학년	4학년	5학년	6학년	총합	비율(%)
동치묶음	8명	4명	2명	14명	48.3
직사각형정렬	0명	0명	0명	0명	0
비교	0명	0명	0명	0명	0
비율	0명	0명	0명	0명	0
조합	0명	0명	0명	0명	0
동치묶음, 직사각형정렬	2명	0명	2명	4명	13.8
동치묶음, 비교	3명	1명	0명	4명	13.8
동치묶음, 비율	1명	1명	0명	2명	6.9
동치묶음, 직사각형정렬, 비교	1명	2명	0명	3명	10.3
동치묶음, 직사각형정렬, 비율	0명	1명	0명	1명	3.4
동치묶음, 비교, 비율	1명	0명	0명	1명	3.4

자연수의 곱셈을 동치묶음과 직사각형 정렬의 의미로 이해하고 있는 E의 경우 연구자의 "삼 곱하기 사는 뭘 의미하는 거예요?"라는 질문에 "삼이라는 숫자가 네 번 있는 것이랑, 삼이라는 것이 4줄씩 있는거요."라고 대답하였다.

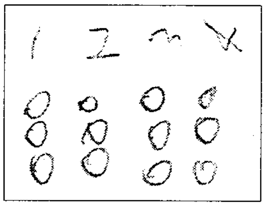
다음은 곱셈을 동치묶음과 직사각형 정렬, 비교의 의미로 이해하고 있는 아동의 면담 내용과 아동이 면담 중 그린 그림이다.

R: 삼 곱하기 사가 의미하는 것은 뭐라 생각했어요?
F: 삼을 네 번 더한 것이요. 그리고 3개가 4묶음씩 있어서 합한 개수를 구하는 것이요.
R: 그림으로 나타내볼까?
F: 12개가 있으면요. 이렇게 이렇게 이렇게 이렇게 묶는 거요.



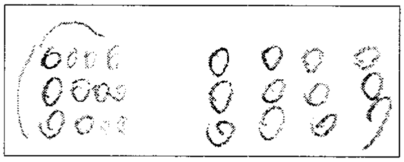
<그림 3> F의 곱셈의 동치묶음 표현

R: (F가 작성한 활동지를 손가락으로 가리키며) "무단횡단을 해서 기본벌금(3원)의 4배를 내서 12원을 냈다." 그럼 이건 어떤 의미야? (잠시 후) 4배도 곱하기의 의미인가요?
F: 예.
R: 배라는 건 뭐예요?
F: 계속 몇 배씩 계속 몇 배씩 늘어나는 거요.
R: 배의 개념이 더한다는 개념과 같아요?
F: 예. 아니. 3개씩 늘어나는 것이요. 처음에 3이 있으면요. 3에다 3을 더하면 6이 되잖아요. 6은 3의 2배, 9는 3의 3배, 12는 3의 4배 이렇게 해가지고 3씩 늘어나는 거요.
R: 3곱하기 4는?
F: 3씩 4번 늘어나는 거요.
R: 배를 그림으로 그리면?
F: 처음에 이렇게 세 개가 있으면요. 처음을 1이라고 하고요. 이런 게 한 개씩 늘어날 때 두 번째는 2고, 이렇게 3, 4요



<그림 4> F의 곱셈의 비교 표현

R: 3곱하기 4의 다른 의미가 또 있어요? (…중략…)
R: 그러면, 세로로 3줄짜리가 4개 있는 것과도 같아요?
F : 예.
R: 그것도 3 곱하기 4예요?
F: 그건 4곱하기 3이예요. 근데 둘 다 되요. 3곱하기 4랑 4곱하기 3이랑. 이렇게 3칸이 있고, 4칸이 있을 때 여기에 채워서 늘려지는 거요.



<그림 5> F의 곱셈의 직사각형 정렬 표현

곱셈의 의미를 동치묶음과 비교, 직사각형 정렬의 다양한 의미로 이해하고 있었던 F의 경우를 제외한 다른 아동들은 대부분 곱셈을 동치묶음의 의미로 이해하고 있

었다. 제 7차 교과서에서 의미론적 곱셈 상황의 유형별 문장제 수를 살펴보면 동수누가가 91.82%로 절대적으로 차지하였다(노현옥 · 정은실, 2005). 본 연구에서 곱셈에 대하여 가장 많은 아동이 이해하고 있는 의미와 교과서에서 가장 많은 비중을 차지하고 있는 곱셈 상황이 일치하였다.

자연수의 곱셈에 대한 아동의 이해를 분석한 결과 비교, 비율, 직사각형 정렬, 비율의 개념으로만 곱셈을 이해하고 있는 아동은 아무도 없었다. 모든 아동이 동치묶음의 개념으로 곱셈을 이해하고 있었는데 이는 교과서에서 곱셈을 처음 도입할 때 동치묶음의 상황으로 설명하기 때문으로 생각된다.

4) 나눗셈

나눗셈은 '등분할', '측정', '비교', '비율', '곱셈의 역', '동수누감'으로 범주화하였다. 등분할은 나눗셈을 전체를 똑같은 양으로 나누는 것 즉, 등분제 상황으로 이해하는 경우이며, 측정은 전체를 몇 씩 묶는 상황이나 전체에 부분이 몇 번 들어가는지 알아보는 것 즉, 포함제 상황으로 이해하는 경우이다.

비교와 비율은 곱셈의 비교, 비율 범주와 같은 의미이며, 곱셈의 역은 나눗셈을 곱셈의 반대로 이해하여 나눗셈 문제를 곱셈 문제의 반대로 생각하여 해결하는 경우를 말한다. 예를 들면, 12÷3은 3에 무엇을 곱하면 12가 되는지를 생각하여 푸는 것이다. 동수누감은 측정 나눗셈 문제의 해결 전략이기도 하는데, 나눗셈을 전체가 0이 될 때까지 몇 씩 빼는 것으로 이해하는 경우이다.

<표 11>은 나눗셈에 대한 아동의 의미 범주화 과정에서 아동이 작성한 문제설정 예시와 의미 예시이다. 본 연구의 참여자 중 나눗셈의 상황으로 동수누감의 상황을 적은 아동은 아무도 없었으며, 나눗셈의 의미에 비교와 비율의 의미를 적은 아동도 없었다.

<표 11> 자연수의 나눗셈에 대한 아동의 이해

	범주	문제설정 예시	의미 예시
나눗셈	분할	12개의 초콜릿이 있었는데 똑같이 3박스에 담았다. 한 상자엔 몇 개의 초콜릿이 있을까요?(S13:1) 아이스크림 12개를 3명의 친구가 나누어 먹을려고 한다. 한 명에 몇 개를 받을 수 있을까?(I13:1)	무엇 12개를 3명이 나누어가지는 것(I13:4) 똑같이 쪼개는 것, 12개를 3개로 똑같이 나누는 것, 12라는 큰 한 조각을 3으로 나누어서 작은 네 조각으로 만드는 것을 말한다. 12를 3묶음으로 묶는 것
	측정	12개의 스티커를 3개씩 묶었다. 모두 몇 묶음인가요?(S13:2) 구슬 12개를 3개씩 상자에 담으려고 합니다. 필요한 상자는 몇 상자입니까?(A13:3)	12를 3씩 나눈다. 12가 3개씩 나눠지는 것, 12안에 3이 몇 개 들어가 있는 것, 12를 3개씩 묶는 것
	비교	욕샘쟁이의 금화자루 12자루가 4개로 줄어들었다. 몇 배로 줄어들었나?(타4:1)	일정한 규칙으로 줄어든다는 것(타4:4), 12에서 3씩 줄어들면 4번 줄어들어야 한다.(타4:5)
	비율	12마리의 참새가 전깃줄에 앉아있다. 화살을 한번 쏘면 한꺼번에 3마리가 죽는다고 한다. 화살은 몇개 쏘았을까요?(S13:3)	
	곱셈의 역	12개의 포도를 몇 명과 나누니 3이 되었다. 사람수는?(Y11:3) 어떤 수에 3을 곱했더니 12가 나왔다. 어떤 수는 얼마인가?(EI)	□×3=12의 역(EI), 3에서 12가 되려면 몇을 곱하는지를 의미한다.(라4:4) 12÷3은 3이 몇개가 있으면 12가 된다는 뜻입니다.(사4:4)두개를 곱하면 12가 나와서(YI)
	동수누감		12에서 3씩 가져가는 것(S13:5), 12에서 3개씩 빼는 것(SI), 12를 0이 될 때까지 3으로 빼는 것, 12를 3씩 뺄 때 몇 번을 빼면 되는지(차4:4)

분석 결과 나눗셈을 등분할과 측정의 의미로만 이해하고 있는 아동이 12명(41.4%)으로 가장 많았으며, 그 다음으로 나눗셈을 등분할의 의미로 이해하고 있는 아동이 10명(34.5%)이었고, 나눗셈을 측정의 의미로만 이해하고 있는 아동은 4명(13.8%)밖에 되지 않았다. 그 외 나눗셈을 동수누감 또는 등분할과 곱셈의 역, 등분할과 측정, 곱셈의 역으로 이해하고 있는 아동이 각각 1명씩 있었다. 전체적으로 나눗셈의 의미를 등분할의 의미로 이해하고 있는 아동이 24명(82.8%)으로 가장 많았고, 측정의 의미로 이해하고 있는 아동은 17명(58.6%)이었다.

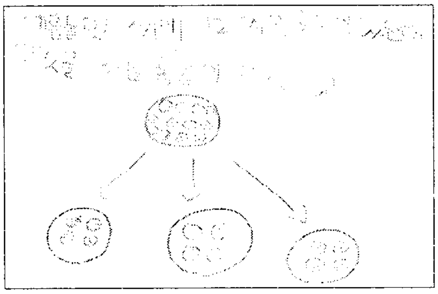
<표 12> 자연수의 나눗셈에 대한 아동의 이해

범주 \ 학년	4학년	5학년	6학년	총합	비율(%)
등분할	4명	3명	3명	10명	34.5
측정	3명	1명	0명	4명	13.8
비교	0명	0명	0명	0명	0
비율	0명	0명	0명	0명	0
곱셈의 역	0명	0명	0명	0명	0
동수누감	1명	0명	0명	1명	3.4
등분할, 측정	6명	5명	1명	12명	41.4
등분할, 곱셈의 역	1명	0명	0명	1명	3.4
등분할, 측정, 곱셈의 역	1명	0명	0명	1명	3.4

Fischbein et al.(1985)은 나눗셈의 직관 모델을 등분제 상황과 포함제 상황으로 나누어 제시하였는데, 등분제의 경우는 '등분할', 포함제의 경우는 '반복된 뺄셈'으로 아동의 초기 직관모델을 제시하였다. 본 연구에서는 더 많은 아동이 나눗셈을 포함제보다는 등분제의 상황으로 이해하고 있었으며, 등분제의 경우 등분할의 의미로 나눗셈을 이해하고 있었다. 이것은 Fischbein et al.(1985)이 제시한 나눗셈의 초기 직관 모델과 일치하는 결과이다.

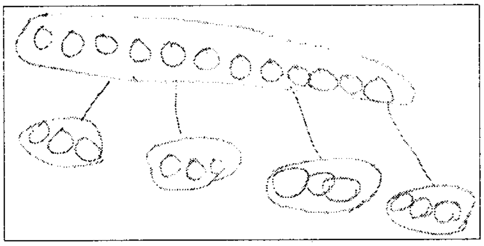
제 7차 교과서에서 나눗셈은 3-가 단계에서는 등분제와 포함제가 거의 비슷하게 제시되었으나, 3-나 단계에서는 포함제가 85.71%인데 반해 등분제는 14.29%로만 제시되어 있었고, 전체적으로 포함제는 60.98%, 등분제는 39.02%로 포함제가 등분제보다 더 많이 제시되고 있었다(노현옥 · 정은실, 2005). 본 연구에서는 아동의 나눗셈에 대한 이해는 교과서에 제시된 나눗셈 상황의 빈도수와는 다른 결과를 보였는데, 본 연구에 참여한 아동의 일상생활에서는 나눗셈이 어떤 물건을 여러 사람이 똑같이 나누어 가지는 상황으로 더욱 빈번하게 사용되었기 때문으로 분석되었다.

나눗셈에 관한 면담 과정에서 나눗셈의 등분할의 의미와 측정의 의미는 아동이 그리는 그림을 통하여 확연히 구분되었다. <그림 6>은 아동 바가 12 나누기 3의 의미 란에 그린 그림으로, 바는 나눗셈을 등분할의 의미로 이해하고 있는 아동이다.



<그림 6> 바의 나눗셈의 등분할의 의미 표현

<그림 7>은 아동 AC가 그린 그림으로, AC는 나눗셈을 측정의 의미로 이해하고 있었다.

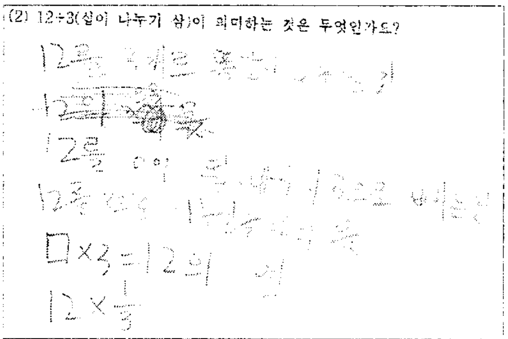


<그림 7> AC의 나눗셈의 측정의 의미 표현

다음은 나눗셈에 대한 다양한 의미를 가지고 있는 E 아동의 면담 내용이다. E 아동은 나눗셈의 예에는 등분의 예만 적었지만, 의미 란에는 <그림 8>과 같이 등분할, 동수누감, 몫의 의미, 곱셈의 역의 의미를 적었다.

R: 십이 나누기 삼이 의미하는 게 뭐예요?
E: 십이를 전체로 보아서 똑같이 세 개로 나누는 것이요.

R: 그리고 또?
E: (7초 잠시 생각하다가) 12라는 것을 세 줄로 놓았을 때 몇 줄인가를...
R: (설문지에 E가 썼던 내용을 가리키며) 이건 뭐야? 이게 다 나눗셈의 의미라고 생각돼?
E: 네.
R: 12를 0이 될 때까지 삼으로 빼는 거야?
E: 네, 그래서 그 개수를 세는 거요.
R: 그럼, 이건?
E: 곱하기가 나누기의 역이라는 것을 이용해서 네모 곱하기 3은 12인데, 그 역은 12 나누기 3은 네모 다 이렇게 해서요.
R: 나눗셈이 곱셈의 반대라는 것을 이용해서 십이 나누기 삼을 문제 상황으로 만들 수 있니?
E: 어떤 수에 삼을 곱했더니 십이가 나왔다. 어떤 수는 얼마인가?



<그림 8> E의 나눗셈의 의미

E는 실수로 착각하여 틀렸다고 한 7번 비교 뺄셈 문제를 제외한 모든 사칙 연산 문제를 다 성공적으로 풀었다. E는 전직 초등학교 교사이셨던 엄마에게 다양한 연산의 의미를 배웠다고 이야기하였다.

2. 연산에 대한 아동의 이해와 문장제 해결

사칙연산에 대한 아동의 이해가 아동의 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 문장제의 의미론적 구조로 분류된 평가지를 이용하여 시험을 실시하였다. 각 연산에 대한 예로 아동이 작성한 문제 설정과 문제 해결의 일치성을 분석한 결과 불일치하는 아동은 5명이었다. 덧셈과 뺄셈이 각각 2명, 곱셈이 1명이었다. 문제 설정과 문제 해결의 불일치란 예를 들어, 덧셈의 예로 첨가의 문장제를 만들었던 아동이 첨가의 문장제를 틀린 경우를 말한다.

29명의 아동을 대상으로 17개의 사칙연산 문장제에 대하여 1문항을 1점으로 채점한 결과 평균은 15.8점, 표준편차는 1.2점이었다. 연구자는 사칙연산에 대한 아동의 이해 범주와 문장제 시험 결과를 토대로 사칙연산에 대한 아동의 이해와 문장제 해결 사이에 어떤 연관성이 있는지 알아보았고, 특히 자연수의 사칙연산에 대하여 같은 이해 범주에 속한 아동들 간에 문장제 해결 방법에 공통된 특성이나 공통된 오개념을 가지고 있는지 분석하였다.

1) 덧셈

덧셈은 첨가의 문장제를 틀린 아동이 3명(10.3%)이었고(M, J, L), 합병의 문장제를 틀린 아동은 없었다. 이 결과는 아동이 합병의 문제를 가장 쉽게 생각한다는 이전 연구 결과들과 일치된 것이었다. 본 연구에 참여한 아동들은 덧셈을 첨가의 의미로 가장 많이 이해하였으나, 문장제 해결에서 합병보다 첨가 문항을 더 틀렸다. 그러나 첨가 문제를 틀린 세 명의 아동은 모두 면담시 문제를 해결하였으며, 세 명의 아동 모두 문제를 잘못 읽었거나 잘못 해석하여 문제를 틀렸다고 하였다. 첨가 문제 1번을 틀린 J는 틀린 이유를 묻는 질문에 실수로 틀렸다고 대답하였다.

<표 13> 덧셈 문장제 평가 결과

	오답(명)	비율(%)
첨가	3	10.3
합병	0	0

본 연구에서 자연수의 덧셈에 대한 아동의 이해 범주인 첨가, 합병, 첨가와 합병으로 분류된 아동들 간에 덧셈 문장제의 해결 방법에 공통된 특성은 나타나지 않았다.

2) 뺄셈

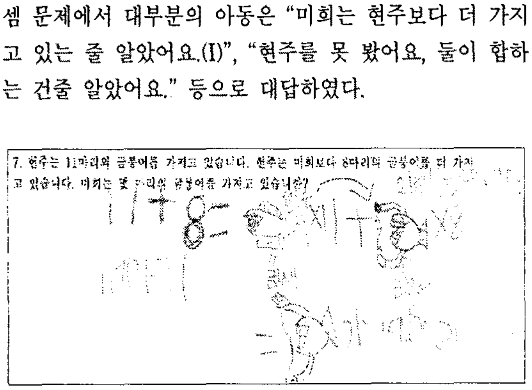
뺄셈 문장제에서 제거 상황의 문장제를 틀린 아동은 아무도 없었고, 비교 상황의 문장제를 틀린 아동이 8명(27.6%)으로 가장 많았다. 동등화 문제는 1명(3.5%)의

아동이 틀렸다. 모든 아동이 뺄셈을 제거의 의미로 이해하고 있었기 때문인지, 제거 상황의 문제를 가장 쉽게 생각하였다. 본 연구 결과는 비교문제를 다른 문제보다 더 어려워한다는 Kintsch & Greeno(1985)의 연구 결과와 일치하였다.

<표14> 뺄셈 문장제 평가 결과

	오답(명)	비율(%)
제거	0	0
비교	8	27.6
동등화	1	3.5

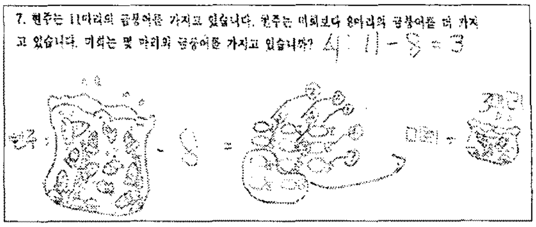
비교 문제를 틀린 8명 중 6명(N, M, I, E, F, D)은 면담시 문제를 스스로 해결하였고, 2명(O, P)은 해결하지 못하였다. 아동이 가장 많이 틀린 7번의 비교 상황의 뺄셈 문제에서 대부분의 아동은 "미희는 현주보다 더 가지고 있는 줄 알았어요.(I)", "현주를 못 봤어요, 둘이 합하는 건줄 알았어요." 등으로 대답하였다.



<그림 9> I의 비교 상황의 뺄셈 문제 풀이

몇 몇 아동은 문제를 꼼꼼히 읽지 않고, 문장 안에 '더' 용어가 포함된 경우 더하기로, '덜' 용어가 포함된 경우 빼기로 쉽게 생각하는 경향이 있었다. 또한 문장에 포함된 숫자의 배열도 문제 해결에 영향을 주었다. 문제에 포함된 숫자에만 집중할 뿐 문장제 안의 단어들은 무시하는 아동도 있었다.

자연수의 뺄셈에 대한 아동의 이해 범주인 제거, 비교, 제거와 비교로 분류된 아동들 간에 뺄셈 문장제의 해결 방법에 공통된 특성이 나타났다. 뺄셈을 제거의 의미로만 이해하고 있는 S는 <그림 10>에서 알 수 있듯이 7번 비교 상황의 뺄셈 문제를 제거의 의미로 풀었다.



<그림 10> S의 비교 상황의 뺄셈 문제 풀이

뺄셈 문제에 대한 아동의 해결 방법은 문제에 내재된 의미론적 구조에 의해 강한 영향을 받았다(Carpenter & Moser, 1984). S뿐만 아니라 많은 아동들이 각 연산에 대하여 자신이 지니고 있는 개념 범주에서 문제를 해결하려는 모습을 보여주었다. 이는 어쩌면 당연한 결과일 수도 있지만, 교사의 교수-학습 계획에 중요한 정보를 제공할 수 있다는 점에서 의미를 가진다.

3) 곱셈

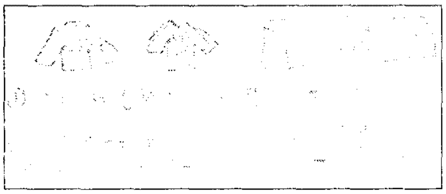
곱셈 문장제에서 가장 많이 틀린 문항은 조합 문제로 8명(27.6%)의 아동이 틀렸으며, 다음으로 비율 문제를 4명(13.8%)의 아동이 틀렸다. 이에 반하여 동치묶음, 직사각형 정렬, 비교 문제는 틀린 아동이 아무도 없었다. 대부분의 아동은 반복된 덧셈으로 인식될 수 있는 곱셈 문제 상황을 다른 상황보다 더 쉽게 인식하였다(Bell, Fischbein & Greer, 1984; Christou & Philippou, 1998).

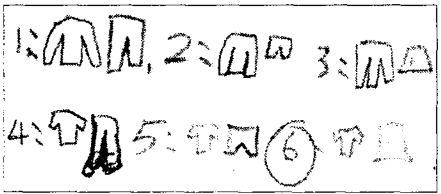
<표 15> 곱셈 문장제 평가 결과

	오답(명)	비율(%)
동치묶음	0	0
직사각형 정렬	0	0
비교	0	0
비율	4	13.8
조합	8	27.6

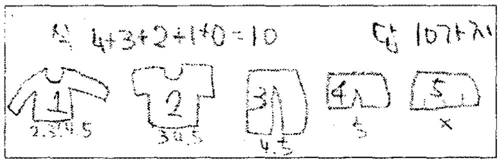
곱셈에 대한 아동의 이해와 문장제 해결 사이의 관련성을 분석한 결과 가장 많은 아동이 곱셈의 의미로 이해하고 있는 동치묶음의 문장제는 틀린 아동이 아무도 없었던 반면, 곱셈의 문제 설정 예와 의미에 한 번도 언급되지 못했던 조합 상황의 곱셈 문제를 가장 많이 틀렸으며 면담 과정에서도 아동들이 가장 어려워하였다.

조합 문제인 5번을 틀린 8명(Q, O, T, U, V, J, W, S)은 개별 면담 시간에도 조합 문제를 곱셈으로 정확하게 풀지 못하였다. 조합 문제에 대한 아동의 풀이 유형을 분석한 결과 가장 많은 아동들이 <그림 11>, <그림 12>와 같이 직접 모든 경우의 수를 다 글로 쓰거나 그림으로 그렸다.


<그림 11> H의 조합 상황의 곱셈 문제 풀이


<그림 12> AA의 조합 상황의 곱셈 문제 풀이

특히 5번 조합 문제를 덧셈문제로 인식하는 아동이 상당히 많았다. Valentin & Sam (2004)은 540명의 4, 5, 6학년 학생을 대상으로 실험한 결과 학생들이 특정문제의 정확한 연산을 알지 못할 때는 덧셈 연산을 선택하는 경향이 있음을 보고하였는데, 본 연구에서도 면담 과정에서 잘 알지 못하는 아동의 경우 덧셈 식으로 식을 쓰려는 경향이 나타났다. 아동 V는 조합의 곱셈 문제를 <그림 13>에서와 같이 "4+3+2+1+0=10"으로 잘못된 덧셈 식으로 나타내었다.

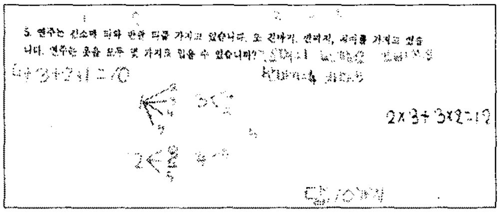


<그림 13> V의 조합 상황의 곱셈 문제 풀이

조합 문제를 덧셈 식으로 나타내는 대부분의 아동들이 곱셈을 동치묶음 또는 동수누가의 상황으로만 이해하고 있는 아동들이었다.

아동 Q는 조합 문제를 "2×3+3×2=12"로 곱셈과 덧셈의 식으로 생각하는 오류를 범하였다.

R: 문제 5번을 어떻게 풀었는지 설명해줄래요?
Q: 문제를 풀 때요 이런 문제가 나와서요 1, 2, 3, 4, 5로 잡고 풀었는데요. 긴소매 티와 반팔 티를 같이 입을 수 없는데 착각을 해서 입을 수 있다고 한 것 같은데요.
R: 전에는 어떻게 생각해서 푼 건데?
Q: 저번에 이런 문제를 풀어서요. 1, 2, 3, 4, 5로 잡고 1은 같이 입을 수 있는 것이 2, 3, 4, 5 반팔 티랑 긴바지, 반바지, 치마를 할 수 있고, 반팔티는 긴바지랑 반바지랑 치마를 입을 수 있고, 긴바지는 뭐야 이거 4번이랑 5번으로 잡아서요. 4번이랑 5번으로 했고, 4번은 치마랑 입을 수 있다. 네.(웃으면서) 잘못 푼 것 같아요.
R: 답은 어떻게 되는 것 같아요?
Q: (평가지를 보면서 중얼거리다가) 모르겠어요.
R: 그럼, 이 문제는 덧셈 문제인 것 같아요? 뺄셈 문제인 것 같아요? 곱셈 문제인 것 같아요? 나눗셈 문제인 것 같아요?
Q: 곱셈 문제 같아요.
R: 왜 곱셈 문제인 것 같아요?
Q: 많이 나와서요. 긴바지랑 긴 소매랑 반팔 티를 입을 수 있고요. 반바지는 긴소매랑 반팔 티를 입을 수 있으니깐. 계속 이렇게 두 개 아니 다섯 개를 한 다음에요. 나온 수를 곱하면 될 것 같아요.
R: 그걸 식으로 쓰면?
Q: (평가지를 보며 입으로 중얼거리다가) 2 곱하기 3 더하기 3 곱하기 2요.

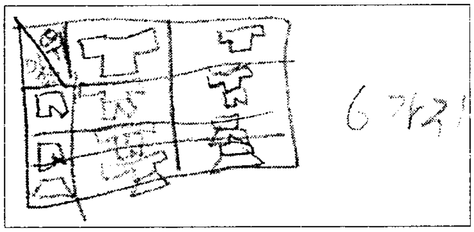


<그림 14> Q의 조합 상황의 곱셈 문제 풀이

Q 이외의 많은 아동들이 조합 문제를 덧셈과 곱셈의 식으로 나타내는 오류를 범하였다.

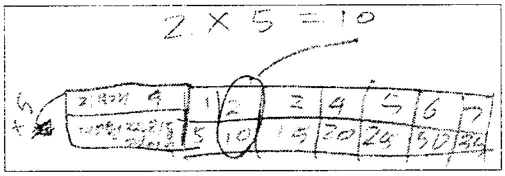
곱셈을 동치묶음과 직사각형 정렬로 이해하고 있는

Y의 경우 다른 아동들과 다르게 표를 이용하여 조합 문제를 해결하기도 하였다.



<그림 15> Y의 조합 상황의 곱셈 문제 풀이

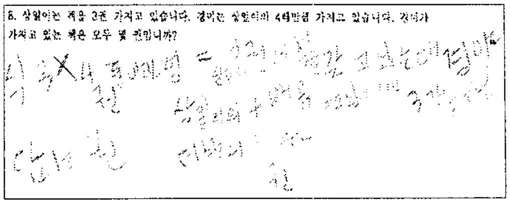
Christou & Philippou (1998)는 곱셈 문제에서 비율 문제를 가장 어려워함을 알아내었다. 본 연구에서도 곱셈의 비율 문제는 아동이 두 번째로 많이 틀린 문제였다. 비율 상황의 곱셈 문제를 틀린 4명의 아동 중에 3명(O, G, S)은 개별 면담에서도 문제를 해결하지 못하였다. <그림 16>과 같이 15번 비율 문제를 표를 이용하여 해결한 아동도 있었다.



<그림 16> BB의 비율 상황의 곱셈 문제 풀이

곱셈의 의미를 동치묶음, 정렬, 비율로 이해하고 있는 K는 틀린 곱셈의 비율문제인 15번의 면담 과정에서 "왜 그렇게 했어요?"는 질문에 "저는요 얼마가 필요한지 구하는 줄 알았어요."라고 대답하였다. 틀린 문제에 대한 면담 과정에서 문제를 정확하게 안 읽었거나, 실수를 했다는 진술이 가장 많았다.

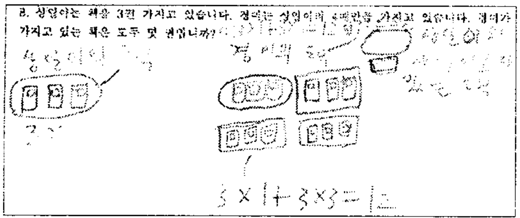
곱셈을 동치묶음과 비교의 의미로 이해하고 있는 T의 경우 곱셈 문제를 덧셈 문제로 인식하고, 곱셈 문제를 배의 의미로 풀었다. <그림 17>을 보면 8번 비교 상황의 곱셈 문제를 동수누가와 비교의 개념으로 풀었다.



<그림 17> T의 비교 상황의 곱셈 문제 풀이

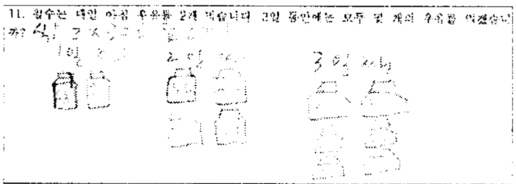
곱셈을 동치묶음, 직사각형 정렬, 비교의 의미로 이해하고 있는 F는 5번 조합 상황의 곱셈 문제를 "(긴 소매티로 입었을 경우)+(반팔티를 입었을 경우)=3+3=6가지"와 같이 덧셈으로 풀었으며, 8번 비교 상황의 곱셈 문제를 다음과 같이 배 개념으로 풀었다.

R: 8번은 어떻게 풀었어요?
F: 상일이가 3권을 가지고 있으면요. 3의 4배니깐. 3을 4번씩 더하면 12가 나오잖아요. (F가 그린 그림을 가리키며) 여기다가 이렇게 3을 이렇게 1배, 2배, 이렇게 해가지고 4번씩 더했더니 12가 나왔어요. 그림으로 그리니깐.
R: 상일이가 가지고 있는 책은 3이 아니라 3×1이야?
F: 네. 3을 한 번 곱한 거요.
R: (그림을 가리키며) 이게 상일이의 책인데요. 3을 세 번 곱했잖아요. 3 곱하기 3은 9잖아요. 9 더하기 3곱하기 1은 12가 나오잖아요.
R: 3의 4배는 이렇게 하는 거야? 3의 4배가 뭔데?
F: 3을 4번씩 더한 거요.
R: (F가 그린 그림을 하나씩 짚으며) 3을 이렇게 4번씩 더한거야? 그래서 (동그라미 원 안의 책 그림을 가리키며) 이건 3 곱하기 1이고, (그 옆의 직사각형 안의 책 그림을 가리키며) 이건?
F: 3 곱하기 1, 2 이렇게 3번 있어가지고 3 곱하기 3이 되가지고, 3 곱하기 3하고 여기 3 곱하기 1을 더했어요.
R: 그냥 3 곱하기 4로 할 수 없나?
F: 그렇게도 할 수 있어요.
R: 그럼 왜 이렇게 했어요?
F: 그림으로 그릴려니깐 어떻게 해야할지 몰라서요.
R: 그럼, 이 식(3×1+3×3=12)도 맞고 3 곱하기 4라고 해도 그림하고 맞아요?
F: 네. 똑같아요.

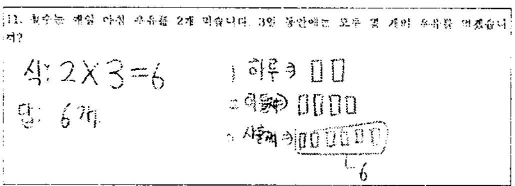


<그림 18> F의 비교상황의 곱셈 문제 풀이

곱셈에 대하여 동일한 이해 범주에 속한 아동들 사이에 공통된 성질이나 특성이 있는지 분석한 결과 곱셈을 동수누가로만 이해하고 있는 아동 대부분은 모든 곱셈 문제를 덧셈으로 해결하려는 경향이 있었다. 또한 곱셈을 동치묶음과 직사각형 정렬, 비교의 의미로 이해하고 있는 아동 F와 G는 11번 동치묶음 상황의 곱셈 문제를 <그림 19>, <그림 20>과 같이 동일한 형태로 해결하였다. F와 G는 11번 문제를 동치묶음과 직사각형 정렬, 비교의 의미를 모두 사용하여 문제를 해결하였다.

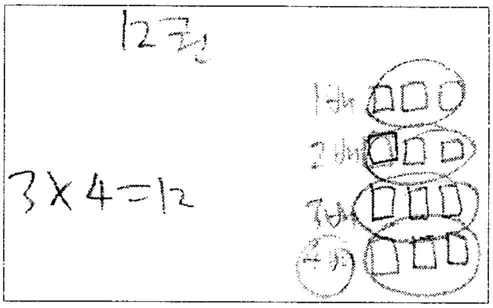


<그림 19> F의 동치묶음의 곱셈 문제 풀이



<그림 20> G의 동치묶음의 곱셈 문제 풀이

곱셈을 동치묶음과 직사각형 정렬의 의미로 이해하고 있는 E의 경우 동치묶음 상황의 곱셈 문제 11번과 비교 상황의 곱셈 문제 8번, 등분할 상황의 나눗셈 문제 4번, 비교 상황의 나눗셈 문제 13번, 정렬 상황의 곱셈 문제 16번, 비율 상황의 나눗셈 문제 17번을 모두 정렬의 형태로 배열하여 문제를 해결하였다. 곱셈의 의미에 정렬의 의미가 포함된 아동들 모두 곱셈 문제를 해결할 때 대상을 직사각형 정렬 모양으로 나타내었다.



<그림 21> E의 비교 상황의 곱셈 문제 풀이

4) 나눗셈

나눗셈 문장제에서 가장 많이 틀린 문항은 비교 문제로 5명(17.2%)의 아동이 틀렸으며, 다음으로 비율 문제를 4명(13.8%)의 아동이 틀렸다. 그리고 등분할 문제와 곱셈의 역 문제를 각각 1명(3.5%)의 아동이 틀렸으며, 측정문제를 틀린 아동은 한 명도 없었다.

<표 16> 나눗셈 문장제 평가 결과

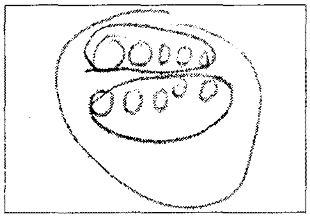
	오답(명)	비율(%)
등분할	1	3.5
측정	0	0
곱셈의 역	1	3.5
비교	5	17.2
비율	4	13.8

24명(82.8%)의 아동이 나눗셈을 등분할의 의미로 이해하였고, 17명(58.6%)의 아동이 측정의 의미로 나눗셈을 이해하고 있었다. 나눗셈을 곱셈의 역 또는 비교, 비율의 의미로만 이해하고 있는 아동이 한 명도 없었다. 나눗셈 문장제의 평가 결과는 나눗셈에 대한 아동의 이해와는 정반대의 결과를 보였다. 그 이유는 대부분의 아동이 나눗셈의 비교와 비율 상황을 일상생활이나 교과서에서 자주 접해보지 못하였기 때문으로 분석되었다.

T는 틀린 등분할 문제와 곱셈의 역 문제를 면담 과정에서 스스로 해결하였다. 비율 문제 또한 면담과정에서 4명(Q, M, K, G)의 아동이 모두 문제를 해결하였다. 비교 상황의 곱셈 문제는 P를 제외한 4명(O, T, M, Z)이 면담 과정에서도 문제를 해결하지 못하였다.

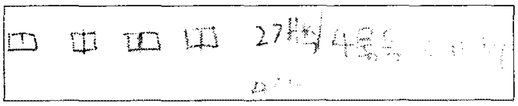
나눗셈에 대하여 같은 이해 범주에 속한 아동들 간에 문장제 해결 방법에 공통된 특성 및 오개념을 분석한 결과 몇 가지 공통된 특성이 나타났다. 나눗셈을 등분할 또는 측정의 의미로만 이해하고 있는 아동의 경우 모든 나눗셈 문제를 자신이 이해하고 있는 의미에 기초하여 문제를 해결하려는 경향을 보였다.

나눗셈을 등분할의 의미로만 이해하고 있는 J의 경우, 측정 상황의 나눗셈 문제 12번 "어린이가 10명 있습니다. 한 의자에 2명씩 앉으려고 합니다. 모두 몇 개의 의자가 필요합니까?"의 문항을 <그림 22>와 같이 등분할의 의미로 풀었다.



<그림 22> J의 측정 상황의 나눗셈 문제 풀이

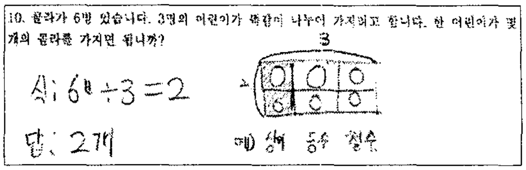
이와 유사하게 나눗셈을 측정의 의미로만 이해하고 있는 N은 등분할 상황의 나눗셈 문제 4번 "어린이가 8명 있습니다. 긴 의자 2개에 똑같이 나누어 앉으려고 합니다. 긴 의자 한 개에는 몇 명이 앉을 수 있습니까?"의 문항을 <그림 23>과 같이 측정의 의미로 풀었다.



<그림 23> N의 등분할 상황의 나눗셈 문제 풀이

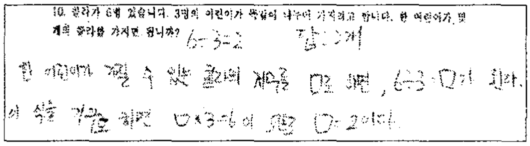
아동 J와 N 이외에도 나눗셈의 의미를 하나의 특정한 의미로만 이해하고 있는 아동의 경우 모든 나눗셈 문제를 그 특정한 의미에 기초하여 해결하려는 경향을 보였으며, 이런 경향은 모든 연산에 있어 공통된 특성으로 나타났다.

곱셈을 동치묶음, 직사각형 정렬, 비교의 의미로 이해하고 있는 G는 등분할의 나눗셈 문제 10번을 <그림 24>와 같이 넓이 모델을 이용하여 풀었다.



<그림 24> G의 등분할 상황의 나눗셈 문제 풀이

D는 등분할 상황의 나눗셈 문제를 <그림 25>와 같이 곱셈과 나눗셈의 관계를 이용하여 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 해결하였고, T는 작은 수의 나눗셈인 경우에만 나눗셈을 곱의 역으로 계산하였다.



<그림 25> D의 등분할 상황의 나눗셈 문제 풀이

V. 요약 및 결론

본 논문에서는 29명의 4, 5, 6학년 아동을 대상으로 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 어떤 의미로 이해하고 있는지 알아보고, 그것이 문장제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보았다. 아동이 작성한 문제 설정 예시와 의미 예시와 개별 면담 자료를 기초로 연산에 대한 아동의 이해를 범주화한 결과 덧셈은 첨가와 합병, 뺄셈은 제거와 비교, 곱셈은 동치묶음, 직사각형 정렬, 비교, 비율, 조합, 나눗셈은 등분할, 측정, 비교, 비율, 곱셈의 역, 동수누감으로 범주화되었다. 전체적으로 덧셈은 첨가의 의미(86.2%)로, 뺄셈은 제거의 의미(86.2%)로, 곱셈은 동치묶음의 의미(100%)로, 나눗셈은 등분할의 의미(82.8%)로 이해하고 있는 아동들이 가장 많았다. 이 사칙연산에 대한 아동의 이해 범주를 Fischbein의 직관 모델과 비교한 결과 덧셈을 제외한 뺄셈과 곱셈, 나눗셈이 모두 일치하였다. 본 연구에서 많은 아동이 덧셈을 첨가의 상황으로 이해하고 있는 것은 아동의 일상생활 속에서 덧셈 상황으로 첨가의 상황이 합병의 상황보다 더 익숙하고 빈번하게 일어나기 때문으로 분석되었다.

자연수의 사칙 연산에 대한 아동의 이해와 문장제 해

결 사이의 관련성을 분석한 결과 덧셈을 제외한 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에서 대부분의 아동은 연산에 대하여 아동이 가지고 있지 않은 의미와 관련된 문장제를 가장 많이 틀렸다. 뺄셈의 경우 비교의 문제(27.6%)를 가장 많이 틀렸고, 곱셈의 경우 조합 문제(27.6%)와 비율 문제(13.8%)를 가장 많이 틀렸다. 나눗셈은 비교 문제(17.2%)와 비율 문제(13.8%)를 가장 많이 틀렸다. 이와 반대로 각 연산에 대하여 많은 아동이 지니고 있는 의미와 관련된 문장제의 성공률은 매우 높게 나타났다.

자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해가 문장제 해결 방법에 어떤 영향을 주는지 살펴본 결과 대부분의 아동은 각 연산에 대하여 자신이 지니고 있는 개념 범주에 기초하여 문제를 해결하려는 경향을 보였다. 연산에 대한 아동의 개념 구조는 연산 과정에 중요한 비계 역할을 하기도 하였지만, 종종 잘못된 문제해결 과정을 이끌기도 하였다.

각 연산에 대하여 같은 이해 범주에 속한 아동들이 문장제 해결 방법에 공통된 특성을 가지고 있는지를 살펴본 결과 덧셈을 제외한 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 연산 과정에 같은 이해 범주에 속한 몇 몇 아동들 간의 공통된 특성을 발견할 수 있었다. 곱셈의 의미를 동수누가의 의미로만 이해하고 있는 아동들은 곱셈의 모든 문제를 반복된 덧셈으로 해결하려는 경향이 나타났으며, 곱셈의 의미에 정렬의 의미가 포함된 아동들은 문제 상황을 직사각형의 정렬 형태로 나타내었다. 나눗셈도 마찬가지로 자신이 이해하고 있는 의미에 기초하여 문제를 해결하려는 경향을 보였다. 예를 들어, 나눗셈을 등분할의 의미로만 이해하고 있는 아동은 측정 상황의 나눗셈 문제를 등분할의 의미로 해결하였고, 나눗셈을 측정의 의미로만 이해하고 있는 아동은 등분할의 나눗셈 문제를 측정의 의미로 해결하였다.

본 연구에서 각 연산에 대한 아동의 문장제 해결 전략은 각 연산에 대한 아동의 개념 구조와 더불어 교과서에 소개된 방법의 빈도수에 의해서도 영향을 받았다(De Corte & Verschaffel, 1987). 교과서에 제시된 문장제의 의미론은 덧셈 상황의 합병, 뺄셈 상황의 제거, 곱셈 상황의 동수누가, 나눗셈의 포함제 유형으로 편중되어 있었다. 그리고 이들 유형이 대체적으로 문제해결의 성공률이 높게 나타났다.

현재 우리나라 초등 교과서에는 주어진 문제에 대해서 아동들이 어떤 연산자를 선택하고 어떻게 조작해야 하는지 사고할 필요도 없이 바로 연산식이 도입되고 계산 절차를 안내한 후 형식화를 유도하고 있다. 아동들은 교과서에 제시된 다양한 연산의 의미를 비교 분석하면서 이해하고 연계하기보다는 주어진 문제 유형과 관련하여 효율적인 알고리즘을 쉽게 받아들이고 간단하게 적용하는 수준에 머물기 쉽다(방정숙·김재화, 2006). 수학적 연산에 대한 직관적 신념에 대해서 Fischbein et al.(1985)은 연산의 초기 경험이 사칙연산 각각에 대한 초기 신념의 발달을 이끈다고 하였듯이, 교사는 아동이 다양한 상황으로 연산의 의미를 이해하고, 자연수의 사칙연산에 대한 개념 구조를 기반으로 소수, 분수, 대수의 사칙연산으로 아동의 개념 구조가 확장될 수 있도록 노력을 기울어야 한다.

본 연구 결과 아동이 연산을 어떻게 이해하고 있느냐에 따라 문장제 해결의 성공여부와 문제 해결 방법에 차이를 보였던 만큼, 아동들에게 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 각 연산에 대하여 다양한 상황을 접할 수 있는 기회를 제공해야 하며, 교수의 초점이 계산 알고리즘에 대한 학습에서 각 연산의 의미에 초점을 둔 학습으로 변화되어야 한다.

본 연구는 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해가 소수, 분수 더 나아가 대수의 사칙연산의 이해와 어떤 연관성이 있는지 알아보기 위한 연구의 기초연구이다. 앞으로 본 연구 결과를 기초로 자연수의 사칙연산에 대한 이해가 소수, 분수, 대수의 사칙연산을 이해하는데 어떤 역할을 하는지, 소수, 분수, 대수에 대한 아동의 이해가 소수, 분수, 대수의 각 사칙연산에 어떤 영향을 주는지 등 기초연산에 대한 연구가 다양한 관점에서 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

강지형·김수환·라병소·박성택·이의원·정은실 (2005). 초등수학교육. 서울: 동명사

김연·박만구 (2004). 학교 수학과 어린이의 수학 지식에 대한 고찰-초등학교 1학년 덧셈을 중심으로. 한국학교수학회논문집 **7(1)**, pp.83-102.

김진숙 (1998). 초등학교 수학 교과서 문장제에 대한 문제해결 관점에서의 연구. 이화여자대학교 박사학위논문.

남승인 · 서찬숙 (2004). 문제 장면의 모델화를 통한 수업이 곱셈적 사고력과 곱셈 능력 신장에 미치는 영향. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 8(1), pp.33-50.

노현옥 · 정은실 (2005). 초등학교 수학 교과서에 나오는 자연수의 사칙 연산 문장제 분석. 진주교육대학원 교과교육연구 28, pp.1-19.

박현미 · 강완 (2006). 자연수의 나눗셈에 관한 초등학교 학생의 비형식적 지식. 한국초등수학교육학회지 10(2), pp.221-242.

방정숙 · 김재화 (2006). 초등학교 6학년 학생들의 소수 계산 오류와 선행지식 간의 연결 관계 분석 및 지도 방안 탐색. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 45(3), pp.275-294.

이종욱(2007). 한 초등학교 2학년 아동의 곱셈과 나눗셈 해결 전략에 관한 사례 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 46(2), pp.155-171.

Baroody, A. J. & Ginsgurg, H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sign. *The Elementary School Journal*, 84, pp.199-212.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, 92, pp.13-15.

Bell, A., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, 15, pp. 129-147.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, pp.27-39.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Romberg, T.(Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*(pp.9-24). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp.55-72.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, pp.179-202.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M., & Bebout, H. C. (1988). Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, pp.345-357.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, pp.428-441.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi L. & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L., Chiang, C. P., & Loef, M. (2004). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. In Carpenter, T. P., Dossey, J. A., & Koehler, J. L. (Ed.), *Classics in mathematics educational research*(pp.134-151). Reston, VA: National council of teachers of mathematics.

Christou, C. & Philippou, G. (1998). The developmental nature of ability to solve one-step word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4), pp.436-442.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, **18(5)**, pp.363-381.

English, L. D. & Halford, G. S. (1995). Mathematics education models and processes. NY: Lawrence Erlbaum.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Merino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **16**, pp.3-17.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Goldin, G. A. & McClintock, C. E. (1984). Task Variables in Mathematical Problem Solving. Philadelphia : The Franklin Institute Press.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up : Helping children learn mathematics*, Washington, DC: National Academy Press.

Kintsch, W., & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. Psychological review, **92(1)**, pp.109-129.

Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. journal for research in mathematics education, **20(2)**, pp.147-158.

Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **28(3)**. pp.309-330.

Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of sematic categories for addition and subtraction. *Educational studies in mathematics*, **13**, pp.373-394.

Sherin, B. & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education*, **36(4)**, pp.347-395.

Valentin, J. D. & Sam, L. C. (2004). Roles of semantic structure of arithmetic word problems on pupils ability to identify the correct operation. *International journal for mathematics teaching and learning*, May 4th.

van Putten, C. M., van den Brom-Snijders, P. A., & Deishuizen, M. (2005). Progressive mathematization of long division strategies in Dutch primary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, **36(1)**, pp.44-73.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structure. In Hiebert, J., & Behr, M. (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades(pp.141-162). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

The Analysis of Children's Understanding of Operations on Whole Numbers

Whang, Woo Hyung
Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail: wwhang@korea.ac.kr

Kim, Kyungmi
Center for Curriculum and Instruction studies, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail: kyungmi@korea.ac.kr

The study has been conducted with 29 children from 4th to 6th grades to realize how they understand addition, subtraction, multiplication, and division of whole numbers, and how their understanding influences solving of one-step word problems.

Children's understanding of operations was categorized into "adding" and "combination" for additions, "taking away" and "comparison" for subtractions, "equal groups," "rectangular arrange," "ratio," and "Cartesian product" for multiplications, and "sharing," "measuring," "comparison," "ratio," "multiplicative inverse," and "repeated subtraction" for divisions. Overall, additions were mostly understood additions as "adding"(86.2%), subtractions as "taking away"(86.2%), multiplications as "equal groups"(100%), and divisions as "sharing"(82.8%). This result consisted with the Fischbein's intuitive models except for additions.

Most children tended to solve the word problems based on their conceptual structure of the four arithmetic operations. Even though their conceptual structure of arithmetic operations helps to better solve problems, this tendency resulted in wrong solutions when problem situations were not related to their conceptual structure. Children in the same category of understanding for each operations showed some common features while solving the word problems.

As children's understanding of operations significantly influences their solutions to word problems, they needs to be exposed to many different problem situations of the four arithmetic operations. Furthermore, the focus of teaching needs to be the meaning of each operations rather than computational algorithm.

* ZDM Classification : C32
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Addition, Subtraction, Multiplication, Division, understanding, Intuition models, Semantic Structure of Word Problems