韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2008. 11. 제 47권, 제 4호, 447-465

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
November. 2008, Vol. 47, No. 4, 447-465

무한 개념의 지도방안과 활용 예제
- 중학교 교육과정을 중심으로 -

강 미 광 (동의대학교)

Ⅰ. 서 론

인간은 한정된 삶을 살아가는 유한한 존재이다. 그러나 그들은 유한한 한계를 넘어서고자 하는 자신의 의지와 형이상학적인 것을 추구하려는 본성으로 스스로도 인식하지 못하는 사이 자생적인 무한 개념을 형성시키고 있다. 한 예로, '어버이 은혜'의 '하늘아래 그 무엇이 높다 하리요' 라는 구절에서 하늘 아래는 비교 가능한 유한한 것들을 의미하고 많은 사람들에게 '하늘'은 닿을 수는 없지만 생각해 낼 수 있는 소위 잠재적인 무한을 의미한다. 이런 경우, 무한 개념은 '하늘'이라는 매체를 통해 사람들의 생각 속에 유한한 모든 것보다 너 높은 것으로 잠재되어 자리 잡게 되는 것이다. 잠재적인 무한은 엘리베이터 안의 양쪽 거울에 비친 자신의 모습에서, '무한 책임'이라는 법률 용어에서, '무한도전'이라는 오락 프로그램명에서, 또한 'Infinity'란 자동차의 이름에서, '무한'이라는 단어를 매개로 양적, 질적 표현의 한 방법으로 우리 생활 속에 정착되어가고 있다.

유클리드의 원론에서 나타나는 '전체는 부분보다 크다'라는 다섯 번째 공리는 대부분의 사람들이 명백한 진리라고 공감할 수 있는 직관적 개념이지만 무한 집합은 이 논리에 맞지 않을 뿐 아니라 이것의 부정이 참인 집합이므로 우리의 기존 직관과는 상충되는 부분이 많다. 무한 개념은 수학의 개념 중에서 학생들의 직관과 많이 어긋나서 오개념이 생기기 쉽고 수학은 실생활에서 필요없는 어려운 학문이라는 인상을 주는 개념 중의 하나이다(박선화, 1993). 무한 개념은 심리학점 관점에서 순수한 구성개념이지만 학생들은 수학에서 다루는 무한 개념을 일상생활에서의 유한적 경험이나 자생적 직관에 의존해 받아들이고 적용시키려고 하기 때문에 기존의 인지구조와 갈등을 일으키게 된다. Davis & Vinner(1986)는 학생들이 이러한 갈등과 혼란을 겪는 과정을 포함시켜 인지적 재구성을 해야 인지적 장애가 해결된다고 하였으며, 전명남(2002)은 무한 개념이해에 반성적 추상이 작용하며 무한 개념이해 수준에서 발달적 차이는 반성적 추교육과정상의 차이로 볼 수 있다는 결과를 얻었다. 이처럼 무한 개념은 외적 대상을 직접 관찰하거나 조작하는 것, 구체적인 세계에 대한 유추로는 이해가 불가능하고 개개인의 내적조정을 통해서만 가능하다고 한다 (Fishbein, Tirosh & Hess, 1979; Staub & Stern, 1997).

현 교육과정에서는 6단계 측정 영역에서 원의 넓이를 직선도형(삼각형)의 넓이의 합으로 계산한다는 과정에서 이미 학생들의 직관적 무한 개념을 이용하고 있다. 7단계에서 무한 집합의 정의와 예를 직관적으로 다루고 있으며 8단계에서는 그동안 분수나 유한소수로만 표현했던 유리수를 순환 무한 소수 영역으로까지 넓히고 9단계에서 무리수를 도입하고 있다. 고등학교에서 수열의 극한이나 무한급수의 합, 함수의 극한과 연속성, 미분계수와 정적분 등은 무한 개념과 무한소 개념을 바탕으로 전개되고 있으며, 현대 수학(Modern mathematics)은 무한 집합 개념을 근간으로 하는 수학적 체계 (Mathematical system)를 구성하고 있다. 또한 현대의 과학에 응용되는 수학적 개념은 대부분이 무한 개념이므로 학생들이 올바른 무한 개념을 정립하는 것은 수학의 학습과 교육에서 아주 중요하다. 고등학교에서는 이처럼 교과내용의 많은 부분이 무한 개념과 관련되어 있지만, 학습지도를 통해서 학생들의 수학에 관한 직관성과 형식성의 적절한 합

---

* 2008년 7월 투고, 2008년 9월 심사 완료
* 이 논문은 2006학년도 동의대학교 교내연구비에 의해 연구되었음(과제번호2006AA207)
* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 잠재적 무한, 실제적 무한, 단순연분수

의점을 구체화 시킬만한 시간적인 여유와 인지적인 여유가 부족하기 때문에 반성적 추상이나 바람직한 관계적 이해를 도출하기가 쉽지 않다.

따라서 본 논문에서는 무한 개념을 처음 다루는 중학교에서부터 올바른 개념이 정립될 수 있도록 중학교 교육과정에서 도입할 수 있는 교수방안을 모색하며, 지도 활용 예제를 제시하고자 한다.

제 II장에서는 학생들이 무한 개념을 학습할 때 가지게 되는 원초적인 어려움이나 인지적 장애를 알아보기 위해서 무한 개념에 대한 역사적 발달과정을 먼저 살펴보았다. 사람들이 쉽게 접근할 수 있는 잠재적 무한 개념에서부터 출발하여 실무한 개념이 정착하기까지 어떤 어려움이 있었는지를 알아봄으로써 학생들을 더 잘 이해할 수 있기 때문이다.

제 III장에서는 중학교 교육과정에서 다룰 수 있는 무한 개념의 다양한 양상을 살펴보고 무한 집합의 속성과 무한이 가지는 과정으로서만 아니라 완결의 의미를 학생들이 느낄 수 있도록 하는 활동과 예제를 제시하였다.

구체적으로, 자연수 집합과 선분, 일차함수와 연분수 등을 이용하여 자신과 대등한 진부분집합을 가지는 무한 집합의 속성과 무한 집합의 크기를 학생들이 경험할 수 있도록 하는 활동과 아울러, 동일한 과정이 계속 반복되는 활동을 통하여 선분인 직선도형은 곡선도형이 되고 삼각형은 평행선이 될 수 있다는 사고의 전환에 초점을 맞추고자 한다.

II. 무한 개념의 발달과정

무한 개념을 다루는 분야는 주로 철학, 신학, 수학분야로써 관점을 달리하면서도 서로 영향을 끼치며 발달되어 왔으나 대체로 공통되는 개념이미지는 우리가 생각할 수 있는 양보다도 더 크고, 끝이나 한계가 없다는 것이다. 무한 개념이란 크기나 시간 등에 끝이 없음을 지칭하는 무한대와 불가분성, 무한소, 극한 개념에 이르는 무한의 과정을 포함하는 개념으로(Petty, 1996), 무한은 많거나 커서 셀 수 없는(countless) 의미의 물리적 측면과 끝이 없는(endless) 의미의 존재론적 측면을 가지고 있다.

일반적으로 무한은 현재는 유한과정을 나타나지만 원하는 만큼 계속할 수 있고 얼마든지 증대 또는 감소할 수 있지만 완결될 수는 없는 잠재적 무한(potential infinity)과 무한히 많은 원소로 이루어져있으나 완결되어 확정적인 것으로 존재하는 실제적 무한(actual infinity)으로 구별된다. 이들을 간단히 가무한, 실무한이라고도 한다. 실제적 무한에서 '실제적'이라는 의미는 물리적으로 현존하고 있다는 것이 아니라 확정적이라는 의미로, 실무한의 원소들은 전체가 동시에 같이 존재하는 것으로 간주하지만 가무한의 원소들은 일련의 과정에서 앞의 원소가 존재할 때에만 자신의 존재성도 보장받을 수 있는 의존적 성격을 지닌다. 역사적으로, 실제적 무한은 많은 패러독스와 어려움을 불러일으키고 이에 대한 거부감이 20C초까지 계속되었다.

무한 개념에 대한 학생들의 개념 발달 과정이나 변화 양상도 역사 발생적 원리에 의하면 인류의 무한 개념에 대한 역사적 발달과정과 유사하고 인식론적 장애는 부분적으로 개념의 역사적 발달과정에서 발견되기 때문에 (류희찬 외, 2003) 지도 방안을 다루기에 앞서 무한 개념의 역사적 변천과정의 확인 작업이 우선 필요하다.

무한 개념의 역사를 언급할 때 첫 번째로 거론되는 사람은 피타고라스보다 약 한 세기 후에 등장한 엘레아 학파의 제논(Zeno B. C. 495-435)이다. 제논의 패러독스인 이분법에 의하면 우리는 지금 있는 실내에서 결코 벗어날 수 없다. 실내에서 문까지 절반의 거리를 걸어가더라도 남은 절반이 생기고 남은 거리의 또 절반을 걸어가도 또한 반이 남음으로써 거리는 점차 반으로 줄어들지만 결코 문밖으로 나갈 수 없다는 것이다. 제논은 이 패러독스를 사용해서 시간과 공간을 무한히 분할할 수 있다는 가정 하에서는 아예 운동을 시작할 수 없다고 주장하였으나, 이는 유한한 값을 무한히 많이 더한다 하더라도 유한한 값을 갖는 경우이기 때문이다. 실제로 처음 절반의 길이를 a라 하면 다음 절반을 갈 때마다 거리도 반씩 줄어들기 때문에 거리를 무한 분할하더라도 거리의 무한합인 급수

$$a+\frac{a}{2}+\frac{a}{2^2}+\frac{a}{2^3}+\cdots$$

은 $2a$에 수렴한다. 이 예에서 끝없이 반복되어 분할되어가는 과정은 잠재적 무한 개념이지만 이 무한항의 합을 완결된 상태인 실내에서 문까지의 거리도 생각하는

것은 실제적 무한 개념이다. 무한의 개념을 사용한 최초의 예인 이 패러독스는 무한의 곤혹스러운 속성을 반영하며 학생들이 무한 개념을 공부할 때 무한의 과정과 극한에 대해 겪게 되는 어려움을 잘 표현해 주고 있다.

아리스토텔레스는 무한 개념을 논리적으로 고찰하여 그리스적인 무한의 개념을 마지막으로 손질하고 완성시킨 사람으로, 무한을 잠재적 무한과 실제적 무한으로 구별하였다. 그러나 이미 완성되어 불변하는 실무한은 느낄 수 있는(sensible) 것이 아니란 이유로 인정하지 않고 이미 취해진 것 이외에 항상 그 어떤 것을 더욱 취할 수 있는 잠재적 무한만을 받아들였다. 예를 들어, 자연수들은 전체로서 인식할 수는 없으나 주어진 유한개의 모임에 대해 더 큰 유한개의 모임을 항상 찾을 수 있기 때문에 자연수들은 잠재적 무한으로 본다. 그리고 사람들은 이제까지 유한개의 자연수만을 사용해 왔으며, 직선은 양쪽으로 무한히 뻗어나갈 수 있다고 정의했지만 실질적으로는 원하는 만큼의 유한한 직선을 만들 수 있다는 사실만이 필요하므로 무한은 필요하지도 않으며 실제로 사용하지도 않는다는 것이다. 이와 같은 아리스토텔레스의 무한 개념은 '잠재적 무한(potential infinity)'이라는 사고방식의 출발점을 이루게 되며 이후 19C 칸토어가 등장하기까지의 수학자들에 의해 그 개념이 옹호되고 계승되어왔다.

플라톤 학파의 에우독소스(Eudoxus B. C. 408-355)와 아르키메데스(Archimedes B. C. 287-212)는 제논의 패러독스를 무한 과정을 회피할 수 있는 실진법(悉盡法)으로 발전시켰다(신현용 외, 2005). 실진법이란 양의 무한 가분성을 가정한 후, 어떤 양이라도 반으로 나누는 과정을 계속하면 우리가 원하는 만큼의 작은 양을 얻을 수 있다는 공리로써, 가무한의 개념을 탁월하게 도입한 것이지만 엄밀히 말해 유한과정이다. 이는 현재에도 해석학에서 아르키메디언 특성(Archimedian property)이라는 이름으로 불리며, 상한이나 하한, 극한 등을 증명할 때 꼭 필요한 수학적 방법이다. 그들은 곡선도형이나 곡면체의 구적문제를, 직선도형이나 입방체로 분할한 다음, 이들의 넓이나 부피를 다시 합산하는 방법으로 해결하였으며 이를 실진법을 사용하여 엄밀히 논증적으로 증명하였다. 특히, 아르키메데스는 평형법에서 구적문제를 급수의 합의문제로 귀착시켰으며, 이는 현대의 극한법을 사용하면 구분구적분과 본질적으로 같은 개념이다. 그러나 그리스 시대에는 무한이라는 것을 적극적으로 파악하지 않았기 때문에 극한적 사고방식을 전개시키지는 못했다.

그리스 시대에는 존재이하의 것으로 간주되었던 무한은 고대 말기의 신학자이자 철학자인 필론(Philon)에 의해 신의 초월성으로 언급되면서 처음으로 존재이상의 것으로 부각되기 시작하였다. 그 후, 플로티노스(Plotinos A. D. 204-270)는 신의 무한성을 만물의 근원이자 유한한 존재의 원천으로 적극화시켜 인간의 인식 안으로 끌어들이려 노력하였으며 중세 스콜라 철학에서 무한은 신의 속성으로 완전히 자리 잡아 유한한 세계의 속성보다 우위를 점하며 실제적 무한으로 자리매김하게 된다.

무한의 논리학의 첫 형성자라 불리는 중세말의 학자 니콜라우스(N. Cusanus 1400-1464)는 유한한 실재와는 다른 개념으로 무한을 다루고 있다. 모든 유한 량은 아무리 크다 할지라도 그 보다 더 큰 것이 존재하며 아무리 작다 하여도 그보다 더 작은 것이 존재하는 데 반해 무한의 논리에서는 이것이 성립하지 않는다는 것이다. 그는 더 큰 것이 존재하지 않는 것을 무한대, 보다 작은 것이 존재하지 않는 것을 무한소라 정의하고 원의 반지름을 점차 크게 하면 원주는 직선에 가까워지므로 반지름이 무한대이면 곡선인 원주는 직선과 같아진다고 하였다. 이처럼 무한은 반대가 일치할 수도 있는 특유의 구조를 가진다고 생각한 니콜라우스의 생각은 현대적인 수학적 무한 개념과 부합되는 면이 많다(이종우 2000).

무한 집합은 자신의 진부분 집합과 일대일 대응시킬 수 있다는 반직관적인 무한의 핵심 속성을 발견한 첫 번째 사람은 갈릴레오(G. Galilei 1564-1642)이다. 1638년 'On Two New Sciences'에서 그는 "자연수 n에 그의 제곱수 n^2을 대응시키면 자연수들의 제곱수 집합 $S=\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots\}$는 무한 집합이고 제곱수의 개수는 자연수의 개수보다 작지 않으며 마찬가지로 모두 자연수 전체는 S의 크기보다 더 크지 않다. 그러므로

N집합의 원소	1	2	3	4	5	$\cdots$
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\cdots$
S집합의 원소	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	$\cdots$

집합의 대소 관계는 유한 집합에만 해당되는 집합의 속성으로 무한 집합에는 적용되지 않는다."라고 결론을

내렸다. 이와 같은 현상은 유한한 마음으로 무한을 이해하려고 할 때 일어나는 어려움 중의 하나라고 생각하고 더 이상 무한 집합에 대한 연구를 하지 않았다.

그러나 무한을 집합체의 속성으로 인식한 볼차노(B. Bolzano 1781-1848)는 갈릴레오보다는 한 걸음 나아가 집합들 사이에도 대소 관계를 도입하였다. 만약 두 집합이 일대일 대응 관계가 성립할 수 있으면 대등이고, 성립하지 않으면 그 사이에는 부분-전체라는 대소 관계가 성립한다는 것이다. 그리고 어떤 유한 집합보다 크면서, 어떤 유한 집합이라도 그 단순한 일부에 지나지 않는 집합을 무한 집합이라 정의하였다. 볼차노가 말하는 무한은 생성적인 무한이나 신의 속성인 형이상학적, 질적 무한이 아니라 어떤 유한도 넘어서서 존재하며, 집합적으로 나타내어지는 수량적 무한이다. 볼차노는 사후 출판된 책에서 무한 집합은 그것의 진부분집합과 일대일 대응 관계를 가질 수 있다는 명제를 단순히 하나의 사실로 받아들여야 한다고 주장하였다. 사실, B. C 325년 유클리드가 원론에서 언급한 '전체는 부분보다 더 크다'라는 공리는 수학자들이 무한의 벽을 넘으려 할 때 걸리는 가장 큰 장애였다. 갈릴레이와 볼차노는 둘 다 무한 집합은 이러한 성질을 만족하지 않는다는 것을 알아차렸으나 갈릴레이는 그 벽을 넘지 못하고 좌절하였고 볼차노는 그 사실을 받아들였다.

그러나 이것을 하나의 사실이 아니라 무한 집합의 정의로 적극적으로 받아들이고 수학적으로 다루기 시작한 사람은 19C말의 칸토어(G. Cantor)이다. 그는 '전체는 부분보다 더 크다'라는 명제에 '전체가 유한 집합이면'이라는 가정을 덧붙여 적극적으로 무한 집합을 하나의 수학적 대상으로 도입하였다. 즉, '전체가 유한 집합이면 전체는 진부분집합 보다 더 크다'라는 명제를 대우의 관점에서 서술하면 '전체와 동등한 진부분집합을 가지고 있으면 전체는 무한 집합이다'라고 나타나는데 이를 무한 집합의 정의로 받아들였다. 칸토어는 이처럼 무한 집합을 논리적으로 엄밀하게 규정하고 유한 집합의 기수와 서수로 사용되는 자연수와 같이, 무한 집합을 포함한 모든 집합에 적용될 수 있는 기수와 서수라는 개념을 도입하고 여기에 순서구조와 연산구조를 도입함으로써 무한을 완전히 수학화하였다. 이로써 무한은 실제적 무한(actual infinity)으로서의 수학적 형성이 완성되었다.

실제로 수학에서 무한이 실무한으로 처음 사용된 것은 17세기 사영기하학에서의 '무한원점'이며, 그 후 복소평면에서도 무한원점이 도입되었다. 그리고 17세기 이후 해석학에서는 미적분의 발견과 함께 논리적으로 엄밀한 극한개념이 필요하게 되었고 그리하여 이전에는 모순을 낳기 때문에 기피되었던 무한대와 같은 잠재적 무한이 중요한 역할을 하며 해석학을 발전시켰다.

Ⅲ. 교육과정에서의 무한 개념과 지도 방안

이 장에서는 현 중학교 교육과정 속에 나타나 있는 무한 개념과 관련된 내용을 교과서에서는 어떻게 설명하고 있는지를 알아보고 그 개선점을 파악하고자 한다. 그리고 학생들에게 효과적으로 수학적 실무한 개념을 인식시킬 수 있는 학습과 지도에 도움이 되는 교수방안과 그에 따른 적절한 예를 제시한다.

1. 7단계에서의 무한 개념

1) 무한 집합과 지도 방안

(1) 무한집합의 정의

7단계에서 대부분의 교과서가 원소의 개수가 유한인 집합을 유한 집합이라 하고 원소의 개수가 무한히 많은 집합을 무한 집합으로(박규홍 외, 2002; 박윤범 외, 2000; 이준열 외, 2007) 정의하고 있으며 대학에서 배우는 집합론에서는 자신과 일대일 대응되는 진부분 집합을 가지고 있는 집합을 무한 집합이라 하고 무한 집합이 아닌 집합을 유한 집합으로 정의한다(Lin & Lin, 1974; 이석종, 2005).

대부분의 사람들은 공기가 맑은 시골의 밤하늘을 쳐다보며 하나, 둘, 셋, … 하고 별의 개수를 세어보다가 무수히 많은 별에 세는 것을 도중에 포기한 경험을 가지고 있을 것이며 이러한 경험으로 "밤하늘의 별들의 모임"은 무한 집합이라는 직관을 형성시킬 수도 있다. 이와 같이 일상생활에서 우리가 사용하는 "무한히 많은"이라는 단어는 사실은 유한개이지만 아주 많이 있는 경우를 나타내기도 한다. 그러므로 수학 7-가에서 "무한 집합을 원소의 개수가 무한히 많은 집합"이라는 정의는 '무한히 많은'이라는 용어에 대한 수학적 정의가 없는 상

태이므로 학생들에게 생활언어로서의 개념과 혼동을 줄 수 있다. 그러므로 7단계에서 주어지는 무한 집합의 정의는 자체적인 순환모순성을 지니고 있다.

다른 관점에서 "밤하늘의 별들의 모임"을 분석하면 집합이란 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임이라고 정의하였으나 망원경을 이용해 정확하게 별을 헤아린다 하더라도 볼 수 없는 별이 밤하늘에 존재하기 마련이다. 그러므로 "주어진 조건에 알맞은 대상이 분명한 모임"이 집합의 정의로 주어진 상태에서, '대상이 분명한'이란 어구에 초점을 맞춘다면 이러한 모임을 집합이라고 할 수 있는가에 대한 의문을 가질 수 있다. 이처럼 중학교 수준에서의 집합의 정의와 무한 집합의 정의는 엄밀성과 의미전달에 근본적인 한계를 가지고 있다.

(2) 집합의 표현방법

집합 A를 세 자리 숫자의 모임이라 하면 학생들은 원소나열법을 이용하여 $A=\{100, 101, \cdots, 999\}$로 표현하거나 혹은 조건제시법을 이용하여 $A=\{x \in N \mid 100 \leq x < 1000\}$로 나타내지만 전자를 선호하는 경향이 있다. 이러한 경향은 세 자리 이상의 숫자들 모임 $B=\{100, 101, 102, \cdots\}$와 같은 무한 집합을 나타낼 때도 마찬가지이다. 어릴 때부터 집합을 원소나열법으로 표시된 것에 익숙하기도 하겠지만 7차 교육과정의 중학교 교과서에서도 원소나열법의 사용이 조건제시법보다 2배 이상 빈번히 나타나고 있다(박용문, 2005).

표본수가 작긴 하지만 2000년 박임숙은 '교사의 무한 개념 이해도 조사'에서 자연수의 집합 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$은 그 원소가 계속 무한히 확장되어가는 집합으로 생각하는가? 아니면 모든 자연수가 포함된 완결된 집합으로 생각하는가? 하는 설문에서 34명중 11명(29%) 만이 자연수 집합이 완결된 집합이라 답하였다고 한다. 모두 대학에서 자연수 전체 집합을 Peano 공리에 의해 도입하는 것을 배웠음에도 불구하고 실무한보다는 잠재적 무한 개념이 교사들의 무의식속에 더 크게 자리 잡고 있음을 알 수 있다.

많은 학생들이 무한 집합을 원소나열법으로 나타내었을 때는 잠재적 무한으로 보는 경향이 많다고 한다(김현정, 1990). 이를 위해서 무한 집합인 경우에는 조건제시법을 이용하여 무한개의 모든 원소를 포함하는 완결된 형태인 실제적 무한으로 사고할 수 있도록 해야 할 것이다. 여기서 $B=\{100, 101, 102, \cdots\}$를 하나의 확정된 집합으로 생각하지 않고 있는 이유 중 하나는 직후원(immediate successor)을 가지는 자연수의 성질 때문일 것이다. 그러므로 무한 집합의 예를 원소나열법으로 표현할 수 없는 집합으로 제시한다면 학생들이 조건제시법의 필요성과 유용성을 느낄 수 있는 계기로 만들 수도 있으므로 다음과 같은 예제들을 적절하게 지도할 필요가 있다.

예제 1. 0보다 크고 1보다 작은 분수들의 집합

예제 2. 선분 AB가 그려져 있는 종이 띠를 반으로 접고 또 계속해서 반으로 접을 때 상의 점들의 집합

예제 3. 한 점 P를 중심으로 하고 반지름이 1보다 크고 2보다 작은 인 원들의 집합

(3) 집합의 연산

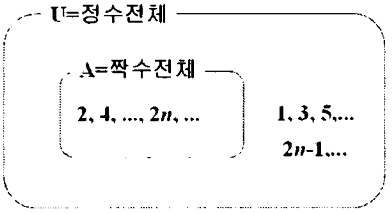
대부분의 교과서에서 집합과 유한 집합, 무한 집합의 정의를 제시한 후, 무한 집합과 유한 집합을 구별하는 예제를 한두 개만 다루고 있다. 또한 벤다이어그램으로 집합의 연산인 합집합, 교집합, 차집합을 설명할 때도 모두 유한 집합만을 예제로써 사용하고 있다. 이러한 예제를 통해 학생들은 은연중에 우리가 다룰 수 있는 집합은 유한 집합이라고 생각할 수 있다. 그러므로 학교수학에서 벤다이어그램이나 집합의 연산을 공부할 때도, 유한 집합과 함께 다양한 무한 집합을 예제로써 다루어야 한다. 전체집합 U가 무한 집합이고 $A \subset U$일 때 여집합 $U \setminus A$도 무한 집합이 되는 예제라든지, A가 유한 집합이면 항상 $U \setminus A$가 무한 집합인 예제를 다룸으로써 무한 집합의 성질이 자연스레 학생들의 직관에 자리 잡히도록 만들어 주어야 할 것이다. 다음은 그러한 예제들이다.

예제 1. A는 2의 배수들의 집합이고 B가 3의 배수일 때 $A \cap B$를 구하라.

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{x \mid x\text{는 2의 배수}\} \cap \{x \mid x\text{는 3의 배수}\} \\
&= \{x \mid x\text{는 6의 배수}\}
\end{aligned}
$$

여기서 $A \cap B$는 A보다 작은 집합이지만 무한집합이다.

예제 2. U가 자연수 전체 집합이고 A가 짝수인 자연수 집합일 때 $U \setminus A$를 구하라.



<그림 1> 무한 집합의 여집합

예제 3. A는 5의 배수들의 집합이고 B는 15의 배수들의 집합일 때 A와 B의 포함관계를 조사하여라.

(4) 무한 집합의 대소 관계

하워드 이브스(Howard Eves)는 역사적으로 알려진 유명한 수학적 결과를 탄생 배경과 함께 소개한 책 'Great Moments in Mathematics'에서 최초의 수학적 위대한 순간을 원시인들이 진흙이나 돌을 긁어서 어떤 집합을 세기 시작했을 때로 잡았다(Eves, 1994). 이는 집합의 원소를 부신의 한 눈금과 일대일 대응시킨 것이다. 이러한 일대일 대응의 개념은 아주 옛날부터 유한 집합을 세는 기초이자 현재에도 수의 개념이 되어있지 않은 어린이에게 다소(多少)관계를 이해시킬 수 있는 기초개념이다. 아직 다섯을 세지 못하는 어린 아이라 할지라도 양손의 손가락을 하나씩 대어보면 한 쌍씩 짝 지울 수 있기 때문에 양쪽 개수가 같다는 것은 알 수 있다.

우리나라와 외국의 중등학교 학생들은 '자연수 집합 $N=\{1,2,3,\cdots\}$과 짝수 집합 $E=\{2,4,6,\cdots\}$의 농도가 같은가' 하는 질문에 대하여 50% 이상이 서로 다르다고 답하였으나(Tirosh, 1985; 김현정, 1990), 교사를 대상으로 한 설문에서는 92%가 서로 같다고 답하였다(박임숙, 2000). 이러한 사실로 미루어 볼 때, 집합크기의 비교에서 일대일 대응 개념은 이차적 직관 형성이 비교적 수월한 개념임을 짐작할 수 있다. 실제로 인간의 본성과 그 근본법칙, 학문의 근거를 해명하고자 했던 18세기 영국의 철학자 흄(D. Hume, 1711-1776)은 지식은 관념의 연합에 의해 성립하며 양과 수를 철학적 관계의 한 요소로 보고 이에 대한 고찰을 중요시 하였다. 그는 유한한 두 대상의 개수가 같다는 것은 그들 사이에 일대일 대응함수가 존재할 때로 규정지었으며 이를 부울은 흄의 법칙(Hume's principle)으로 명명하였다. 흄은 유한 집합만을 대상으로 한 반면, 19세기 수학자 볼차노는 무한 집합에도 이를 적용하였다. 현재 집합론에서는 유한 집합이든 무한 집합이든지 간에 집합의 크기를 비교할 때는 일대일 사상을 사용한다.

유클리드의 '전체는 부분보다 더 크다'라는 공리를 자세히 살펴보면 두 집합사이에 두 종류의 관계가 있음을 알 수 있다. 상등(equal) 관계와 대등(equipotent) 관계가 그것이며 두 집합이 상등하면 대등하지만 역은 성립하지 않는다. 그리고 크다, 작다, 같다는 대소 관계를 논할 때는 후자인 대등관계가 판단의 준거가 된다. 즉, 집합 A가 집합 B보다 크다($B < A$)는 말은 B는 A의 하나의 부분 집합과 대등하지만 A는 B의 어떤 부분집합과도 대등하지 않을 때이다. 그러므로 유클리드 공리는 '전체는 부분보다 크거나 같다'로 수정되어야 한다.

그러나 중학교 학생들에게는 무한 집합의 대소 관계는 포함 관계와 혼동을 일으킬 수 있으므로 직관적인 포함관계와 일대일 대응관계는 서로 다른 개념이라는 것을 예를 통해 인식시켜야 할 것이다. 한편, 학교수학에서 손쉽게 다룰 수 있는 무한 집합은 자연수 집합 N이므로 무한 집합의 크기나 속성을 잘 이해하기 위해서는 N의 진부분집합이면서 N과 일대일 대응이 되는 무한 집합들을 찾아보는 활동이 필요한 것 같다. 5단계에서 배수 개념을 배웠으므로 고정된 어떤 수의 배수 집합은 그러한 무한집합으로 다루기 좋은 예이다. 두 수가 서로 소인 경우, 두 수의 배수 집합도 서로 소이므로 이러한 집합을 서로 비교하는 것이 5의 배수 집합과 자연수 전체 집합 N을 비교하는 것보다는 쉬운 예가 될 것이다.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{5의 배수 :} & 1\cdot 5 & 2\cdot 5 & 3\cdot 5 & 4\cdot 5 & 5\cdot 5\cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{6의 배수 :} & 1\cdot 6 & 2\cdot 6 & 3\cdot 6 & 4\cdot 6 & 5\cdot 6\cdots
\end{array}
$$

다음 단계는 2와 6과 같이 6의 배수 집합은 2의 배수 집합의 진부분 집합이지만 결코 2의 배수 집합보다 작다고 할 수 없는 예를 통해, 포함관계와 크기를 비교하는 대소 관계와는 차이가 있음을 자각할 수 있도록 해야 할 것이다. A가 유한 집합인 경우는 A의 진부분 집합 B

는 A와 절대로 일대일 대응 관계가 성립할 수 없다. 배수 집합과 대비될 수 있도록 이러한 예는 약수들 집합에서 찾아보는 것이 효율적일 것 같다. 이처럼 무한 집합은 유한 집합과 결정적 성질이 다르기도 하지만 무한 집합의 크기를 비교할 때는 유한 집합처럼 일대일 대응 관계를 이용한다는 사실이 받아들여질 수 있도록 다양한 예를 다루어야 할 것이다. 고등학교에서 배우게 되는 점들로 이루어진 수열도 결국은 자연수 집합 N과 같은 농도이므로 N의 크기를 느낄 수 있는 활동이야말로 무한 집합의 성질을 이해하는 가장 기초적인 작업이라 할 수 있다. 그러므로 다음의 예제들을 활용할 필요가 있다.

예제 1。자연수 집합 N과 짝수 집합 E의 포함관계를 조사하고 크기를 비교하여라.

예제 2。3의 배수들의 집합과 9의 배수들의 집합의 크기를 비교하여라.

예제 3。5의 배수 집합 A와 거듭 제곱수들의 집합 B의 크기를 비교 하여라.

$$\begin{array}{llllll} \text{A집합의 원소} & 1\cdot5 & 2\cdot5 & 3\cdot5 & 4\cdot5 & 5\cdot5\cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{B집합의 원소} & 5^1 & 5^2 & 5^3 & 5^4 & 5^5\cdots \end{array}$$

7-가의 바로 다음 단원에서 소인수 분해를 배우므로 소수는 무한하다는 개념을 알고 있으면 다음과 같은 문제도 도전시켜 볼만하다.

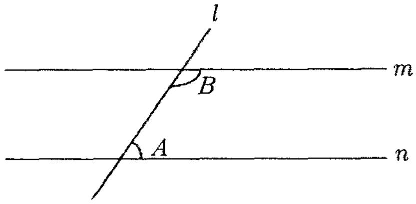
예제 4。 자연수 집합 N은 자신의 크기와 같으면서도 서로 소인 진부분 집합들을 무수히 많이 가지고 있음을 보여라.

$$\begin{array}{lllllll} 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & \cdots \\ 3^1 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 & 3^6 & \cdots \\ 5^1 & 5^2 & 5^3 & 5^4 & 5^5 & 5^6 & \cdots \\ 7^1 & 7^2 & 7^3 & 7^4 & 7^5 & 7^6 & \cdots \\ 11^1 & 11^2 & 11^3 & 11^4 & 11^5 & 11^6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

여기서 $N_p=\{p^n : n\text{는 자연수}\}=\{\mathrm{p}^1,\ \mathrm{p}^2,\ \cdots\}$라 두면 N_p는 N과 크기가 같고 p, q가 서로 다른 소수이면 $N_p \cap N_q=\varnothing$ 이고 $\bigcup_{\mathrm{p}\text{는 소수}} \mathrm{N_p} \subset \mathrm{N}$가 성립한다.

2) 평행선 성질의 지도와 활용 예제

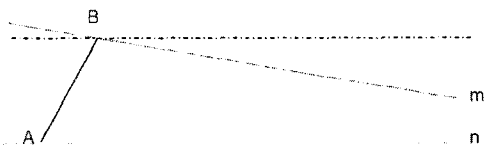
유클리드 원론의 제 5공준은 '하나의 직선 l이 두 직선 m, n과 만날 때, 어느 한쪽의 내각의 합이 2직각보다 작으면, 그 쪽에서 두 직선은 만난다.' 는 것으로 7단계 교육과정에서는 제 5공준을 대우 명제로 '평행선 m, n이 한 직선 l과 만날 때, 동위각의 크기는 같다'로 표현한다. <그림 2>에서 m과 n이 평행일 때, 평행선 공준을 사용하면 각 A의 동위각의 크기는 B의 보각과 같으므로 $\angle A+\angle B=180°$ 이다. 이러한 사실은 무한 과정을 이용하면 삼각형 내각의 합의 문제로 변형된다.



<그림 2> 평행선에서 내각의 합

여기서는 다음의 예제가 학습에 도움이 될 것이다.

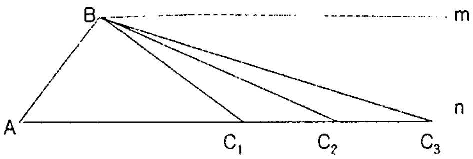
예제 1。<그림 2>에서 직선 m을 B를 중심으로 약간 오른쪽으로 기울이면 어떻게 되겠는가? $\angle A+\angle B$의 크기는 어떻게 변하겠는가?



<그림 3> 기울어진 평행선

<그림 2>에서 n에 평행한 직선 m을 약간 기울이면 m과 n은 <그림 3>과 같이 선분 AB의 오른쪽에서 만날 것이므로 유클리드의 원론에서 언급한 평행선 공준의 내용을 체험할 수 있다. 또한 두 직선 m과 n은 삼각형의 두변이 되고 $\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{B}$는 180° 보다 작아진다. 그 작아진 각은 삼각형의 새로운 한 각으로 나타나므로 결국 $\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{B}$는 삼각형의 내각의 합으로 변형된다고 볼 수 있다. 이러한 수학적 사고를 역으로 접근하면 무한의 과정과 성질을 체험할 수 있는 수학적 제재가 될 수 있다.

예제 2. $\triangle ABC_1$에서 A, B 두 점은 고정하고 선분 AC길이를 자꾸 늘인다고 하자. 이때 $\angle A + \angle B$ 의 최대값은 얼마인가?

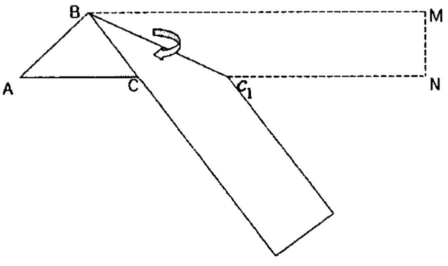


<그림 4> 삼각형 밑변 길이의 변화

<그림 4>에서 $\overline{AC_1}$의 길이가 길어질수록 $\triangle ABC_k$에서 $\angle B$의 크기는 $180° - \angle A$로 가까워지고 $\overline{BC_k}$는 점 B를 지나고 n와 평행인 직선 m에 가까워진다. 삼각형의 내각의 합 $\angle A + \angle B + \angle C_k = 180°$ 에서 $\angle C_n$의 크기가 $0°$ 에 가까워지므로 $\angle A + \angle B$는 $180°$ 에 가까워진다. 결국 $\overline{AC_k}$는 직선 n이 되고 $\overline{BC_k}$는 직선 m이 되어 $m \parallel n$일 때 평행선 공준의 대우문제로 귀결된다. 즉 $\triangle ABC_k$에서 한 변 $\overline{BC_k}$의 길이가 무한대로 가면 삼각형 $\triangle ABC_k$의 두 변 $\overline{AC_k}$과 $\overline{BC_k}$의 극한은 평행선이 된다는 것을 무한의 과정을 통해 알 수 있다.

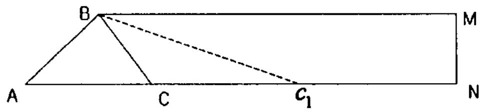
예제 3. 선분 AC_k가 <그림 4>의 직선 m에 실제로 접근함을 평행한 종이 띠를 이용한 종이접기 활동을 통해 다음과 같이 확인해 보아라.

(i) 평행한 종이 띠에 $\triangle ABC$를 그린 다음 선분 AB의 왼쪽 부분은 오려내고 $\overline{BM}$과 $\overline{BC}$가 겹치도록 반으로 접는다.



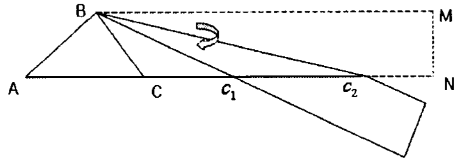
<그림 5>

(iii) 접은 면을 다시 원래대로 펼치면 접혔던 $\overline{BC_1}$은 각 $\angle MBC$의 이등분선이 된다.



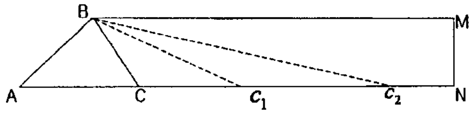
<그림 6>

(iv) 다시 $\overline{BM}$과 $\overline{BC}$가 겹치도록 반으로 접는다.



<그림 7>

(v) 접은 면을 다시 원래대로 펼치면 접혔던 $\overline{BC_2}$는 각 $\angle MBC_1$의 이등분선이 된다.



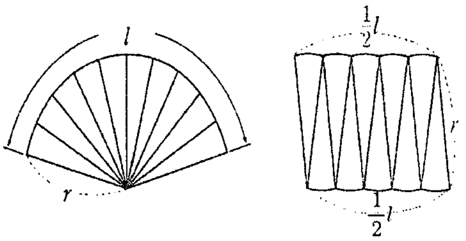
<그림 8>

(vi) 다시 $\overline{BM}$과 $\overline{BC_k}$이 겹치도록 반으로 접는 활동을 계속하면 $\overline{BC_k}$은 점차 $\overline{BM}$에 가까워지고 $\triangle ABC_k$의 내각의 합은 $\angle A + \angle B$로 가까워지므로 $\angle A + \angle B = 180°$ 임을 직관적으로 알 수 있다.

3) 부채꼴의 넓이와 호의 길이

일반적으로 7단계에서 배우는 부채꼴의 넓이는 부채꼴을 같은 모양의 부채꼴로 분할한 다음 곡선인 호를 이등변 삼각형의 밑변인 선분과 대응시켜 삼각형의 넓이를 분할 부채꼴의 넓이로 대신하여 구한 다음 다시 합하는 형식으로 전체 부채꼴의 넓이를 구하고 있다. 즉, 부채꼴을 무수히 많은 부채꼴로 나누어 곡선인 부채꼴의 호의 길이를 직사각형의 가로변인 선분으로 대응시켜 넓이를 구하고 있는데, 이는 곡선인 호를 무한히 나누면 선분의

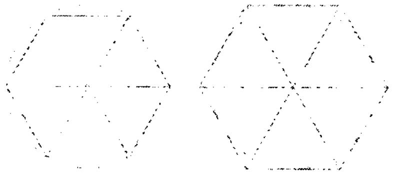
합의 형태로 바꾸어 생각할 수 있다는 것이다(박규홍 외, 2000).



<그림 9> 부채꼴의 넓이

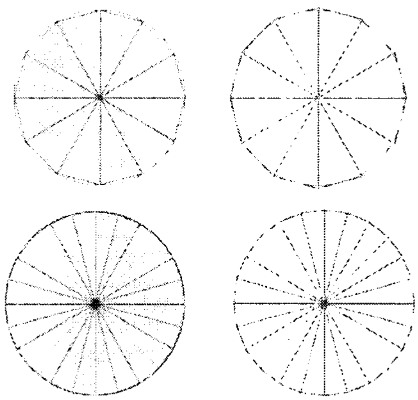
다음은 곡선도형인 원의 넓이와 원주의 길이를 직선도형의 넓이와 길이를 이용하여 구할 수 있다는 것을 시각적으로 보여준다. 왼쪽에 있는 직선도형은 원에 내접하는 정육각형의 변을 두 배 씩 늘였을 때이고 오른쪽에 있는 직선도형은 원에 외접하는 정육각형의 변을 두 배 씩 늘였을 때이다. 당연히 원의 넓이는 내접한 다각형의 넓이보다는 크고 오른쪽의 외접하는 다각형보다는 작으므로 <그림 10>, <그림 11>, <그림 12>는 변의 수를 계속 늘여 가면 이들 세 도형의 넓이가 같아짐을 보여준다. Fishbein, Tirosh와 Hess(1979)의 연구결과에 의하면 실무한에 대한 직관은 제기된 문제의 개념적 상황이나 그림으로 표현된 상황에 아주 민감하다고 한다. 그러므로 이 방법은 아르키메데스가 원주율을 구하기 위해 쓴 소진법이긴 하지만, 7단계 학생들에게 원이나 부채꼴의 넓이를 직선도형의 넓이를 이용해 구할 수 있음을 시각적으로 보여줄 수 있는 적절한 예인 것 같다.

(i) 아래 그림에서 원에 내접하는 정육각형과 외접하는 정육각형의 넓이는 각각 원과의 넓이와 다소 차이가 있음을 알 수 있다.



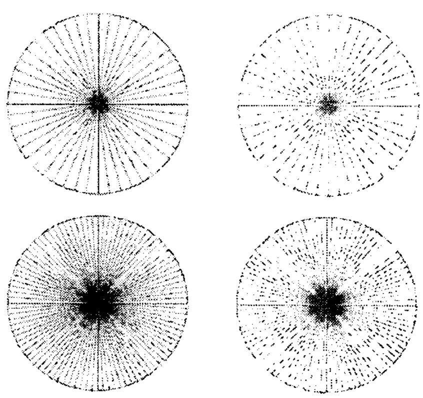
<그림 10> 원에 내접, 외접하는 정육각형

(ii) 다음은 원에 내접, 외접하는 정12각형과 정24각형으로 정다각형의 면적과 원의 면적의 차이는 훨씬 줄어듦을 알 수 있다.



<그림 11> 원에 내접, 외접하는 정12각형과 정24각형

(iii) 아래 그림은 원주를 48, 96등분하여 얻은 정 48각형과 정96각형이다. 원에 내접하는 정다각형이나 외접하는 직선도형인 정다각형은 곡선도형인 원과 시각적으로는 구별하기가 쉽지 않다.

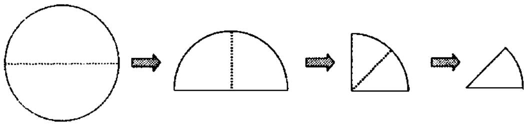


<그림 12> 원에 내접, 외접하는 정48각형과 정96각형

<그림 12>은 원의 면적과 다각형 면적의 합이 거의 같음을 시각적으로 보여주며 호의 넓이를 <그림 9>와 같은 예를 통해 설명해 줄 수 있는 근거를 제시해 준다. 위의 방법을 계속하면 원에 내접하는 정다각형의 넓이와 외접하는 정다각형의 넓이는 같아지며 Sandwich 정리에 의해 원의 넓이도 이들과 같아진다. 사실상 원의 넓이는

원에 내접, 외접하는 직선도형의 넓이들의 극한이 같을 때 이들의 값으로 정의된다. 여기서 무한히 작게 나누었을 때 이용된 무한소와 이들의 무한개의 합의 개념은 고등학교 과정에서 구분구적분법의 기초가 된다. 그러므로 중학교 1학년에서 무한소 개념이 어려울 수도 있지만 이처럼 선분들의 합이 무한의 과정을 거치면 곡선으로 변형될 수 있고 곡선도형은 직선도형에 의해 근사시킬 수 있는 수학적 사고의 한 방법을 경험하는 좋은 계기가 될 수 있다.

부채꼴의 넓이와 호의 길이가 비례하는 것을 한 교과서(박규홍 외, 2000)는 다음과 같이 원을 반씩 접어가는 활동을 통해 비형식적으로 증명하고 있다.



<그림 13> 중심각과 호의 길이와의 관계

여기서는 무한 개념을 접는 과정으로서 뿐만 아니라 완성된 의미인 실무한도 생각할 수 있도록 다음과 같이 질문을 부연한다면 보다 더 나은 학습 효과를 얻을 수 있을 것이다.

예제。<그림 13>에서와 같은 활동을 계속 반복한다면 어떤 결과를 예측할 수 있겠는가? 즉 부채꼴의 면적과 호의 길이, 중심각의 크기는 어떻게 되겠는가?

2. 8단계에서의 무한개념

1) 유리수와 순환무한소수

분수는 나눗셈을 할 때 생긴 것이고 소수는 나눗셈보다는 물건의 길이나 무게를 측량할 때 생긴 것으로 발생시기는 약 3000년의 차이가 있다. 벨기에 수학자 스테빈(S. Stevin 1548-1620)이 1584년에 발표한 소수의 발명은 계산의 3대 발명 중 하나로 꼽힐 만큼 획기적이고 편리한 수 표현법이다.

현 교육과정에서는 초등학교 4단계에서 분수와 소수를 함께 도입하고 8단계에서는 분수를 소수로 나타내면 유한소수와 순환소수로 나타낼 수 있다는 것을 배운다. 유리수란 a, b가 정수이고 $b \neq 0$일 때 분수 $\frac{a}{b}$로 나타낼 수 있는 수로 정의하고 분수를 유한소수와 순환무한소수로 나타나며 그 역도 성립함을 보이고 있다. 여기서 무한 소수란 소수점 아래에서 0이 아닌 숫자가 끝없이 계속되는 소수로 정의하고 있다. 유리수를 분수로 표현하면 이는 명확한 개념을 가진 수학적 양으로 인식하지만 무한 순환소수로 표현하면 끊임없이 계속되는 잠재적 무한 개념으로 받아들이기 쉽다.

무한소수 $0.\dot{9}$ 는 1과 같은 수인가? 혹은 1보다 작은 수인가? 하는 문제에서 많은 학생들이 직관적으로는 후자의 경우를 참으로 받아들이는 경우가 많다. 학교수학에서 $0.\dot{9}=1$임을 보이는 데는 다양한 방법으로 접근할 수 있다.

(i) $\frac{1}{3}=0.\dot{3}$ 을 이용한다. 양변에 3을 곱하면

$$3\times\frac{1}{3}=3\times 0.\dot{3}=0.\dot{9}$$

이므로 $1=0.\dot{9}$ 가 성립한다.

(ii) $9x \div 9=(10-1)x \div 9 = x$임을 이용한다.

이것은 우리나라 대개의 교과서에서 채택하고 있는 8단계에서 무한 순환소수를 분수로 고치는 방법이다.

$$x = 0.999\cdots \qquad ---- ①$$

라 두고 양변에 10을 곱하면

$$10x = 9.999\cdots \qquad ---- ②$$

이다. ②에서 ①을 빼면

$$9x = 9$$

이므로 x=1이다.

이러한 해법은 학생들에게 유한소수인 경우는 10을 곱하면 $10\times 0.999=9.99$ 에서와 같이 소수점 이하의 유효숫자가 하나 줄어들기 때문에 무한소수일 때도 10을 곱하면 $10\times 0.999\cdots$는 9.999⋯가 아니라 9.99⋯이지 않을까? 또는 ②에서 ①을 빼면 오른쪽 맨 끝에 있는 9의 자리는 누락되지 않을까? 하고 밖으로 드러나지 않는 내적 갈등을 일으키게 한다(Tall & Schwarzenberger, 1978).

(iii) $(x \div 9)\times 9 = x$ 임을 이용한다. $x=1$로 두면

$$(1\div 9)\times 9=1 \qquad \text{----} ③$$

이다. ③의 좌변을 계산하면

$$1\div 9=\frac{1}{9}=0.111\cdots$$

이므로

$$(1\div 9)\times 9=0.111\cdots\times 9=0.999\cdots$$

이고, 여기서 ③의 우변은 1이므로 $1=0.999\cdots$ 이다.

(iv) $9\div 9$는 몫이 0이고 나머지가 9인 수이다.

90을 9로 나누면 몫이 10이고 나머지가 0인 수이지만 관점을 달리하면 몫이 9이고 나머지가 9인 수로 볼 수 있다. 실제로 나눗셈을 이용하여 9를 9로 나누면 몫이 0이고 나머지가 9인 수이므로 계속 나눌 수 있다. 즉,

$$\begin{array}{r|l} & 0.99\ \cdots \\ \hline 9 & 9.0 \\ & \underline{8\,1} \\ & 90 \\ & \underline{81} \\ & 90\ \cdots \end{array}$$

그러므로

$$\frac{9}{9}=0.999\cdots \qquad \text{----} ④$$

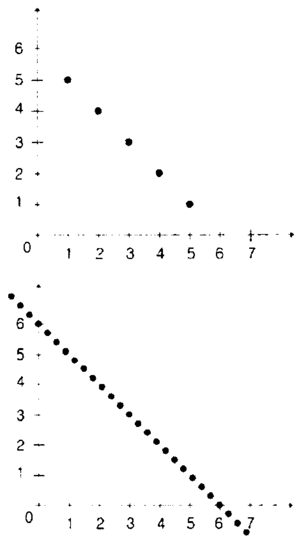
여기서 ④의 좌변은 1이므로 $1=0.999\cdots$이다.

이러한 방법 역시 나눗셈에서 나머지는 통상적으로 제수인 9보다는 작아야 하는데 9이라는 사실이 갈등을 일으키는 요인이 될 수 있으나 완전한 논리보다 아이디어들 사이의 확실한 관계가 더 중요한 학교 수학에서는 이러한 비형식적 증명도 의미가 있다. 이와 같이 유리수 $0.\dot{9}$는 무한히 계속해서 점점 더 조금씩 커져가는 것처럼 보이는 무한소수 $0.999\cdots$로 표현할 수도 있고 분수처럼 확정된 양 $\frac{9}{9}$으로도 나타낼 수 있다. 둘은 같은 수이므로 잠재적 무한 개념의 성격이 강한 순환무한소수가 실무한 개념인 확정된 수로 인식될 수 있도록 적절한 방법으로 학습과 지도가 이루어져야 한다.

예제。모든 유리수는 순환무한소수로 유일한 방법으로 표현할 수 있음을 보여라.

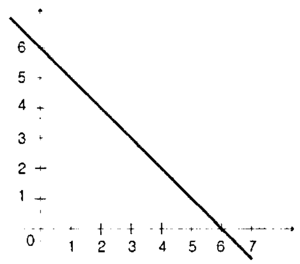
2) 일차함수와 그래프

일차함수나 일차방정식의 해를 그래프로 표현하는 것을 8단계 교육과정에서 다루고 있다. $x+y=6$이라는 방정식의 해를 x, y가 자연수일 때, 유리수일 때, 실수일 때로 나누어 설명을 하고 있으며 그래프를 이용하여 다음과 같이 표현하고 있다.



<그림 14> $x+y=6$의 해의 그래프

자연수 집합일 때는 방정식의 해가 유한개의 점으로 나타나고, 유리수인 경우에는 조밀한 점의 형태로 나타나므로 이를 통해 실수전체집합인 경우는 직선으로 간주하고 있다.



<그림 15> $x+y=6$의 그래프

유리수에서 조밀한 점의 형태로 나타나는 것이 실수일 때는 직선으로 표현된다고 하는 것은 자칫 학생들에게 더 많은 유리수를 사용하면 직선이 될 수 있고 또는 직선은 유리수들로 덮여 있다는 오류를 낳을 수 있다. 실제로 유리수인 경우는 아주 조밀한 점의 형태로써 불연속인 그래프가 나타나게 되는 것이고, 무리수가 포함되어야지만 연속적인 직선의 그래프로 나타날 수 있다. 그러나 무리수는 9-가 단계에서 정식으로 다루어지므로 수 전체의 집합을 정의역으로 한다는 언급만 하고 일차함수를 직선으로 나타내고 있다.

$0.999\cdots = 1$이라는 것을 받아들이면 유한소수는 순환무한소수로 표현이 가능하다는 것이 수월하게 이해될 수 있다. 즉 $2.35 = 2.3499\cdots$이고 $0.5 = 0.499\cdots$이므로 유리수는 무한소수로 표현하면 순환하는 무한소수로 유일하게 표현된다. 유리수가 순환하는 무한소수와 일대일 대응하므로 9-가 단계에서 무리수를 정식으로 도입하기 이전이라도 유리수가 아닌 수는 순환하지 않는 무한소수임을 알 수 있다. 또한 임의의 두 유리수 사이에 있는 유리수가 아닌 수를 항상 잡을 수 있으므로 순환무한소수 전체를 대소 관계에 따라 직선위에 점으로 나타낸다면 불연속인 점선으로 밖에 표현될 수 없다. 예를 들어, 유한소수인 두 유리수 $0.232 = 0.231999\cdots$ 와 $0.233 = 0.232999\cdots$ 에 대해 비순환 무한소수 $0.232010010001\cdots$ 을 잡을 수 있고 이는 두 유리수 사이에 있는 유리수가 아닌 수이다.

이처럼 수를 무한소수로 표현하면, 직선위에 대소 관계로 나열된 유리수 집합은 조밀하지만 무수히 많은 틈이 있으며 이러한 틈은 비순환 무한소수임을 알 수 있으므로 수 전체는 직선상의 점과 일대일 대응된다는 설명이 가능해 진다. 따라서 아직 무리수를 모르는 상태에서라도 일차함수의 그래프가 연속인 직선으로 나타남을 학생들에게 인식시킬 수 있는 하나의 방법이다.

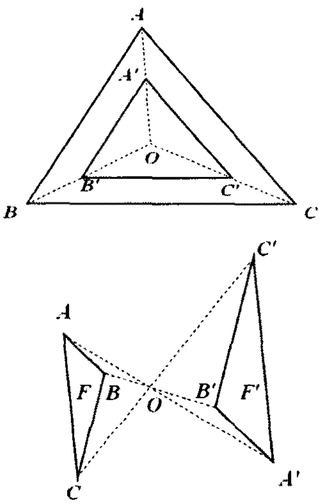
3) 도형의 닮음

한 도형 F를 일정한 비율로 확대하거나 축소하여 도형 F'을 얻었을 때 두 도형 F와 F'는 닮음인 관계에 있다고 한다. 닮음이란 F가 있는 평면의 점(x, y)을 F'이 있는 평면 (x', y')로 보내는 함수로 해석할 수 있으며 이때 (x, y)와 (x', y')의 관계는 다음과 같은 방정식으로 주어진다.

$$x' = ax - by + c$$
$$y' = \pm (bx + ay + d)$$

여기서 $a^2 + b^2 \neq 0$이다.

그러므로 도형 F에서의 3점의 상의 좌표만 알면 F를 F'으로 보내는 닮음 변환을 구할 수 있다. 닮음을 설명하면서 아래와 같은 그림으로 많이 나타낸다.



<그림 16> 평면에서의 닮음변환

평면도형에서 닮음도형의 성질은 대응하는 변의 길이의 비가 일정하고, 대응하는 각의 크기가 같은 것으로 <그림 16>은 각각 닮음의 중심이 내부에 있는 경우와 외부에 있는 경우이다. 선분 AB와 선분 A'B'의 길이는 다르지만 닮음의 중심에서 직선을 그으면 $\overline{AB}$ 위의 한 점에 대해서, 이에 대응되는 $\overline{A'B'}$ 위의 점이 반드시 하나 존재하고 그 역도 성립하므로 $\overline{AB}$와 $\overline{A'B'}$사이에는 일대일 대응이 성립함을 알 수 있다.

선분 위에 있는 점들의 집합은 무한 집합이고 1차원 도형인 선분 은 0차원 도형인 점들로 이루어져 있다. 즉 0차원 도형의 무한 합집합은 성질이 전혀 다른 1차원 도형인 선분을 만들어 낸다. 수 집합을 정의역으로 가지는 일차함수의 $y = ax + b$직선으로 나타난다는 말은 구간 $[c, d]$ 사이에 있는 수 x를 $ax + b$로 일대일 대응시키

고 구간 $[c, d]$를 길이가 이것의 a배인 구간 $[ac+b, ad+b]$로 보낸다는 말이다. 여기에서 교사는 학생들에게 다음과 같은 질문을 던질 수 있다.

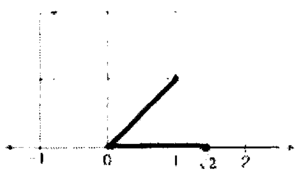
예제。 닮음도형에서 길이의 비는 닮음비만큼 면적의 비는 닮음비의 제곱만큼 늘어나지만 선분 상에 있는 점들의 농도는 변하지 않는다. 그 이유는?

길이는 실수인 유한 량이지만 점들의 집합은 무한 집합이므로 차별화됨을 학생들이 느낄 수 있도록 둘은 별개라는 점을 통해 무한의 속성을 경험할 수 있도록 학습지도가 이루어져야 할 것이다.

3. 9단계에서의 무한개념

1) 무리수의 개념

교육과정에서는 무리수를 비순환 무한소수라고 정의하고 제곱근을 이용하여 접근하고 있다. 넓이가 a로 주어진 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{a}$이므로 대부분의 교과서는 모눈종이 위에 면적이 a인 정사각형을 구하고 그의 한 변을 수직선상에 회전이동시킴으로써 $\sqrt{a}$의 위치나 다른 수와의 대소 관계를 보여주고 있다.



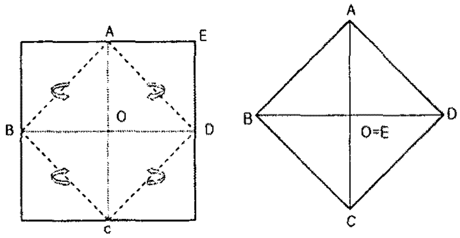
<그림 17> 수직선에서 $\sqrt{2}$의 크기

그러나 이제까지 접한 수가 π를 제외하고는 대부분 정수, 분수인 유리수만을 접하고 다루어 왔기 때문에 학생들은 무리수를 논리적으로 인식하지만 직관적으로는 쉽게 받아들이지 못한다. 그러므로 다양한 예를 통해 무리수가 우리 주변에 산재해 있는 가치 있는 수임을 학생들에게 인식시켜줄 필요가 있다. 다음은 한 변이 1인 정사각형에서 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$임을 활동을 통해 경험해 볼 수 있는 예이다.

예제 1。 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선은 $\sqrt{2}$임을 보여라.

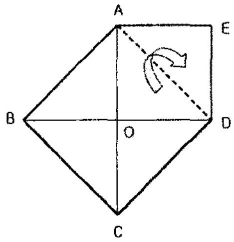
(i) 한 변의 길이가 2인 정사각형의 색종이를 준비한 다음 네 모서리가 정사각형 중심 O에 오도록 접는다.

(ii) 두 겹이 겹쳐진 정사각형 ABCD의 면적은 원래 면적의 반이므로 2이고, 따라서 한 변 AD의 길이는 $\sqrt{2}$이다.



<그림 18> 색종이를 이용한 접기

(iii) 접혀있던 △AED를 다시 펼치면 정사각형 AODE는 한 변의 길이가 1이고 대각선은 AD이므로 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$가 된다. 그러므로 한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선은 $\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.



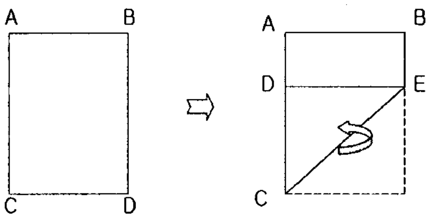
<그림 19> 종이 접기를 통한 $\sqrt{2}$ 만들기

예제 2。 A_3, A_4, B_4, B_5 용지에서 가로 세로의 비가 $\sqrt{2}$임을 보이고 왜 $\sqrt{2}$로 하였는지 이유를 설명하여라.

큰 종이를 반으로 잘라서 작은 종이를 만드는 과정에서 종이의 낭비를 최소화하려면 어떻게 해야 하나? 확대하거나 축소해서 다른 용지에 복사할 때, 원래의 내용을 그대로 살리기 위한 조건은 무엇인가? 와 같은 질문을 던짐으로써 전지의 절반과 전지는 서로 닮은꼴이어야 하는 사실을 학생 스스로 찾도록 해야 할 것이다. 또한

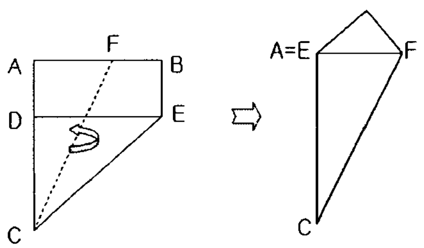
이를 만족하는 수는 무리수인 $\sqrt{2}$ 밖에 없음을 인식하여 이 수의 엄청난 위력을 깨달을 수 있도록 하여야 한다. 다음은 A_4용지에서 가로 세로의 비를 확인하는 절차이다.

(i) A_4용지의 밑변을 한 변으로 하는 정사각형을 접어 대각선을 CE라 한다. 예제 1에 의해 CE의 길이는 가로 CD길이의 $\sqrt{2}$ 배이다.



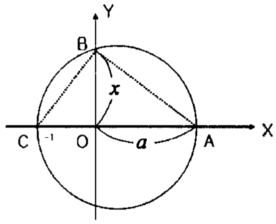
<그림 20> A_4용지에서의 가로 세로의 비

(ii) 선분 AC와 선분 EC가 서로 만나도록 $\angle ACE$를 반으로 접는다. 이 때, 점 A와 E가 겹치므로 A_4용지에서 세로 AC의 길이는 CE와 같음을 알 수 있다. 따라서 A_4의 가로 세로의 비는 $1:\sqrt{2}$ 임을 확인할 수 있다.



<그림 21> A_4용지에서의 가로 세로의 비 $\sqrt{2}$

예제 3. 다음 그림은 a가 임의의 실수일 때 $\sqrt{a}$의 크기를 알아내고 작도하는 방법이다. 여기서 $\sqrt{a}$는 어떻게 구하는가?



<그림 22> $\sqrt{a}$ 작도와 a와의 크기 비교

중심이 $(\frac{a-1}{2}, 0)$이고, 반지름이 $\frac{a+1}{2}$인 반원을 그리고 Y축과 만나는 점을 B라 두면 $\triangle COB$와 $\triangle BOA$는 서로 닮음이고 $1:x=x:a$가 성립하므로 $x=\sqrt{a}$ 이다. y축과 만나는 점 B의 좌표는 $(0, \sqrt{a})$이고 $\triangle BOA$는 한 변의 길이가 a이고 높이가 $\sqrt{a}$인 직각 삼각형이므로 $\sqrt{a}$의 크기를 짐작하고 비교할 수 있다.

예제 4. 무리수의 집합은 유리수 집합보다 크기가 작은 집합이 아니라는 것을 보여라.

a가 무리수이면 임의의 유리수 $r \in \mathbb{Q}$에 대해 $a+r$도 무리수이므로 하나의 무리수마다 유리수 집합 $\mathbb{Q}$ 크기의 무리수들의 집합이 생겨나므로 무리수 전체집합 $\mathbb{Q}^c$의 크기는 유리수 집합보다는 작지 않음을 알 수 있다. 사실 무리수집합은 유리수집합보다 훨씬 크며 실수집합과 같은 농도를 가지고 있다. 연속체 가설을 받아들인다면 무한 집합의 레벨 중 가장 작은 것이 유리수 집합 $\mathbb{Q}$이고 그 다음의 무한 집합이 무리수 집합 $\mathbb{Q}^c$이다.

2) 이차방정식과 연분수

$a_n\,(n \geq 0)$이 실수일 때 $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$

로 표현된 분수를 단순 연분수 (simple continued fraction)라 하고 $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$로 표시한다. 여기서 0이 아닌 a_n을 유한 개 가진 단순 연분수를 유한 단순 연분수라 하고 $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$으로 나타내고 0이 아닌 a_n을 무한히 많이 가지고 있는 연분수를 무한 단순 연분수라 한다. 모든 실수는 단순 연분수로 표현되며, 유리수는 유한개의 항을 가지는 단순 연분수와 일대일 대응되므로 자연히 무리수는 무한 연분수와 일대일 대응이 이루어진다[강미광, 2000]. 이처럼 연분수에 의한 실수의 분류법은 유리수는 유한 개념과 무리수는 무한 개념과 연관되도록 각각 특정 지운다. 예를 들어, 유리수는 다음과 같이 유한 단순 연분수로 나타낼 수 있다.

$$\frac{57}{17} = 3 + \frac{6}{17} = 3 + \frac{1}{\frac{17}{6}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{5}{6}}$$

$$= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{6}{5}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = [3:2, 1, 5]$$

무한 집합은 전체와 같아지는 부분집합이 존재하는 속성을 가진 것처럼 무한 개념이란 전체와 같아지는 부분이 존재하는 속성을 가지고 있다. 그러므로 학생들에게 그러한 속성을 가진 예들을 찾아보고 경험하도록 하는 것은 무한에 대한 이차적 직관을 키워주는 한 방법이라 생각된다.

라그랑즈(Lagrange)는 계수가 정수인 이차방정식의 모든 실근은 반복적 주기형태를 가지는 연분수임을 증명하였다. 그래서 이차방정식의 무리근은 무한 연분수로 표현되며 무한 연분수는 무한의 속성을 이해하는 데 좋은 예를 제공해 준다.

예제 1。 이차방정식 $x^2 - ax - 1 = 0$에서 양수인 무리근을 연분수로 나타내어라.

근의 공식을 이용해 이차방정식 $x^2 - ax - 1 = 0$의 근을 구하면 $\frac{1+\sqrt{a^2+4}}{2}$이지만 다음과 같이 연분수로도 나타낼 수 있다.

$$x^2 - ax - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = ax + 1 \Rightarrow x = a + \frac{1}{x}$$

이므로 재귀적 방법으로 표현하면 다음과 같다.

$$x = a + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a + \frac{1}{x}} = a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{x}}}$$

$$= \cdots\cdots = [a; a, a, a, \cdots]$$

그러므로 $\frac{1+\sqrt{a^2+4}}{2} = [a; a, a, \cdots]$이다.

역으로 가장 간단한 무한 연분수 $[1; 1, 1, 1, \cdots]$을 근으로 가지는 이차방정식은,

$$[1; 1, 1, 1, \cdots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}} = x$$

라 두면 $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\cdots}}}} = x$ 이므로

$\boxed{x}$

$1 + \frac{1}{x} = x$이다. 양변에 x를 곱하면 $x^2 - x - 1 = 0$이므로 $[1; 1, 1, 1, \cdots]$은 이 이차방정식의 해이다. 실제로 이 연분수의 값은 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$인 황금비로써 수를 연분수로 표현했을 때 가장 간단한 무리수는 바로 황금비이다. 이처럼 순환하는 무한 연분수를 x라 두면 같은 모양이 분모에서 무한 번 계속된다. 무한 반복의 표현 중에서 순환마다 하나를 제외하더라도 남은 부분은 원래 x의 모습과 같아지므로 부분이 전체와 같아지는 속성을 지니고 있다.

예제 2。 $\sqrt{2}$를 연분수로 표현하여라.

$\sqrt{2}$는 1과 2사이의 수이므로 $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$로 표현하면

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$$

이다. $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x}$을 위 식의 우변에 대입하면,

$$x = \sqrt{2}+1 = 1+\frac{1}{x}+1 = 2+\frac{1}{x}$$

이므로 이를 재귀적 방법으로 x대신 또 대입하면

$$x = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}} = \cdots$$

이다. 다시 $\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}$에 x를 대입하면

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{x} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$

$$= [1;2,2,2,\cdots]$$

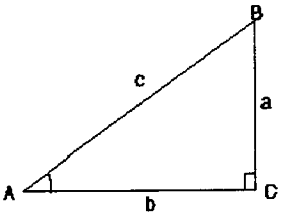
을 얻을 수 있다.

예제 3. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots}}}}$ 을 구하여라.

예제 4. 부분이 전체를 닮고 있는 예를 만들어라.

3) 삼각비

삼각비는 직각 삼각형 △ABC를 이용하여 다음과 같이 정의된다.



$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{(\text{높이})}{(\text{빗변})}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{(\text{밑변})}{(\text{빗변})}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{(\text{높이})}{(\text{밑변})}$$

<그림 23> 삼각비의 정의

밑변의 길이가 1인 직각 삼각형에서 tan A는 삼각형의 높이이자 빗변에 대한 기울기로 생각할 수 있다. $\angle A$의 크기가 $0°$에서 $90°$로 변함에 따라 $\tan A$는 0보다 큰 실수 값을 가진다. $\angle A$가 $90°$로 가까이 감에 따라 $\tan A$는 무한대로 가까이 가는 실수 값을 취하므로 tangent 함수는 유한한 각 $[0°, 90°)$을 무한한 길이 $[0, \infty)$로 일대일 대응시킨다. 일차함수나 닮음변환에 의해서는 유한한 길이를 가진 선분은 길이가 함수에 따라 달라지긴 하지만 유한한 선분으로 일대일 대응시켰다. 즉, 이들에 의해서 유한한 선분 상에 있는 점들은 서로 같은 농도를 가짐을 알 수 있었는데, 탄젠트함수는 유한한 선분을 무한한 반직선과 대응시킴을 알 수 있다. 이처럼 탄젠트함수는 '무한 집합은 유한한 부분이 무한한 전체와 같아질 수 있다'라는 속성을 다시 한 번 깨닫게 해 줄 수 있는 좋은 예이다.

Ⅳ. 결 론

이제까지 중학교 교육과정에서 무한 개념이 어떤 형태로 나타나고 학생들의 무한 개념에 대한 직관력과 발달 수준을 높이기 위해서는 어떻게 접근해 가야하는지에 대해 모색해 보았다.

실제로 중학교 교육과정에서는 유한 집합과 무한 집합을 구별할 수 있는 정도만을 요구하고 학생들의 무한 개념 형성에 대해서는 그다지 염두에 두지 않는다. 그러나 유한인 논리적 쉐마를 강화하는 정규 수학교육에 의해서는 학생들의 실무한에 관한 직관이 별로 나아지지가 않으며(Fischbein, Tirosh & Hess, 1979; Weeler & Martin, 1988), 학생들은 무한과 관련된 문제에서 자신의 답이 수학적으로 맞지 않는다 하더라도 무한 개념에 관한 논리적 이성보다는 자신의 직관에 확신을 갖는 경우가 많다고 한다(Fischbein, Tirosh & Melamed, 1982). 그러므로 교사는 학생들이 무한집합을 자연스럽게 받아들일 수 있고 유한 집합과의 차이를 찾아낼 수 있도록 수업시간에 적절한 교육 활동을 구성, 제공하는 노력이 필요하다.

중학교에서 제시되는 무한집합의 정의는 명확한 의미 전달에 원천적 한계를 가질 수밖에 없으나 수학에서 다루는 대부분의 집합은 무한집합이므로 의도적으로나마 집합의 연산이나 대소 관계에서 무한집합도 함께 다루도록 해야 한다. 예를 들어, 수학에서 가장 쉽게 다룰 수 있고 가장 작은 무한집합은 자연수 집합이다. 고등학교에서 다루는 (실)수열은 자연수 집합 N에서 실수집합으로 가는 함수이고 정적분의 정의와 관련된 무한급수의 합도 각 항을 가부번(denumerable) 더한 것으로 교과내용의 많은 부분이 자연수 집합과 관련이 있다. 무한 집

합이란 자신과 대등한 진부분 집합을 가지는 것으로, 중학교 교육과정에 나오는 배수나 제곱수, 정수인 계수를 가지는 이차방정식의해 등은 자연수 집합의 이러한 속성인 복제능력을 보여줄 수 있는 좋은 수학적 제재이다.

8단계에서는 직선상에서 연속적인 집합으로 나타나는 무한집합인 선분과 실수집합의 성질을 일차함수나 닮음변환을 이용해 다룰 수 있다. 즉, 모든 선분은 탄성 좋은 고무줄처럼 원하는 만큼 늘릴 수도 있고 줄일 수도 있으며 자신의 농도와 같은 진부분 집합을 원하는 개수만큼 만들어 낼 수 있다는 사실을 일차함수나 닮음변환을 이용해 확인할 수 있다. 8-가 단계에서 하나의 제안점은 순환무한소수를 다루는 단계에서 비순환 무한소수를 무리수로 도입한다면 일차함수나 일차방정식 해의 그래프가 연속인 직선으로 나타남을 설명하는데 무리가 없을 듯하다.

비순환 무한소수는 각 항을 유한 소수로 가지는 급수로 표현할 수 있으므로 잠재적 무한과 연결되고, 무리수는 이러한 급수의 합인 하나의 실수이므로 실제적 무한과 연관지울 수 있어 수학에서 아주 중요한 역할을 한다. 그러나 9단계에서 처음으로 다루게 되는 무리수는 그동안 유리수만을 다루어 온 습관 때문에 많은 경우에 논리적인 수로만 생각하고 직관적으로는 배제하는 경향이 많다. 유리수보다 훨씬 많이 존재하는 무리수들을 느끼고 직관적으로 받아들이기 위해서는 유용하게 사용되는 무리수들에 대한 탐구 활동이 뒤따라야 할 것이다.

무한 개념 발달의 역사가 보여주듯이, 아리스토텔레스 이래로 대부분의 수학자들은 실무한 개념을 거부하고 잠재적 무한 개념만을 인정하며 칸토어의 실무한 개념에 관한 새로운 정의를 받아들이기 어려워하였다. 무한 개념의 발달과정에서 나타나는 인식론적 장애는 학습자에게도 유사하게 나타날 것이므로 학교 수학에서 실무한 개념을 학습자에게 소개할 때는 학습자들이 가지고 있는 무한 개념에 관한 잘못된 사고를 파악해야 하며, 이를 극복할 수 있는 방안을 모색해야 한다. Cornu(1983)와 Robert(1982)의 연구결과에 의하면, 교사가 분명한 개념을 제시하기보다는 학생들이 자신이 가지고 있는 기존의 개념과 인식론적 장애를 반성하는 것이 더 중요하며, 학습 전에 학생들의 자생적인 아이디어, 개념 이미지, 직관, 경험 등을 자신이 깨닫게 하는 실험 활동이 학생 스스로가 지식과 이해를 구성할 수 있게 한다는 것이다.

현재 우리나라 중학교 교과내용은 직접적으로 무한 개념을 다루고 있지 않기 때문에 학생들이 자신의 무한 개념에 대해 반성적 추상을 할 기회를 가질 수 있으려면 교사가 수업 내용들을 직접 구성해야하는 어려움이 있으므로 이에 대한 교사의 의지가 우선적이다. 그러나 고등 수학적 사고에 무한 개념은 필수적으로 개입되므로 학습 지도 시 학생들에게 인식론적 장애를 가져오는 무한 개념의 속성과 학생들의 직관을 잘 이해하여 무한에 대한 올바른 인지 구조가 형성될 수 있도록 적절한 수업전략이 준비되어야 할 것이다.

본래 이 연구의 취지는 고등학교 수학에서 본격적으로 다루는 무한 개념과 연결된 수학적 내용을 학생들이 제대로 이해하기 위한 준비작업의 성격이 강하므로 후속 연구과제로 고등학교 교육과정에서의 무한개념 교육에 대한 개선방안이 뒤따라야 할 것이다. 그리고 앞에서도 언급했듯이 현행 중학교 교육과정이나 교과서에는 무한 개념에 초점을 맞추지 않기 때문에 교사들이 학생들의 무한개념 신장에 관심을 기울이지 않고 활용하지 않는다면 아무런 의미가 없다. 그리고 이러한 내용을 중학교 현장에서 교과내용으로 다루어보지 않았기 때문에 실제 교육에서 학생들과의 인지능력과 맞지 않을 수도 있다는 것이 이 연구의 제한점이라 할 수 있다.

참 고 문 헌

강미광 (2000). 연분수와 무리수에 관한 고찰, 한국수학사학회지, **13(2)**, pp.49-64.

강옥기 · 정순영 · 이환철 (2000). 중학교 수학 7-나, 서울: 두산.

김현정 (1990). 무한 개념의 수학교육학적 고찰, 서울대학교 석사학위논문.

류희찬 · 조완영 · 김인수 역 (Tall. D. 지음) (2003). 고등수학적 사고, 서울: 경문사.

박규홍 · 한옥동 · 김성국 · 임창우 · 고성군 · 김유태 · 윤상국 · 박재용 (2000). 중학교 수학 7-, 8-, 9-가, 나, 서울: 두레교육.

박선화 (1993). 무한 개념의 발달, 대한수학교육학회 추계발표대회 논문집, pp.383-403.

박용문 (2004). 중등교육과정에서 집합개념의 고찰, 동의대학교 석사학위논문.

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선 (2000). 중학교 수학 7-가, 서울: 디딤.

박임숙 (2000). 교사의 무한개념 이해도 조사 연구, 한국수학교육학회 시리지 A <수학교육>, **39(1)**, pp.37-47.

신현용 · 승영조 역 (Aczel, A. D. 지음) (2005) 무한의 신비, 서울: 승산.

이석종 (2005). 집합과 논리, 서울: 교우사.

이세진 역 (Luminet, J. P. & Lachièze-Rey, M. 지음) (2007). 무한-우주의 신비와 한계, 경기: 해나무.

이종우 (2000). 유한과 무한으로의 여행, 서울: 경문사.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은 (2000). 중학교 수학 7-가, 서울: 디딤.

전명남 (2003). 무한 개념이해 수준의 발달과 반성적 추상, 한국수학교육학회 시리지 A <수학교육> **42(3)**, pp.303-325.

허민 · 오혜영 역 (Eves H. 지음) (1994). 수학의 위대한 순간들, 서울: 경문사.

Cornu, B (1981). *Apprentissage de la notion de limite: Modeles spontages at modeles propres,* Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematical Education, pp.322-326.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages, *Journal of Mathematical Behaviour,* 5(3), pp.281-303.

Fischbein, E.. Tirosh, D. & Hess, P. (1979). The intuition of infinity, *Educational Studies in Mathematics* **10**, pp.3-40.

Fischbein, E., Tirosh, D. & Melamed, U. (1982). Is it possible to measure the intuitive acceptance of the mathematical statement?, *Educational Studies in Mathematics* **12**, pp.491-512.

Lin, Y. F. & Lin S. Y. (1974). Set Theory: An Intuitive Approach, Houghton Mifflin Company.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement superieur, *Recherches en Didactique des Mathematiques* **3**, pp.307-341.

Petty, J. A. (1996). *The role of reflective abstraction in the conceptualization of infinity and infinite processes,* Unpublished doctorial dissertation, Purdue University.

Staub, F. C. & Stern, E. (1997). Abstract reasoning with mathematical constructs, *International Journal for Educational Research,* **27(1)**, pp.63-75

Tall, D. & Schwarzenberger R. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching* **82**, pp.44-49.

Tirosh, D. (1985). The intuition of infinity and its relevance for mathematics education, Unpublished doctorial dissertation, Tel Aviv University, Israel.

Weeler, M. M. & Martin, G. (1988). *Explicit knowledge of infinity,* Proceedings of the 10th Annual meeting of the North American Chapter of PME, Northern Illinois University, Dekalb, Illinois, pp.312-318.

A Study on the instruction of the Infinity Concept with suitable examples
- focused on Curriculum of Middle School -

Kang, Mee Kwang
Dongeui University
E-mail: mee@deu.ac.kr

The purpose of this study is to suggest effective teaching methods on the concept of infinity for students to obtain the right concept in the middle school curriculum.

Many people have thought that infinity is something vouge and unapproachable. But, nowadays it is rather something with a precise definition that lies at the core of modern mathematics.

To understand mathematics and science very well, it is necessary to comprehend the concept of infinity. But students tend to figure out the properties of infinite objects and limit concepts only through their experience closely related to finite process, and so they are apt to have their spontaneous intuition and misconception about it. Since most of them have cognitive obstacles in studying the infinite concepts and misconception, mathematics teachers need to help them overcome the obstacles and establish the right secondary intuition for the concepts through good examples and appropriate explanation.

In this study, we consider the developing process of the concept of infinity in human history and give some comments and suggestions in teaching methods relative to that concept with new suitable examples.

* ZDM Classification : D43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Potential Infinity, Actual Infinity, Simple Continued Fraction