

# CAE 를 이용한 파워트레인의 가진력 해석

## Excitation Force Analysis of a Powertrain Based on CAE Technology

✉김성종<sup>1</sup>, 이상권<sup>1</sup>

✉Sung Jong Kim<sup>1</sup> and Sang Kwon Lee<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 인하대학교 기계공학과 (Department of Mechanical Engineering, Inha Univ.)

✉ Corresponding author: kimsungjong@hotmail.com, Tel: 032-860-8776

Manuscript received: 2008.3.21 / Revised: 2008.9.11 / Accepted: 2008.9.17

*The excitation force of a powertrain is one of major sources for the interior noise of a vehicle. This paper presents a novel approach to predict the interior noise caused by the vibration of the powertrain by using the hybrid TPA (transfer path analysis) method. Although the traditional transfer path analysis (TPA) is useful for the identification of powertrain noise sources, it is difficult to modify the structure of a powertrain by using the experimental method for the reduction of vibration and noise. In order to solve this problem, the vibration of the powertrain in a vehicle is numerically analyzed by using the finite element method (FEM). The vibration of the other parts in a vehicle is investigated by using the experimental method based on vibrato-acoustic transfer function (VATF) analysis. These two methods are combined for the prediction of interior noise caused by a powertrain. Throughout this research, two papers are presented. This paper presents a simulation of the excitation force of the powertrain exciting the vehicle body based on numerical simulation. The other paper presents a prediction of interior noise based on the hybrid TPA, which uses the VATF of the car body and the excitation force predicted in this paper.*

Key Words: FEM (유한요소해석), Mount Force Simulation (마운트 가진력 예측), EMA (실험적모드해석), Hybrid TPA (하이브리드 전달경로해석)

### 1. 서론

차량 진동 소음에 대한 기술이 발전함에 따라 소비자들의 승차감과 정숙성에 대한 욕구는 더욱 증가하고 있으며, 진동 소음 성능은 차량 성능을 파악하는 중요한 요소가 되고 있다. 이에 따라, CAE 기술은 차량 NVH 개발 단계에서 매우 유용하게 이용되고 있다.<sup>1,4</sup> NVH 성능 향상을 위한 CAE 기술의 이점은 차량 개발 기간을 단축하고 해석적 기법을 이용한 성능 예측을 가능하게 하였지만, 이러한 수치해석적인 방법은 다양한 오차를 동반하고 있다. 최근에는 이러한 오차를 줄이고자

해석적 방법에 동역학 모델을 이용한 방법이 활용되고 있다.

차량 실내에서 발생하는 소음의 원인으로는 파워트레인, 타이어, 공력, 흡배기 등과 같이 매우 다양한데, 그 중, 가장 큰 영향을 끼치는 것은 파워트레인(엔진 및 변속기)이라 할 수 있다. 이 파워트레인에 의해 발생하는 실내 소음은 크게 두 가지로 나눌 수 있는데, 첫째는 공기기인 소음(airborne noise)으로 파워트레인 자체에서 방사되는 소음이 공기를 매개로 하여 실내로 유입되는 것을 뜻하며, 차량에 흡차음재를 보강함으로써 비교적 쉽게 저감할 수 있다. 둘째는 구조기인 소음

(structure-borne noise)으로 파워트레인, 엔진 마운트 및 차체가 서로 연관되어 나타나기 때문에 매우 복잡한 양상을 가지고 있다. 그 동안 구조기인에 의한 차량 실내 소음을 예측하기 위해 실험에 의존한 전달 경로 해석법(TPA)을 이용하였는데, 이 방법은 차량 실내 소음 저감을 위한 파워트레인의 구조 변경 등과 같은 대책마련에 어려움이 있다. 또한, 구조 기인에 의한 소음을 해석적인 방법만을 이용해 정확하게 예측하는 것도 어려운 일이다.<sup>5-7</sup> 최근에는 이러한 문제를 극복하고자 차체 서브프레임이나 서스펜션 설계에 시험과 해석적 방법이 결합된 Hybrid CAE 기법이 이용되고 있다.<sup>8</sup>

본 연구에서는 파워트레인의 구조 진동에 의해 발생하는 실내 소음을 예측하기 위해 실험적 전달 경로 해석법(TPA)과 CAE 기술을 접목한 Hybrid TPA 를 이용하기로 한다. 파워트레인 자체의 진동 특성과 파워트레인 마운트에서 차체로 입력되는 가진력을 CAE 기술을 이용하여 예측하며, 이를 차량 주행 시험을 통해 파워트레인 마운트에서 측정된 진동 특성과 비교 검증하였다. 이 가진력에 의해 차체에서 발생하는 진동에너지는 실내 소음으로 발생하는데, 파워트레인 유한 요소 모델을 이용하여 예측한 파워트레인 가진력과 차체의 구조-음향 전달 함수(VATF: vibro-acoustic transfer function)의 곱(multiplication)으로 실내 소음을 예측할 수 있다. 여기서, 구조-음향 전달 함수는 시험 차량의 음향 공동 모드와 차체 진동 특성 사이의 연성 특성을 나타내는데, 음향학적 상반원리(acoustic reciprocity)를 이용해 측정한다.

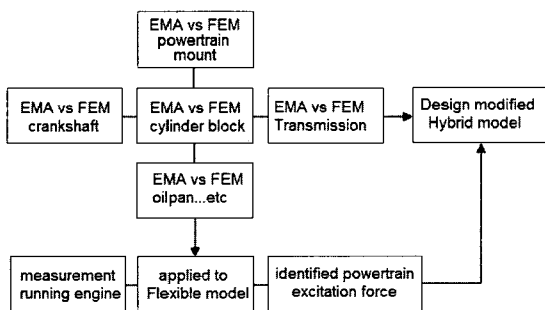


Fig. 1 Flow chart for prediction of the excitation force mount points of powertrain

본 논문에서는 차량의 구조-음향 특성과 가진력의 곱으로 얻어지는 소음 예측에 대한 첫 번째

연구로써, CAE 기술을 이용한 파워트레인 마운트에서의 가진력을 예측하는 것에 중점을 두고 있다. 이 CAE 기술은 파워트레인의 다물체 동역학(multibody dynamic analysis) 해석과 유한요소 해석법(finite element analysis)을 이용하였다. Fig. 1 은 파워트레인의 마운트에서 가진력을 예측하기 위한 본 연구의 흐름도를 나타내고 있다.

## 2. 파워트레인 진동 측정 기본 시험

파워트레인의 진동 특성을 파악하기 위한 첫 번째 시험은 파워트레인의 유한요소 모델의 모달 변수(modal parameter)를 규명하기 위한 파워트레인 자체의 실험적 모드 해석(EMA: experimental modal analysis)이고, 두 번째 시험은 파워트레인의 실제 작동중의 진동 측정 시험이다. 이 시험 결과들은 CAE 를 이용한 파워트레인의 해석 모델의 예측 결과 검증에 이용된다. 시험에 사용한 파워트레인은 직렬 4 기통 2,200cc 디젤엔진과 자동 5 단 변속기로 구성되어 있으며, 동일한 파워트레인을 탑재한 SUV(sports utility vehicle)를 엔진 회전 수 1000rpm 부터 4000rpm 까지 가속하여 주행 시험을 수행하였다.

### 2.1 파워트레인 실험적 모드해석

파워트레인의 실험적 모드 해석은 Fig. 2 와 같이, 결합된 파워트레인을 free-free 상태로 시험대에 고정하고, MB Dynamic 사의 model Modal 50A 를 이용하여 가진하여 80 개 지점의 진동 가속도를 B&K model 4506 3 축 가속도계를 이용하여 측정하였다.



Fig. 2 Setup for the powertrain and sensors for experimental modal analysis of powertrain

또한 Fig. 3 과 같이 실린더 블록, 베드 플레이트, 오일팬, 변속기 등과 같은 파워트레인 단품의 모드 해석을 별도로 수행하였으며, ENDEVCO model 2302 임팩트 해머를 이용하여 가진하였다. 그리고 공진 주파수(natural frequency), 모드 형상(mode shape), 모드 감쇠(modal damping)와 같은 모달 변수를 추출하기 위해 LMS TEST.LAB S/W 를 이용하였다. 이 모드 해석의 결과는 3.2 장의 파워트레인 유한요소 모델의 검증에 사용된다.

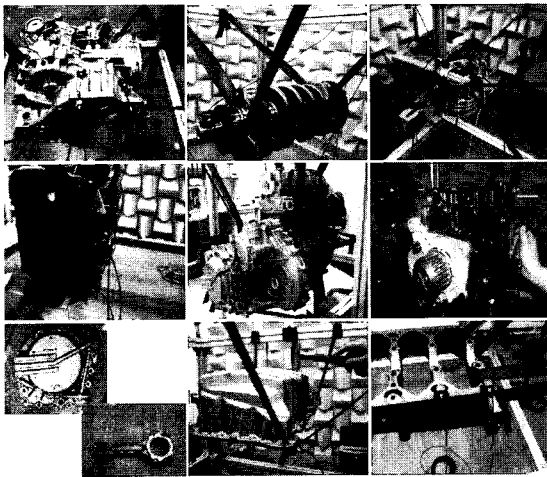


Fig.3 Setup for the powertrain and sensors for experimental modal analysis of powertrain components

## 2.2 파워트레인 마운트에서의 진동 측정

파워트레인 유한요소 모델을 이용한 가진력 예측 결과를 검증하기 위해서는 실제 차량 주행 중 파워트레인의 마운트 위치에 작용하는 가진력이 필요하다. 그러나 이 가진력을 실험을 통해 직접적으로 측정하기란 매우 어렵기 때문에, 파워트레인 마운트 위치에서 가속도를 측정하여 비교하였다. Fig. 4 와 같이 ENDEVCO model 65-10 가속도계를 각 마운트(E/G mount, F/R mount, R/R mount, T/M mount) 브라켓 전, 후에 부착하여 진동 가속도를 측정 후, 5 장에서 동역학 모델의 가속도 예측 결과와 비교 및 검증하였다.

## 3. 파워트레인 유한 요소 모델

### 3.1 파워트레인의 Geometry 모델

파워트레인의 진동 특성을 해석적인 방법으로 예측하기 위해서는 파워트레인 유한 요소 해석(FEA) 결과를 실험적 모드 해석(EMA) 결과와 비교하여 검증한다. 실제 진동 특성을 가진 유한 요소 모델은 MSC/ADAMS 에서 가진력 계산을 위한 동역학 해석에 사용한다. 여기서, 유한 요소 모델 제작에 필요한 파워트레인의 제원은 table 1 과 같다.

먼저, 파워트레인 유한요소 모델 제작을 위해서는 geometry 모델이 필요한데, 본 연구를 위해 사용한 파워트레인과 그 단품에 대한 geometry 모델은 실린더 블록, 실린더 헤드, 베드플레이트, 크랭크 샤프트, 오일팬, 변속기 하우징 등으로 구분하여 Fig. 5 와 같이 구성하였으며, 다양하고 복잡한 단품의 형상을 3-D 설계툴(design tool)인 CATIA S/W 를 이용하여 설계하였다.

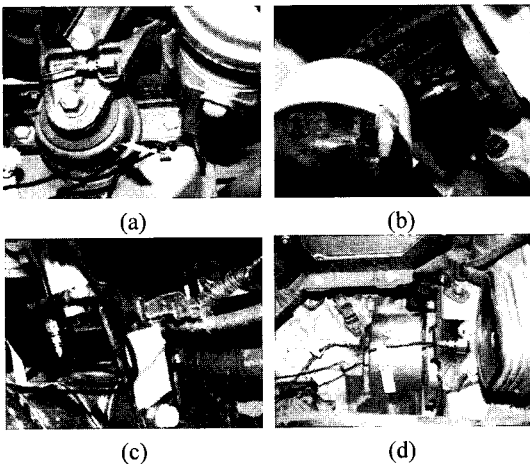


Fig. 4 Setup of acceleration sensors for the measurement of acceleration at the mounts of powertrain: (a) Engine mount (b) Front roll mount (c) Rear roll mount (d) Transmission mount

Table 1 Specification of the powertrain

Powertrain	Specification
Displacement	2.2 L
Number of cylinder	4
Type of Fuel	Diesel
Balance shaft	Lanchester type
Transmission	Automatic
Vehicle type	SUV

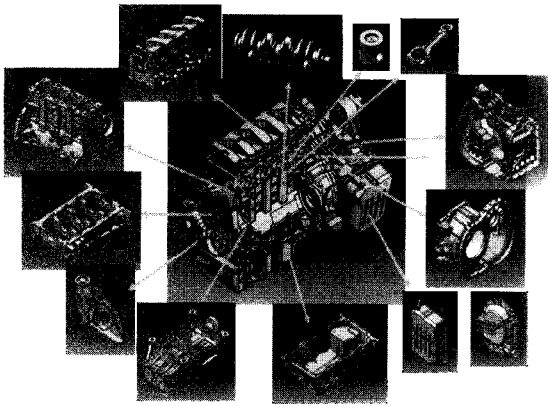


Fig. 5 Geometry models of all components of the test powertrain

### 3.2 파워트레인의 유한요소 모델

파워트레인의 geometry 모델을 MSC/PATRAN 을 이용하여 유한요소 모델로 구성하였다. Fig. 6 과 같이 파워트레인 유한요소 모델은 실린더 블록, 실린더 헤드, 베드플레이트, 오일 팬, 크랭크 샤프트, 변속기 하우징 등으로 구성되어 있으며, 1, 2, 3 차원의 유한요소 모델로 구성하였다. 각 부품들은 주로 RBE2(rigid body element 2)로 연결하였으며, 변속기 기어 등과 같은 부품은 질량과 질량관성을 가진 집중 질량으로 모델링하였다. 또한 베어링은 강성과 댐핑을 가진 모델로 구성하여 파워트레인의 전체 모델을 완성하였다. 유한요소 모델을 구성하기 위한 요소의 수와 종류는 table 2 와 같으며, 파워트레인의 유한요소 해석은 MSC/NASTRAN sol

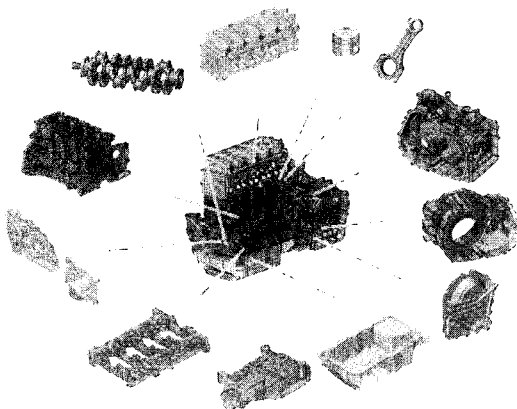


Fig. 6 Finite element models of all components of the test powertrain

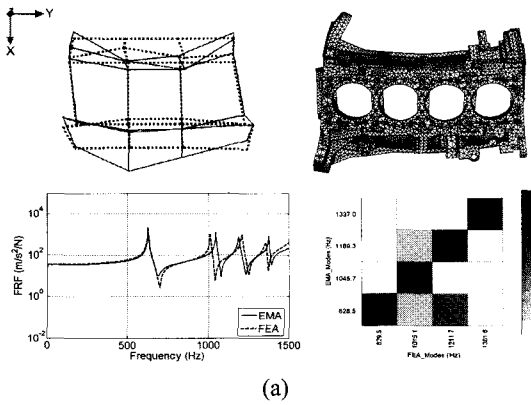
103 과 sol 111 을 이용하여 공진주파수, 모드형상, 모드댐핑을 추출하였다.<sup>9</sup> 시험적 모드해석 결과와 해석적 모드 해석 결과는 MAC(modal assurance criterion) 해석을 통해 검증하였는데, MAC 해석은 진동 시스템의 고유 벡터의 일치성을 평가하는 방법으로서 두 벡터 사이의 자유도 요소의 성분을 이용한다.<sup>10</sup> 만약 두 고유벡터가 같은 방향(동일한 고유벡터)인 경우는 MAC 값은 1 이 되고, 직교 한다면 이들의 MAC 값은 0 이 된다. 두 고유 벡터로부터 MAC 값은 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$MAC_{i,j} = \frac{|\{\Phi_{TEST}\}_i^T \{\Phi_{FEM}\}_j|^2}{[\{\Phi_{TEST}\}_i^T \{\Phi_{TEST}\}_j] [\{\Phi_{FEM}\}_i^T \{\Phi_{FEM}\}_j]} \quad (1)$$

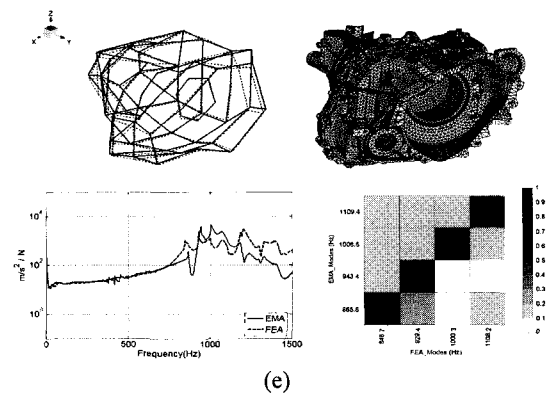
여기서,  $\Phi$ 는 진동 시스템의 각 공진 주파수 대역에서의 모드 형상(mode shape) 을 나타내는 고유 벡터이다. 파워트레인 단품의 시험적 모드 해석(EMA)과 유한요소 모드 해석(FEA) 결과를 table 3 에 비교하였는데, MAC 은 각 모드에서 0.7 이상의 값을 나타내고, 공진 주파수의 오차는 약 7%이내로 실험적 모드 해석과 해석적 모드 해석의 결과의 충분한 상관성을 확보하였다. 또한, Fig. 7 은 파워트레인 단품에 대한 두 모드 해석 결과의 모드 형상, 주파수 응답 함수, MAC 을 나타내며, Fig. 8 은 단품을 결합한 파워트레인의 모드 해석 결과를 나타낸다. 따라서 파워트레인 유한요소 모델은 실제의 진동 특성을 잘 나타내고 있음을 알 수 있다.

Table 2 Element specification for the FE model of powertrain

Component	No. of Node	No. of Element	Model Type
Engine block	41,860	129,772	Tetra4, RBE2
Bedplate	12,540	49,411	Tetra4, RBE2
Crankshaft	5,931	22,931	Tetra10, RBE2
Oilpan	2,857	954	Hexa, RBE2
Transmission	54,356	195,825	Tetra4, RBE2
Assemble Powertrain	144,161	536,912	Tetra4, 10 Hexa, RBE2

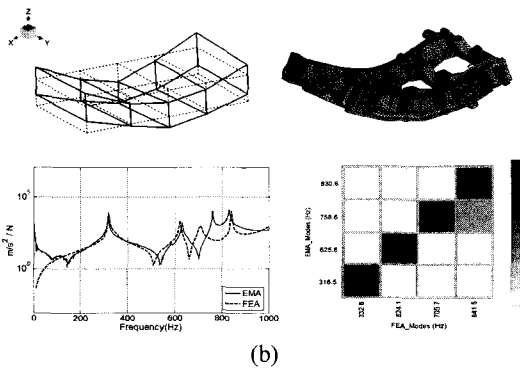


(a)

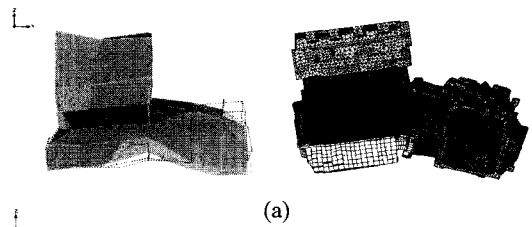


(e)

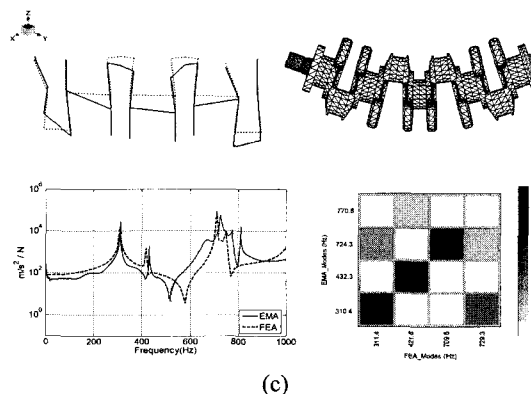
Fig. 7 Results of the modal analysis obtained by using EMA and FEM: (a) cylinder block (b) bed plate (c) crankshaft (d) oil-pan (e) transmission housing



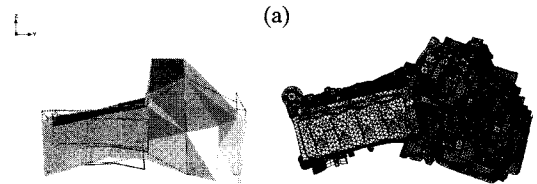
(b)



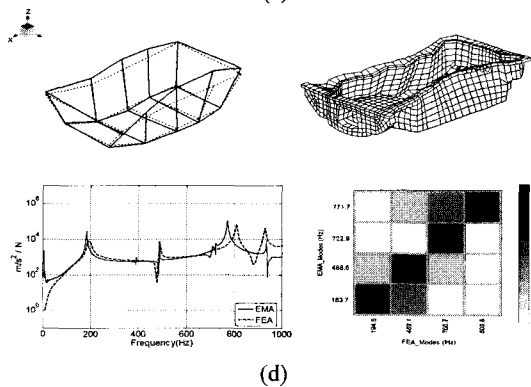
(a)



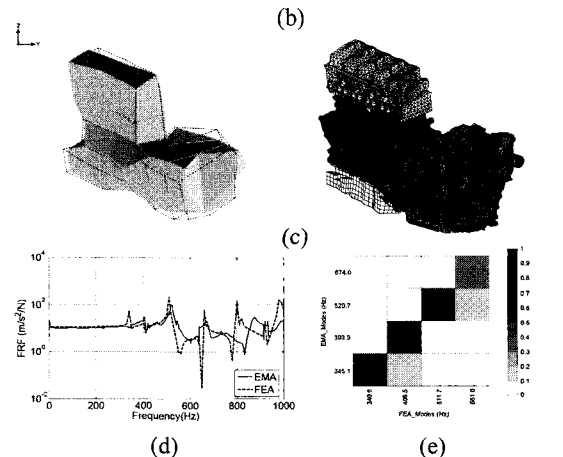
(c)



(b)



(d)



(d)

(e)

Fig. 8 Results of the modal analysis obtained by using EMA and FEM (a) 1st mode shape (b) 2nd mode shape (c) 3rd mode shape (d) comparison of FRF (e) MAC value

Table 3 Comparison of natural frequency for components of powertrain

Component	Mode shape	EMA (Hz)	FEA (Hz)	MAC	Error (%)
engine block	1	627.8	629.5	0.94	0.27
	2	1,045.7	1,015.1	0.92	2.93
	3	1,377.0	1,361.6	0.76	1.12
bed plate	1	316.3	332.6	0.95	5.15
	2	625.6	621.1	0.91	0.72
	3	758.6	705.1	0.89	6.97
crank-shaft	1	310.4	311.8	0.86	0.45
	2	432.3	421.5	0.73	2.50
	3	724.0	709.3	0.70	2.03
oil pan	1	183.7	194.6	0.92	5.93
	2	488.6	489.1	0.90	0.10
	3	722.9	766.7	0.80	6.06
transmission	1	865.8	846.7	0.90	2.21
	2	943.4	929.4	0.86	1.48
	3	1,006.5	1,000.3	0.81	0.62
assembled Powertrain	1	345.1	340.6	0.75	1.29
	2	393.9	406.5	0.75	3.20
	3	520.7	511.7	0.80	1.73

#### 4. 파워트레인 가진력 예측

##### 4.1 엔진 구동을 위한 유한요소 모델의 결합

유한요소 모델을 이용한 엔진 가진력 예측을 위해서는 앞 절에서 설명한 파워트레인의 유한요소 모델을 다물체 동역학 해석 S/W 인 MSC/ADAMS 에서 사용할 모델로 변환해야 한다. 파워트레인 단품의 동역학 모델은 Fig. 9 와 같이 다양한 연결방법과 구속조건으로 결합되는데,<sup>11</sup> 이 연결방법은 MSC/ADAMS S/W 의 fixed joint, bushing joint, revolute joint, coupler joint 등을 사용하였으며, 파워트레인의 동역학 해석을 통해 4 개의 마운트에서의 진동 가속도와 가진력을 예측하였다.

##### 4.2 동역학 해석 이론

실린더 내에서의 연소에 의한 파워트레인의 주된 힘은 혼합기의 연소에 따른 연소힘에 발생하며, 이 연소힘은 피스톤과 크랭크 샤프트로 전달 되어 메인 베어링을 통해 실린더 블록으로 전달된다.

따라서, 엔진 연소에 의한 주된 힘은 연료 폭발에 따른 연소힘과, 피스톤과 커넥팅 로드와 관성질량의 불균형에 따른 관성력으로 나눌 수 있다.

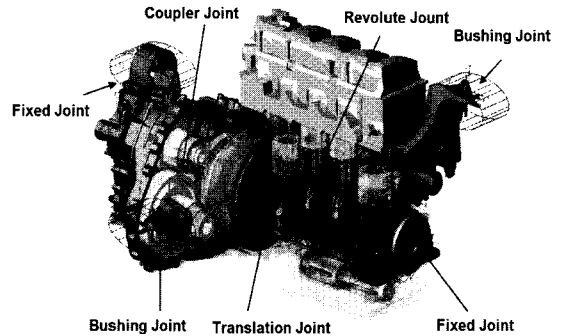


Fig. 9 Boundary condition for the assemble of the powertrain components

##### 4.2.1 엔진 연소력

실린더 내에서의 연소압에 의한 가진력은 부록 A1 과 같이 계산되는데, 실린더 압력은 토크로부터 계산되며, 수학적 표현은 식(2)와 같다.

$$T_p = pA_p R \tag{2}$$

여기서,  $p$  는 실린더 압력,  $A_p$  는 피스톤의 단면적,  $R$  은 크랭크 샤프트의 회전 반경을 나타낸다. 따라서 연소힘은 실린더 압력과 피스톤의 면적의 곱으로 계산되고, 이 힘은 실린더 블록, 크랭크 트레인 등을 통해 파워트레인 마운트 브라켓으로 전달된다.

##### 4.2.2 엔진 관성력

내연기관의 작동원리에 따라 움직이는 단품에 의해 발생하는 관성력은 부록 A2 와 같이 계산되며, 한 개의 실린더에서 발생하는 불균형 관성력은 식(3)과 같이 계산된다.

$$F_a = M_p \Omega^2 R (\cos \theta + \frac{R}{L} \cos 2\theta) \tag{3}$$

여기서,  $Z = M_p \Omega^2 R$  라 하면, 관성력은 식(4) 와 같이 표현할 수 있다.

$$F_a = Z(\cos\theta + \frac{R}{L}\cos 2\theta) \quad (4)$$

따라서, 직렬 4 기통 엔진의 경우, 각 실린더의 위상차에 따라 불균형력의 합은 식(5)와 같이 계산 된다.

$$F_a = 4Z\frac{R}{L}\cos 2\theta \quad (5)$$

일반적으로 이 불균형력을 상쇄시키기 위해 밸런스 샤프트(balance-shaft)가 적용되는데, MMC Type 과 Lanchester Type 이 있다.<sup>12,13</sup> MMC Type 은 상하로 작용하는 불균형 힘과 모멘트를 줄이기 위함이고, Lanchester Type 은 불균형력만을 상쇄시킨다. 본 연구에 사용된 파워트레인은 Lanchester Type 의 밸런스 샤프트가 사용되었는데, 불균형력에 기인한 모멘트(rolling, pitch, yawing moment)는 제거되지 않고 여전히 작용하고 있음을 알 수 있다.

4.2.3 가진력 예측

파워트레인의 마운트에 작용하는 가진력은 유한요소 모델을 이용하여 MSC/ADAMS 의 동역학 해석을 통해 계산되는데, Fig. 10 과 같은 결과를 보여 주고 있다. Fig. 10 의 가진력은 엔진 회전수가 3000rpm 일 때, 각 마운트에 작용하는 가진력으로 E/G 마운트에서 가장 크게 작용하고 있음을 알 수 있다.

5. 동역학 모델의 검증

ADAMS 를 이용한 Fig. 10 의 가진력 해석 결과를 차량 주행 시험을 통해 검증하였다. 가진력을 직접적으로 측정하기는 매우 어렵기 때문에, 마운트에서의 가속도를 측정하여 예측된 가속도와 비교하였다. Fig. 11 은 동역학 해석을 통한 예측 결과로써, 파워트레인이 3000rpm 으로 작동 중일 때, 변위(displacement)와 가속도(acceleration)를 나타낸다. Fig. 12 는 주파수 영역에서 마운트에서의 변위값의 측정치(실선)와 예측치(점선)를 비교한 것인데, 예측 결과가 매우 일치함을 확인할 수 있다. 약간의 오차는 엔진의 메인 베어링의 강성과 뎀핑, 그리고 마찰력에 기인한 것으로 판단된다. 또한, 파워트레인이 복잡하고 다양한 단품의 결합에 의한 연결 방식 때문인 것으로 판단된다.

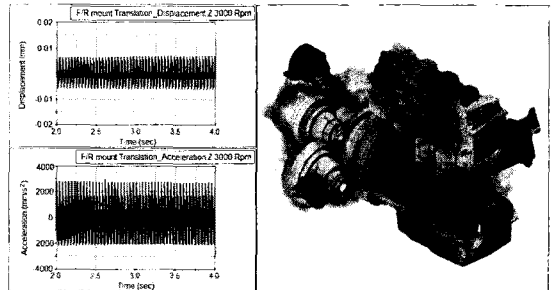


Fig. 11 Displacement and acceleration obtained by the numerical simulation at the front roll mount of the powertrain

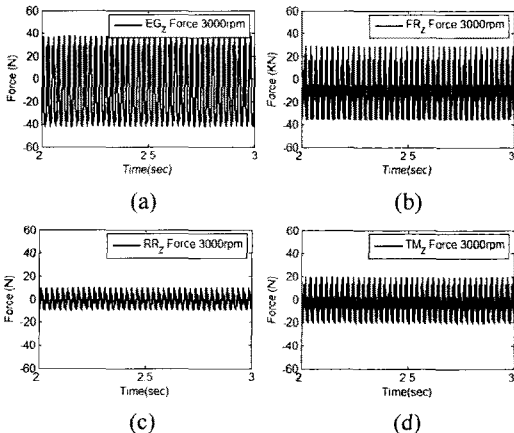


Fig. 10 Excitation force simulated by CAE technology at each mount points: (a) E/G mount (b) F/R mount (c) R/R mount (d) T/M mount

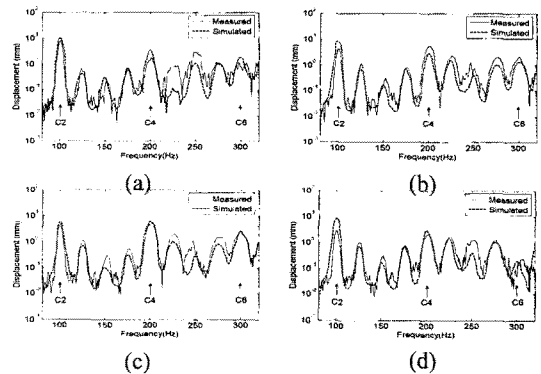


Fig. 12 Comparison between the measured displacement and the simulated displacement at four mount: (a) E/G mount (b) F/R mount (c) R/R mount (d) T/M mount

## 6. 결론

Hybrid TPA 기법을 이용한 파워트레인의 구조기인에 의한 실내 소음을 예측함에 있어 차체 가진력을 정확히 파악하는 것은 매우 중요하다. 본 논문에서는 파워트레인의 진동 전달 경로에서 마운트 브라켓에 작용하는 변위, 가속도, 힘을 유한요소 모델과 동역학 모델과 같은 CAE 기술을 이용하여 예측하였다. 또한, 유한 요소 해석 모델의 높은 정확성을 검증하기 위해 파워트레인 단품을 실험적 모드 해석(EMA)을 통한 진동 특성과 비교하였으며, 시험 차량의 4 개의 파워트레인 마운트에서의 진동값을 측정하여 변위(displacement) 예측치와 비교하였다. CAE 기술을 이용한 가진력 해석 결과는 주행 시험을 통해 측정된 결과와 매우 유사한 경향을 보이고 있으며, 이런 높은 정확성을 가진 가진력 예측 결과는 Hybrid TPA 기술을 이용한 파워트레인의 구조기인 소음 예측을 위한 입력값으로 적용된다.

## 후 기

본 연구는 산업자원부 자동차기반기술개발사업의 핵심기반기술개발인 ‘파워트레인 진동 소음 시뮬레이션 기반기술개발(과제번호 : 100223237)’의 지원으로 수행되었으며, 이에 감사드립니다.

## 참고문헌

1. Winterer, S. and Bretl, J., “Efficient design studies using eigensolution reanalysis,” SAE Paper No. 931297, 1993.
2. Shung, H. S. and Donald, J. N., “Assessment of a Vehicle Concept Finite-Element Model for Predicting Structural Vibration,” SAE Paper No. 2001-01-1402, 2001.
3. Lalor, N. and Priebsch, H. H., “The prediction of low- and mid-frequency internal road vehicle noise: a literature survey,” Proc. Instn. Mech. Engrs.(D), Vol. 221, No. 3, pp. 245-269, 2007.
4. Kim, S. J., Lee, J. Y. and Lee, S. K., “Noise Refinement of a Vehicle by Reduction of the Axle Gear Whine Noise Based on Structural Modification Using FEM and BEM,” Int. J. Automotive Technology, Vol. 8, No. 5, pp. 605-614, 2007.

5. Seki, Y., Suzuki, T., Tsukahara, M. and Takahashi, Y., “How to Predict powertrain vibration at the engine mounting points under running conditions,” SAE Paper No. 2001-01-1592, 2001.
6. Auweraer, H. V., Mas, P., Dom, S., Vecchio, A., Janssens, K. and Ponsele, P. V., “Transfer path analysis in critical path of vehicle refinement: the role of fast, hybrid and operational path analysis,” SAE Paper No. 2007-01-2352, 2007.
7. Lee, S. K., “Identification of a vibration transmission path in a vehicle by measuring vibrational power flow,” Proc. Instn. Mech. Engrs.(D), Vol. 218, No. 2, pp. 167-175, 2007.
8. Sakai, T. and Sakamoto, A., “Improvement of engine noise for the 2003 Accord using hybrid CAE technology,” SAE Paper No. 2003-01-1427, 2003.
9. Blakely, K., “Updating MSC/NASTRAN Models to Match Test Data,” The MSC 1991 World Users' Conf., Proc., Vol. 2, No. 50, 1991.
10. Walter, O. and Kaiser, H. J., “Finite Element Analysis of Dynamic Behavior of an Engine Block and Comparison with Experimental Modal Test Results,” MSC World 1990 World Users Conf., Proc., Vol. 1, No. 14, 1990.
11. Yi, S. J. and Seo, J. M. “Powerflow simulation software of the automotive powertrain through the combination of the component(I):Development of the automatic powerflow generation module,” J. of KSPE, Vol. 21, No. 2, pp. 43-51, 2004.
12. Huegen, S., Warren, G., Menne, R., Wolschendorf, J., Schwaderlapp, M. and Schoenherr, C., “A new 2.3L DOHC engine with balance shaft housing-step of refinement and optimization,” SAE Paper No. 970921, 1997.
13. Nakamura, H., “A low vibration engine with unique count-balance shafts,” SAE paper No. 760111, 1976.

## 부록

### 기호설명

$F_a$	inertia force acting on
$M_a$	reciprocating mass
$T_p$	torque due to gas pressure
$p$	gas pressure



- $V$  volume
- $A_p$  piston area
- $\ddot{S}$  piston acceleration
- $\Omega$  crankshaft angular frequency (=  $2\pi N$ )
- $R$  center of crankshaft to center of crankpin
- $L$  center of crankpin to center of piston pin
- $\theta$  crank angle, referred to reference cylinder axis
- $\phi$  connecting-rod axis to cylinder axis
- $Z$  inertia force ( $= -M_p \Omega^2 R$ )

**A1. 엔진 가진력**

피스톤에 의한 일이 크랭크 샤프트의 일과 같다고 가정하면, 식(2)는 식(A1), (A2)와 같다.

$$pdv = T_p d\theta \tag{A1}$$

$$T_p = pA_p \frac{ds}{d\theta} = pA_p \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = pA_p \frac{\dot{s}}{\Omega} \tag{A2}$$

여기서,  $S$  는 피스톤이 움직인 거리로써, 식(A3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$S = R(\cos \theta + \frac{\ell}{R} \cos \phi) \tag{A3}$$

피스톤의 속도는 변위를 미분하여 얻을 수 있는데, 식(A4)와 같다.

$$\frac{\dot{S}}{\Omega} = -R(\sin \theta + 2a_2 \sin 2\theta + 4a_4 \sin 4\theta + \dots) \tag{A4}$$

여기서,  $a_2 = \frac{L}{R} a'_2$  와  $a_4 = \frac{L}{R} a'_4$ , 그리고

$$a'_2 = \left[ \frac{1}{4} \left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{R}{L}\right)^4 + \frac{15}{512} \left(\frac{R}{L}\right)^6 + \dots \right] \tag{A5}$$

$$a'_4 = - \left[ \frac{1}{64} \left(\frac{R}{L}\right)^4 + \frac{3}{256} \left(\frac{R}{L}\right)^6 + \dots \right] \tag{A6}$$

이고, 식(A5), (A6)을 식(A4)에 대입하면, 다음과 같이 식(A7)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & (\sin \theta + 2a_2 \sin 2\theta + 4a_4 \sin 4\theta + \dots) \\ &= \sin \theta + 2 \left[ \frac{1}{4} \left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{16} \left(\frac{R}{L}\right)^3 + \frac{15}{512} \left(\frac{R}{L}\right)^5 + \dots \right] \tag{A7} \\ &+ 4 \left[ \frac{1}{64} \left(\frac{R}{L}\right)^3 + \frac{1}{256} \left(\frac{R}{L}\right)^5 + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

여기서,  $\frac{R}{L} < 0.33$ ,  $\left(\frac{R}{L}\right)^2 < 0.11$ 이다.

식(A2)와 식(A4)의 최대토크는  $\theta = 90^\circ$  일 때와  $(\sin \theta + 2a_2 \sin 2\theta + 4a_4 \sin 4\theta + \dots) = 1$  일 때, 발생하며, 식(A8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_p = (-) pA_p R \tag{A8}$$

따라서, 최대 토크로부터 실린더의 가스압력을 계산할 수 있다.

**A2. 엔진 관성력**

내연기관의 실린더 내에서의 관성력은 500 Hz 이하의 주파수 영역에서 크랭크 샤프트에 발생하는 주된 힘만을 고려하여 계산되는데, 이 때, 피스톤 슬랩이나 밸브계에서의 충격력 등은 고주파수 영역에서 나타나기 때문에 무시할 수 있다. 따라서 관성력은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_a &= M_p \ddot{S} = -M_p \Omega^2 R (\cos \theta + \frac{R}{L} \cos 2\theta) \\ &= Z (\cos \theta + \frac{R}{L} \cos 2\theta) \tag{A9} \\ &= Z \cos \theta + Z \frac{R}{L} \cos 2\theta \end{aligned}$$

식(A9)의 첫번째 항은 크랭크 샤프트의 회전에 따른 관성력의 1 차 오더 성분이고, 두번째 항은 관성력의 2 차 오더 성분이다. 따라서, 직렬 4 기통 엔진의 관성력은 4 개의 각 실린더의 위상 (phase) 를 고려하여 계산되어 하며, 식(A9)를 이용하여 식(A10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum F_a = Z(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3 + \cos\theta_4) \quad (A10)$$

$$+ Z\frac{R}{L}(\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2 + \cos 2\theta_3 + \cos 2\theta_4)$$

여기서, 각 4 개의 실린더의 위상차는  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 로 표현할 수 있으며, 1 차 오더 성분의 위상차는  $\theta_2 = \theta_1 + \pi, \theta_3 = \theta_1 + 2\pi, \theta_4 = \theta_1 + 3\pi$  으로 표현할 수 있다. 그리고 2 차 오더성분의 위상차는  $2\theta_2 = 2(\theta_1 + \pi), 2\theta_3 = 2(\theta_1 + 2\pi), 2\theta_4 = 2(\theta_1 + 3\pi)$  으로 나타낼 수 있다. 따라서 이 위상차를 식(A10)에 대입하면, 최종적인 관성력은 식(A11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_a = 4Z\frac{R}{L}\cos 2\theta_1 \quad (A11)$$

따라서, 2 차 오더 성분의 관성력이 지배적으로 나타나며, 최근 대부분의 직렬 4 기통 엔진의 경우가 불균형력을 제거하기 위해 밸런스 샤프트를 탑재하고 있다. 그러나 파워트레인의 무게 중심이 크랭크 샤프트와 동일한 축 상에 있지 않아 불균형력이 여전히 존재하기 때문에, 파워트레인이 진동하게 된다.<sup>A1</sup>

### 부록참고문헌

- A1. Taylor, C. F., "The Internal Combustion in Theory and Practice. Vol. 2," MIT press, pp. 240-305, 1968.