

Wavelet Transform을 이용한 충격력을 받는 회전하는 외팔 보의 진동 특성 해석

Vibration Analysis of a Rotating Cantilever Beam Undergoing Impulsive Force Using Wavelet Transform

박 호 영* · 유 흥 희†

Ho Young Park and Hong Hee Yoo

(2008년 7월 29일 접수 ; 2008년 9월 25일 심사완료)

Key Words : Rotating Cantilever Beam(외팔보), Rotational Motion(회전운동), Impulsive Force(충격력), Transient Vibration Analysis(과도진동 해석), Wavelet Transform(웨이블릿 변환)

ABSTRACT

The vibration characteristics of a rotating cantilever beam undergoing impulsive force are investigated using wavelet transformation. The transient response induced by the impulsive force and the rigid body motion of the beam are calculated using hybrid deformation variable modeling along with the Rayleigh-Ritz assumed mode methods. The vibration characteristics of the beam can be analyzed in time-frequency domain with the wavelet transform method. Therefore, the effects of the impulsive force on the transient vibration characteristics of the beam can be investigated more effectively.

1. 서 론

회전 구조물들은 작동 중 때때로 충격력을 받는 경우가 발생하며 이때 순간적으로 과도한 변위나 응력이 발생할 수 있으므로 결과적으로 그 수명이 큰 영향을 받을 수 있다. 따라서 회전운동을 하는 구조물의 충격력에 의한 과도진동 특성의 규명 및 설계를 위한 연구는 필수적이며 이러한 작업들을 효과적으로 수행하기 위한 모델링들을 개발하고 해석을 수행하여 주요 특성들을 밝히려는 노력이 필요하다고 사료된다.

회전운동을 하는 구조물의 진동특성에 관련된 연구는(참고문헌(1,2) 참조) 블레이드형 구조물에 대

해 시작되었으며, 좀 더 최근의 연구결과로는 복합 변형변수를 이용한 보 구조물의 동적 해석에 관한 연구들을 참고문헌(3~6)에서 참조할 수 있다. 한편, 충격해석에 관한 연구로는 고정된 구조물에 대한 해석이 주류를 이루고 있다⁽⁷⁻⁹⁾. 그런데 회전 운동을 하는 외팔 보 구조물들은 작동 중에 충격력을 받을 수 있으며 이 경우 발생하는 변위나 응력이 어느 한도를 넘지 않도록 설계되어야 한다. 그러므로 강제 운동에 의한 강성 변화 효과와 충격력을 동시에 고려한 외팔 보 구조물의 과도 응답 변화를 예측하기 위한 연구가 필요하다. 최근 Lim 등은⁽¹⁰⁾ 회전운동을 하는 외팔 보가 충격력을 받는 경우 그 동적 특성을 파악하기 위한 모델링 방법을 제시하였고, 이에 근거하여 충격 위치와 회전 각속도에 따른 동적 반응 변화에의 영향을 분석하였다. 그러나 이 연구에서는 진동 해석에 푸리에 변환방법(Fourier transform) 사용하여 충격 후 발생하는 시간에 따른 과도적인 진동 특성 변화에 대해서는 분석이 불편한

† 교신저자 : 정희원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr

Tel : (02)2220-0446, Fax : (02)2293-5070

* 정희원, 한양대학교 대학원 기계공학부

한계를 가지고 있다. 이 연구에서는 참고문헌 (10)에서 제안된 해석모델에 웨이블릿 변화방법을 사용하여 충격 후 발생하는 과도 진동특성 변화에 대해 분석해 봄으로써 기존의 연구결과보다 정확하게 충돌 후 발생하는 시스템 진동 특성을 분석을 하는데 연구목표를 두고 있다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어서 다음 절에서는 충격력을 받는 회전하는 외팔 보의 모델링 과정을 설명한 후에 3절에서는 웨이블릿 변환(wavelet transform) 이론에 대해서 설명하였다. 다음 4절에는 웨이블릿 변환(wavelet transform)을 이용하여 충격 위치 변화에 따른 외팔 보의 진동 특성 변화에 관한 해석결과를 수록하고 주요 의미들을 논의하였다. 마지막 절에서는 이 논문에서 얻어진 핵심적인 결과들을 요약하고 주요 결론을 수록하였다.

2. 운동 방정식 유도

Fig. 1은 임의의 충격력을 받는 길이 L 인 외팔 보를 보여준다. 이 보는 O 점을 중심으로 \hat{a}_3 방향으로 ω_3 만큼 회전 강체 운동을 받는 고정 단에 부착되어 있으며, 충격력은 R 점에서 굽힘 방향으로 $I_{mp}\delta(t-t_1)\delta(x-a)$ 과 같은 형태로 충격량 I_{mp} 와 dirac delta function을 사용하여 시간과 공간에 대하여 지정된 순간에만 작용하도록 정의하였다. 보 위의 임의의 한 점인 P 점의 탄성변형 변위는 직교방향 변수인 u_1, u_2 로 나타내어진다. 여기서 ρ_b 는 보의 단위 길이당 질량이고, E 는 탄성 계수 그리고 I 는 보 단면관성모멘트이다.

이 논문에서는 참고문헌 (5)에서와 같이 직교방향

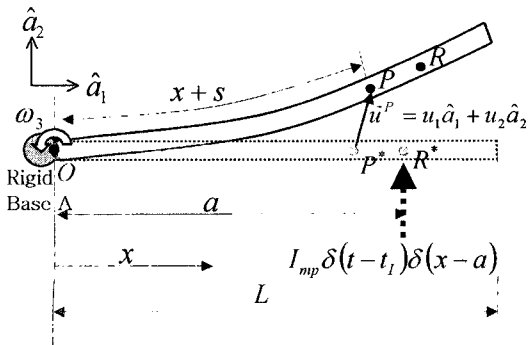


Fig. 1 Configuration of a cantilever beam

변수인 u_1 대신에 복합변형변수 s 를 사용하여 Kane의 방법으로 운동방정식을 유도하였다.

충격력을 받는 외팔 보의 운동방정식을 Kane의 방법으로 이용하여 유도하기 위해 위와 같은 회전 강체 운동이 작용할 때 P 점의 속도는 변수 s 와 u_2 를 사용하여 식 (1)과 같이 나타낼 수 있고, P 점의 가속도는 선형화 하여 식 (2)와 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{v}^P &= \left[v_1 + \dot{s} - \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \sigma} \right) d\sigma - \omega_3 u_2 \right] \hat{a}_1 \\ &+ \left[v_2 + \dot{u}_2 + \omega_3 \left(x + s - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma \right) \right] \hat{a}_2 \\ \vec{a}^P &= \left[\dot{v}_1 + \ddot{s} - \dot{\omega}_3 u_2 - \omega_3 (2\dot{u}_2 + v_2) - \omega_3^2 (x + s) \right] \hat{a}_1 \\ &+ \left[\dot{v}_2 + \ddot{u}_2 - \dot{\omega}_3 (x + s) + \omega_3 (2\dot{s} + v_1) - \omega_3^2 u_2 \right] \hat{a}_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$(2)$$

여기서 v_1 과 v_2 는 각각 \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 방향으로 고정 단에 작용하는 병진 속도를 나타낸다.

일반관성력 F_i^* 는 P 점의 속도와 가속도를 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_i^* &= - \int_0^L \rho_b \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{1i}} \right) \cdot \vec{a}^P dx \quad (i=1,2,\dots,\mu_1) \\ F_{i+\mu_1}^* &= - \int_0^L \rho_b \left(\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial \dot{q}_{2i}} \right) \cdot \vec{a}^P dx \quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \end{aligned} \quad (3)$$

일반작용력 F_i 는 보의 탄성에너지 U 에 의한 일반작용력 F_i^U 와 충격력에 의한 일반작용력 F_i^I 로 이루어진다. 운동방정식에서 보에 작용하는 충격력은 충격량 I_{mp} 와 Dirac delta function을 이용하여 나타낼 수가 있으며, 이 충격력에 의한 일반작용력은 이 함수에 P 점의 편속도를 내적 한 후 보 전체 길이에 대해 적분을 하는 방법으로 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_i^U &= - \frac{\partial U}{\partial q_{1i}} = - \left(\int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \right) q_{1j} \\ &\quad (i=1,2,\dots,\mu_1) \\ F_{i+\mu_1}^U &= - \frac{\partial U}{\partial q_{2i}} = - \left(\int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) q_{2j} \\ &\quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 F_i^I &= 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_1) \\
 F_{i+\mu_1}^I &= \int_0^L \left(\frac{\partial \hat{v}^P}{\partial \hat{q}_{2i}} \right) \cdot (I_{mp} \delta(t-t_1) \delta(x-a)) \hat{a}_2 dx \\
 &= \int_0^L \phi_{2i} \hat{a}_2 \cdot (I_{mp} \delta(t-t_1) \delta(x-a)) \hat{a}_2 dx \\
 &= I_{mp} \delta(t-t_1) \phi_{2i}(a) \quad (i=1,2,\dots,\mu_2)
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$F_i = F_i^U + F_i^I \quad (i=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \tag{6}$$

여기서 μ_1 과 μ_2 는 변형 변수 S 와 u_2 를 위한 일반 좌표의 수이다.

최종적으로 운동방정식은 일반작용력과 일반관성력의 합으로 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_i + F_i^* = 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_1 + \mu_2) \tag{7}$$

이 논문에서는 굽힘 방향으로만 충격력이 작용하는 것으로 하고 굽힘 방향 운동방정식만 고려하기로 한다. 따라서, 유도된 굽힘 방향 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int_0^L \rho_b \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) \ddot{q}_{2j} \right. \\
 &+ \left\{ \left(\int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) - \omega_3^2 \left(\int_0^L \rho_b \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) \right. \\
 &- (\dot{v}_1 - \omega_3 v_2) \left(\int_0^L \rho_b (L-x) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right) \\
 &\left. \left. + \omega_3^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^L \rho_b (L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right) \right\} q_{2j} \right] \\
 &= I_{mp} \delta(t-t_1) \phi_{2i}(a) - (\dot{v}_2 + \omega_3 v_1) \left(\int_0^L \rho_b \phi_{2i} dx \right) \\
 &- \dot{\omega}_3 \left(\int_0^L \rho_b x \phi_{2i} dx \right) \quad (i=1,2,\dots,\mu_2)
 \end{aligned} \tag{8}$$

충격력이 작용하는 보는 시간 $t=t_1$ 에서 무한대의 충격력이 발생한다. 상세하게 표현하면 $t=t_1$ 에서는 충격력에 의한 가진력이 존재하고 $t=t_1+$ 에서는 충격력에 의한 가진력이 존재하지 않는다. 따라서 $t=t_1+$ 이후의 응답은 충격력은 존재하지 않고 충격력에 의해 발생하는 초기 조건에 의해서만 응답이 발생하므로 초기 조건만으로도 충격력과 동일한 결과를 얻을 수 있다. 시간 t_1 와 t_1+ 에서 충격력은 변위 변화는 발생시키지 않고 속도 변화만 발생시키

므로 다음과 같은 초기조건이 주어진다.

$$q_{2i}(t_1) = q_{2i}(t_1 +) \tag{9}$$

일반 좌표의 시간에 대한 미분치를 일반 속도라 정의한다. 그리고 충격력 작용 후 굽힘 방향 일반 속도를 구하기 위해 굽힘 방향 운동방정식인 식 (8)의 양변을 $t=t_1$ 부터 $t=t_1+$ 까지 적분한다.

$\int_{t_1}^{t_1+} \delta(t) dt = 1$ 이므로 $t=t_1+$ 에서의 일반 속도는 다음의 식을 풀어 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{\mu_2} \left(\int_0^L \rho_b \phi_{2i} \phi_{2j} dx \right) [\dot{q}_{2j}(t_1 +) - \dot{q}_{2j}(t_1)] \\
 &= I_{mp} \phi_{2i}(a) \quad (i=1,2,\dots,\mu_2)
 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 $\dot{q}_{2j}(t_1)$ 는 충격력이 작용하지 않은 경우의 굽힘 방향 운동방정식을 풀어 구할 수 있다. 따라서 식 (10)으로부터 구한 $\dot{q}_{2j}(t_1 +)$ 을 초기 조건으로 하여 굽힘 방향 운동방정식을 풀면 충격력에 의한 보의 움직임을 나타낼 수 있다.

식 (8)을 무차원화 하기 위해 무차원 변수들과 매개 변수들 그리고 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 \tau &\equiv \frac{t}{T}, & \tau_1 &\equiv \frac{t_1}{T}, & \vartheta_i &\equiv \frac{q_i}{L} \\
 \xi &\equiv \frac{x}{L}, & \sigma &\equiv \frac{a}{L}, & \lambda_{mp} &\equiv \frac{I_{mp}}{i_{mp}} \\
 \varphi_i(\xi) &\equiv \phi_i(x), & \gamma &\equiv T\omega_3, & \dot{\gamma} &\equiv T^2\dot{\omega}_3 \\
 v_i &\equiv \frac{v_i}{v_r} \quad (i=1, 2), & \dot{v}_i &\equiv \frac{\dot{v}_i}{a_r} \quad (i=1, 2)
 \end{aligned} \tag{11}$$

여기서 T, i_{mp}, v_r, a_r 는 다음과 같이 정의된다

$$\begin{aligned}
 T &\equiv \sqrt{\frac{\rho_b L^4}{EI}}, & i_{mp} &\equiv \frac{EIT}{L^2} \\
 v_r &\equiv \frac{L}{T}, & a_r &\equiv \frac{L}{T^2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

무차원 변수와 매개 변수들을 사용하여 식 (8)을 무차원화 시키면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int_0^1 \varphi_{2i} \varphi_{2j} d\xi \right) \ddot{\vartheta}_{2j} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \left(\int \varphi_{2i,\xi} \varphi_{2j,\xi} d\xi \right) - \gamma^2 \left(\int \varphi_{2i} \varphi_{2j} d\xi \right) \right. \\
 & - (\dot{v}_1 - \gamma v_2) \left(\int (1 - \xi) \varphi_{2i,\xi} \varphi_{2j,\xi} d\xi \right) \\
 & \left. + \gamma^2 \left(\frac{1}{2} \int (1 - \xi^2) \varphi_{2i,\xi} \varphi_{2j,\xi} d\xi \right) \right\} \dot{\vartheta}_{2j} \quad (13) \\
 & = \lambda_{mp} \delta(\tau - \tau_1) \varphi_{2i}(\sigma) - (\dot{v}_2 + \gamma v_1) \left(\int \varphi_{2i} d\xi \right) \\
 & - \dot{\gamma} \left(\int \xi \varphi_{2i} d\xi \right) \quad (i=1,2,\dots,\mu_2)
 \end{aligned}$$

$\dot{\vartheta}_{2j}(\tau_1 +)$ 을 구하기 위해 식 (10)을 무차원화 시키고 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\vartheta}_{2j}(\tau_1 +) = \lambda_{mp} \varphi_{2j}(\sigma) + \dot{\vartheta}_{2j}(\tau_1) \quad (j=1,\dots,\mu_2) \quad (14)$$

또한 이전의 논문에서는 감쇠계수(damping coefficient)에 대한 값이 포함 되어 있지 않기 때문에 충격 후 발생하는 과도 응답은 주기적으로 무한히 반복하며 진동하게 된다. 실제로는 충격 후 시간이 지남에 따라 시스템의 반응은 과도 상태에서 정상 상태로 변화하므로 이 연구에서는 운동방정식에 임의의 감쇠 계수 값(강성 계수 값의 0.1%)을 포함시켜 경 감쇠 운동을 하게 만들었다.

따라서 최종 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^{\mu_2} \left[\left(\int \varphi_{2i} \varphi_{2j} d\xi \right) \ddot{\vartheta}_{2j} \right. \\
 & + \left\{ \left(\int \varphi_{2i,\xi} \varphi_{2j,\xi} d\xi \right) - \gamma^2 \left(\int \varphi_{2i} \varphi_{2j} d\xi \right) \right. \\
 & - (\dot{v}_1 - \gamma v_2) \left(\int (1 - \xi) \varphi_{2i,\xi} \varphi_{2j,\xi} d\xi \right) \\
 & \left. + \gamma^2 \left(\frac{1}{2} \int (1 - \xi^2) \varphi_{2i,\xi} \varphi_{2j,\xi} d\xi \right) \right\} \dot{\vartheta}_{2j} \\
 & + 0.001 \left\{ \left(\int \varphi_{2i,\xi} \varphi_{2j,\xi} d\xi \right) - \gamma^2 \left(\int \varphi_{2i} \varphi_{2j} d\xi \right) \right. \\
 & - (\dot{v}_1 - \gamma v_2) \left(\int (1 - \xi) \varphi_{2i,\xi} \varphi_{2j,\xi} d\xi \right) \\
 & \left. + \gamma^2 \left(\frac{1}{2} \int (1 - \xi^2) \varphi_{2i,\xi} \varphi_{2j,\xi} d\xi \right) \right\} \dot{\vartheta}_{2j} \quad (15) \\
 & = \lambda_{mp} \delta(\tau - \tau_1) \varphi_{2i}(\sigma) - (\dot{v}_2 + \gamma v_1) \left(\int \varphi_{2i} d\xi \right) \\
 & - \dot{\gamma} \left(\int \xi \varphi_{2i} d\xi \right) \quad (i=1,2,\dots,\mu_2)
 \end{aligned}$$

3. 웨이블릿 변환

푸리에 변환은 다음 식으로 정의된다.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (16)$$

즉, 시간영역(t)에서의 신호 $f(t)$ 를 주파수영역에서의 신호 $F(\omega)$ 로 변환하는 과정으로 다음과 같이 역 변환이 가능하여 신호해석 분야에서 가장 중요한 수학적 도구이다.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (17)$$

푸리에 변환은 시간 또는 공간상의 정보를 정해진 주파수 대역에서 생성되는 주기함수를 매개로 주파수 공간으로 전환을 통해 신호가 지니고 있는 주파수 성분에 대한 다양한 분석이 가능하다. 그러나 푸리에 해석은 주파수영역으로 변환할 때, 모든 시간($-\infty \sim \infty$)에 대해서 적분하기 때문에 시간과 관련된 정보를 잃어버리는 커다란 단점을 가지고 있다. 그러므로, 다양한 시간 스펙트럼을 가지는 비정상 상태신호(non-stationary signal)들에 대한 분석은 적당하지 않다. 이러한 단점을 보완하기 위해 나온 해석 방법이 SFTF(short time Fourier transform)으로 식 (17)로 정의 된다.

$$STFT(s, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t-s) e^{-j\omega t} dt \quad (18)$$

이 방법은 푸리에 변환에 창문과 같은 가우시안(Gaussian function) 함수를 적용하여 신호를 일정한 윈도우의 크기에 따라 결정되는 영역에서 시간과 주파수를 모두 알 수 있다. 하지만 적용된 창문의 크기가 제한되어 있으므로, 전체 영역에 대한 정확한 분석이 어렵다. 따라서 가변적인 윈도우를 얻을 수 있는 방법인 웨이블릿 변환이 개발되어 사용되게 되었다.

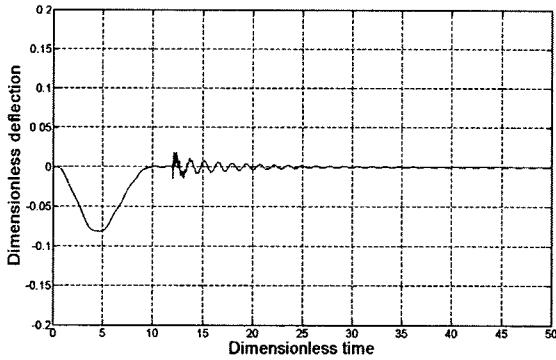
연속 웨이블릿 변환이란 연속 웨이블릿 함수를 이용해 신호를 분석하는 방법을 말하며 Morlet과 Grossman에 의해 정의된 연속 웨이블릿 변환은 다음 식과 같다.

$$WT(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi^{a,b}(t) dt, \quad (a,b \in R, a \neq 0) \quad (19)$$

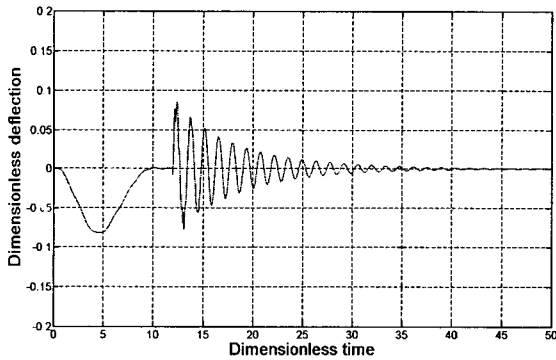
여기서 $f(t)$ 는 신호, a 는 척도인자(scale parameter), b 는 이동인자(shifting parameter)로서 실수이며

$\psi^{a,b}(t)$ 는 웨이블릿 모 함수(mother wavelet)를 아래 같이 scaling하고 shift 시킴으로써 얻어지는 함수로 웨이블릿(wavelet) 함수라 불린다.

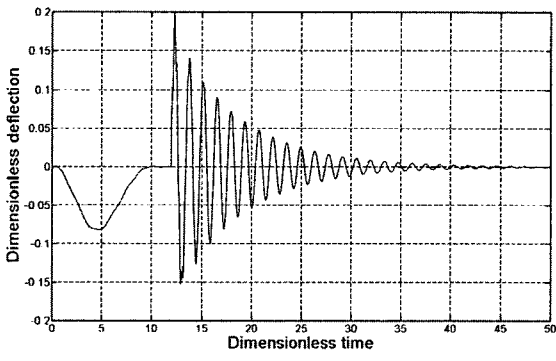
$$\psi^{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (20)$$



(a) $\sigma=0.2$

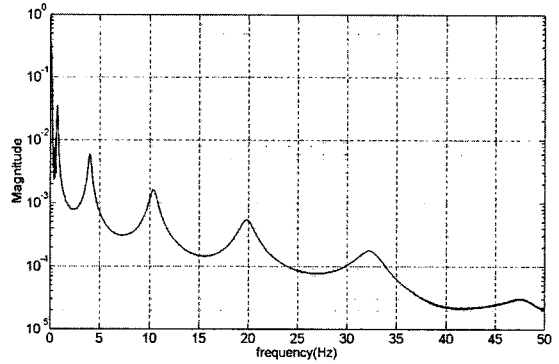


(b) $\sigma=0.6$

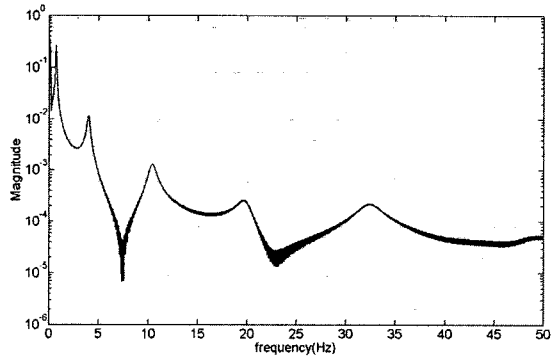


(c) $\sigma=1$

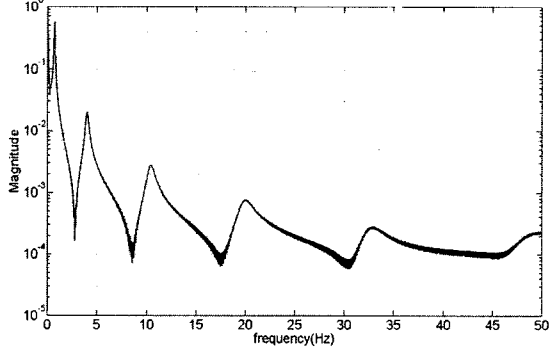
Fig. 2 Variation of dimensionless deflection in tip versus dimensionless time with different impulsive force position($\lambda_{mp}=0.15$, $\Omega_s=5$, $\tau_s=10$, $\tau_r=12$)



(a) $\sigma=0.2$



(b) $\sigma=0.6$



(c) $\sigma=1$

Fig. 3 Dimensionless amplitude spectrum in tip versus dimensionless frequency with impulsive force and different impulsive force position($\lambda_{mp}=0.15$ m, $\Omega_s=5$)

식 (20)에서 $\psi(t)$ 가 웨이블릿 모 함수이며 척도인자인 a 값에 의해서 웨이블릿 모 함수 크기가 변화되는데, a 가 작아질수록 $\psi(t)$ 는 수축되어 신호의 고주파성분을 찾아내고, a 가 커지면서 $\psi(t)$ 는 확장되어 신호의 저주파 성분을 분석하는데 사용된다. 그리고 $1/\sqrt{a}$ 는 에너지 정규화(energy normalization)를 위한 항이며 결과적으로 변환된 신호는 모든 스케일에서 동일한 에너지를 갖게 된다. 식 (19)에 의해 연속 웨이블릿 변환은 다음 같이 나타낼 수 있다.

$$WT(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (21)$$

사용되는 웨이블릿 모함수의 종류는 다양하며 각각의 웨이블릿 모함수가 가지고 있는 신호분해 특성과 장점에 따라서 다양한 웨이블릿 변환이 존재하나 이 연구에서는 Matlab Wavelet Toolbox를 사용하여 웨이블릿 변환을 하였으며 가장 일반적으로 사용되는 Morlet 웨이블릿을 사용했다. 다음은 Matlab Toolbox에서 지원하는 Morlet 웨이블릿 함수이다.

$$\psi(t) = \exp(-t^2/2) \cdot \cos(5t) \quad (22)$$

4. Wavelet 해석 결과

4.1 푸리에 변환을 통한 충격 위치에 따른 진동특성 해석

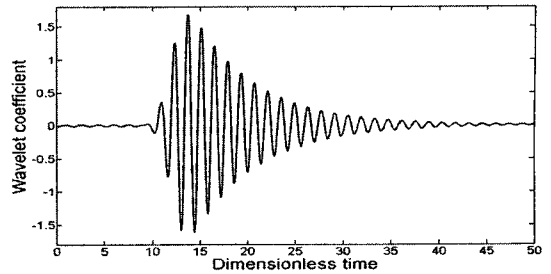
Figs. 2(a),(b),(c)는 충격력이 작용하는 위치에 따른 보 끝점에서의 무 차원 굽힘 방향 변위의 과도 응답 결과를 나타내고 있다.

여기서 λ_{mp} 는 무차원화 된 충격량이며, Ω_s 는 무차원화 된 각속도, τ_s 는 강체 운동이 spin-up motion 형태로 움직일 때의 무차원 시간이며, τ_l 는 충격이 일어날 때의 무차원 시간을 나타낸다.

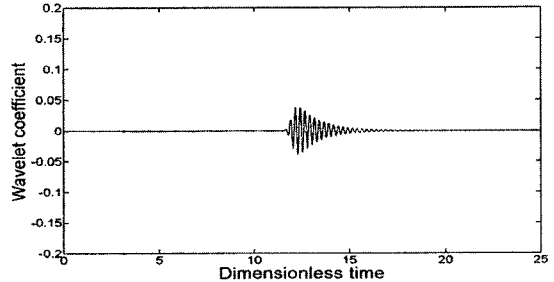
이 논문에 사용 된 spin-up motion은 다음과 같은 경우이다.

$$\gamma = \frac{\Omega_s}{\tau_s} \left[\tau - \frac{\tau_s}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi\tau}{\tau_s}\right) \right] \quad \text{if } 0 \leq \tau \leq \tau_s \quad (23)$$

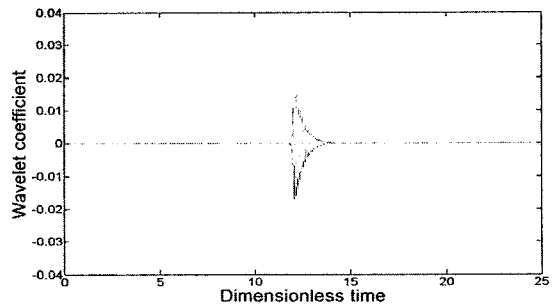
$$\gamma = \Omega_s \quad \text{if } \tau_s \leq \tau$$



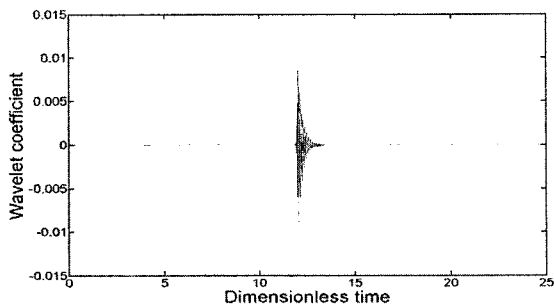
(a) 1st damped natural frequency(0.73 Hz)
(settling time : 44.56s)



(b) 2nd damped natural frequency(4.06 Hz)
(settling time : 17.78s)

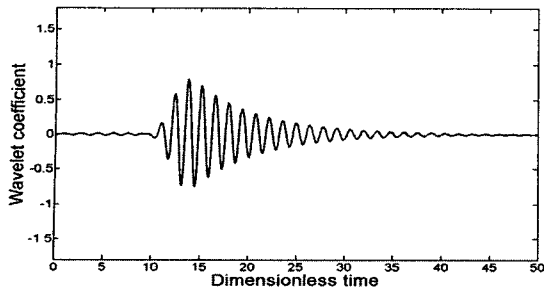


(c) 3rd damped natural frequency(10.2 Hz)
(settling time : 13.46s)

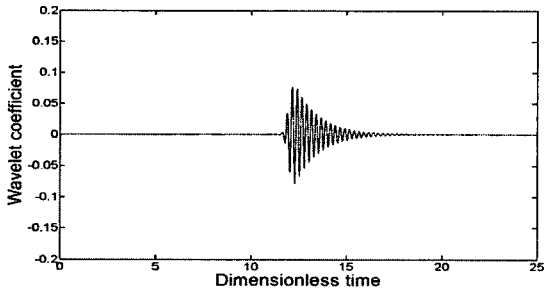


(d) 4th damped natural frequency(19.8 Hz)
(settling time : 12.52s)

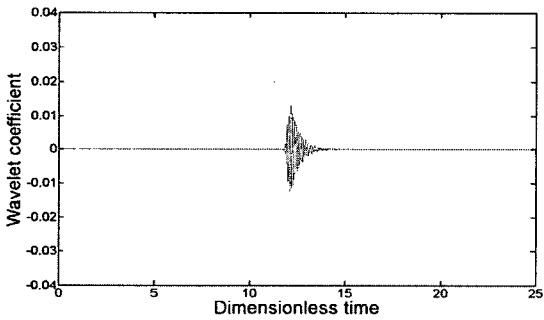
Fig. 4 Variation of wavelet coefficient in tip versus dimensionless time with different impulsive force position ($\sigma=1$, $\lambda_{mp}=0.15$, $\Omega_s=5$, $\tau_s=10$, $\tau_l=12$)



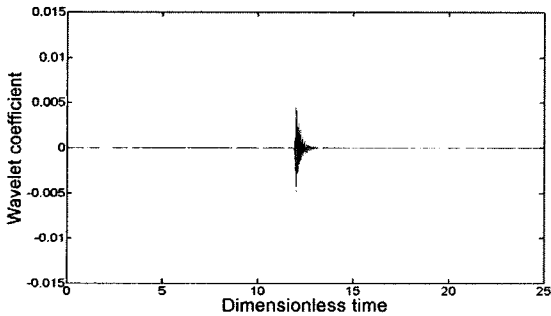
(a) 1st damped natural frequency(0.73 Hz)
(settling time : 39.65)



(b) 2nd damped natural frequency(4.06 Hz)
(settling time : 17.1s)

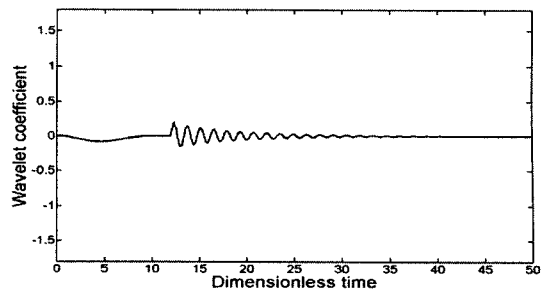


(c) 3rd damped natural frequency(10.2 Hz)
(settling time : 13.13s)

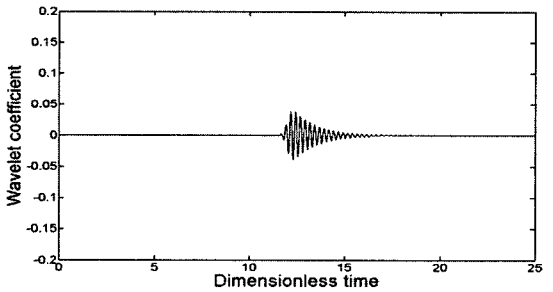


(d) 4th damped natural frequency(19.8 Hz)
(settling time : 12.18s)

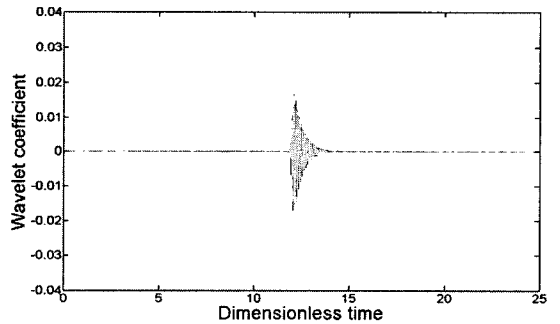
Fig. 5 Variation of wavelet coefficient in tip versus dimensionless time with different impulsive force position($\sigma=0.6$, $\lambda_{mp}=0.15$, $\Omega_s=5$, $\tau_s=10$, $\tau_l=12$)



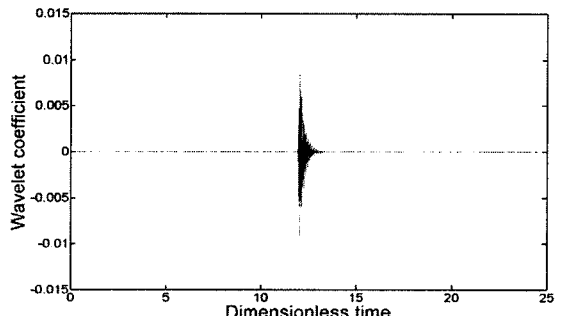
(a) 1st damped natural frequency(0.73 Hz)
(settling time : 26.66s)



(b) 2nd damped natural frequency(4.06 Hz)
(settling time : 16.24s)



(c) 3rd damped natural frequency(10.2 Hz)
(settling time : 13.19s)



(d) 4th damped natural frequency(19.8 Hz)
(settling time : 12.46s)

Fig. 6 Variation of wavelet coefficient in tip versus dimensionless time with different impulsive force position($\sigma=0.2$, $\lambda_{mp}=0.15$, $\Omega_s=5$, $\tau_s=10$, $\tau_l=12$)

고정 점 근처로 갈수록 진폭의 크기는 점차 감소하고, 나타나는 진동수도 고정 점 근처로 갈수록 감소하는 것을 확인할 수 있다. 이러한 진동 특성 변화를 확인하기 위해 푸리에 변환을 사용하여 Figs. 3 (a),(b),(c)에서 충격력이 발생 한 후 무차원 주파수에 대한 진폭 스펙트럼의 크기에 대해 나타내었다. 여기서 보에 작용한 각속도는 모든 경우에 대해 동일하게 작용하였으므로 보의 고유진동수에는 변화가 없어 피크(peak)가 나타나는 주파수에는 변화가 없으나 시간에 대한 정보가 없기 때문에 시간에 따른 진동의 특성 변화들을 살펴 볼 수가 없다.

4.2 웨이블릿 변환을 통한 충격 위치에 따른 진동 특성 해석

Figs. 4, 5, 6은 웨이블릿을 사용하여 충격력이 작용하는 위치에 따른 보 끝점에서의 무차원 굽힘 방향 변위의 과도 응답 결과를 나타낸 결과 값이며 (a), (b), (c), (d)는 충격 후 발생 하는 각각의 주파수의 특성 변화를 나타 낸 것이다. 4차 감쇠 고유진동수까지 나타 내었으며 여기서 Y축의 웨이블릿 계수(wavelet coefficient) 값은 충격 후 발생하는 주파수의 영향 도를 나타내는 값이므로 피크 점의 1% 미만의 값에서는 진동이 소멸한다고 가정을 하였다. 전반적으로 저주파수대의 영향이 크게 나타나 굽힘 방향 변위의 과도응답의 결과와 저주파수대의 진동 특성이 유사한 것을 확인할 수 있었다. 충격 위치에 따른 진동특성은 고정 단으로 갈수록 진동의 소멸시간은 빨라졌으나 2차 이상의 고유진동수에서는 상대적인 피크(peak) 점 크기에 비해 소멸시간이 비슷한 것을 확인할 수 있었으며 이는 끝점으로 갈수록 감쇠 효과가 크게 작용하는 것을 나타낸다. 고정 단에서의 3차와 4차 고유진동수의 경우에는 중심점에서 충격이 가해졌을 때 보다 늦게 사라지는 것을 확인할 수 있었다. 이는 고정 단 근처에 발생하는 충격 에너지가 고주파수대에서는 중심점에서보다 크게 나타나는 것으로 예측 할 수 있다

5. 결 론

이 논문에서는 웨이블릿 변환을 이용하여 충격력을 받는 외팔 보의 충격위치에 따른 진동 특성을 분석해 보았다. 푸리에 변환과는 다르게 시간에 따른

진동특성의 변화들을 확인 할 수 있었으며, 충격 후 충격 위치에 상관없이 고주파수 고유진동수가 급격히 소멸하는 것을 확인할 수 있었다. 또한 2차 이상의 고유진동수에서는 상대적인 피크(peak)점의 크기에 비해 소멸시간이 비슷한 것을 확인할 수 있었으며 충격 위치에 따라서 고정 단 근처로 갈수록 고주파수대 고유진동수의 영향이 저주파수대 고유진동수보다 상대적으로 더 크게 작용된다는 것을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades", British A.R.C. Reports and Memoranda, No. 766.
- (2) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams", Journal of Sound and Vibration, Vol. 56. pp. 175~185.
- (3) Buffinton, K. and Kane, T., 1985, "Dynamics of a Beam Moving Over Supports", International Journal of Solids and Structures, Vol. 21, pp. 617~643.
- (4) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 10, pp. 139~151.
- (5) Yoo, H. H., Ryan, R. R. and Scott, R. A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 181, No. 2, pp. 261~278.
- (6) Park, J. H. and Yoo, H. H., 1998, "Flapwise Bending Vibration of Rotating Timoshenko beams with Concentrated Mass and Mass Moment Inertia", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 8, No. 2, pp. 353~360.
- (7) Solberg, J. M. and Papadopoulos, P., 1998, "A Finite Element Method for Contact/Impact", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 30, pp. 297~311.
- (8) Bittencourt, E. and Creus, G. J., 1998, "Finite Element Analysis of Three-dimensional Contact and Impact in Large Deformation Problems", Computers

and Structures, Vol. 69, pp. 219~234.

(9) Demkowicz, L. and Bajer, A., 2001, "Conservative Discretization of Contact/impact Problems for Nearly Rigid Bodies", Computer, Methods in Applied, Mechanics and Engineering, Vol. 190, pp. 1903~1924.

(10) Lim, H. S. and Yoo, H. H, 2006, "Dynamic Analysis of an Impulsively Forced Rotating Cantilever Beam", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol.

16, No. 3, pp. 226~232.

(11) <http://www.mathworks.com>, Wavelet Toolbox.

(12) Louis, A. K. 1997, "Wavelets : Theory and Applications", John Wiley & Sons, Inc., New York.

(13) Lee, S. H., Yoon, D. H., 2004, "Theory and Applications of Wavelet Transform", Bo Sung Kag, Inc., South Korea.

(14) Choi, B. S., 2001, "Wavelet Analysis", Se Kyoung, Inc., South Korea.