

## 이중 공동의 고유 주파수 최대/최소화를 위한 위상 최적화 기반 격벽 설계

### Topology-optimization-based Partition Design for Maximizing or Minimizing the Eigenfrequency of a Double Cavity

이진우\* · 김윤영†

Jin Woo Lee and Yoon Young Kim

(2008년 8월 22일 접수 ; 2008년 10월 16일 심사완료)

**Key Words** : Double Cavity(이중 공동), Topology optimization(위상 최적화), Hole(구멍), Eigenfrequency(고유주파수), Partition(격벽)

#### ABSTRACT

The position and size of holes in the partition of a double cavity are known to strongly affect the eigenfrequency of the longitudinal eigenmodes of the double cavity. To maximize or minimize the eigenfrequency of the hole-partitioned double cavity, two acoustical topology optimization problems are formulated and solved. While two sub-cavities are filled with air, a partition between them is assumed to consist of sub-partitions of variable acoustical properties. One design variable is assigned to each sub-partition, whose material properties are interpolated as those of an intermediate material between air and a rigid body. The penalty parameter of the used interpolation function is adjusted to obtain a distinct air and rigid body distribution at the converged stage in each acoustical topology optimization problem. A special attention is paid to the selection of initial values of design variables to obtain solutions as close to global optimum and symmetric as possible. To show numerical characteristics of these optimization problems, the formulated problems are first solved for the one-dimensional partition design domain and then for the two-dimensional partition design domain.

#### 1. 서론

해석 음향 시스템의 단순함에도 불구하고 이중 공동(double cavity)의 음향 모달 특성(acoustical modal properties) 파악은, 트렁크를 가진 승용차와 같은 실제 기계 시스템의 음향 특성 이해에 상당한 도움을 주고 있다<sup>(1,2)</sup>. 특히, 두 개의 하부 공동(sub-cavity)으로 분할 하는 격벽(partition)의 구멍 위치

와 크기가 이중 공동의 고유주파수와 고유모드에 큰 영향을 주는 것으로 알려져 있다<sup>(3,4)</sup>. 그러나, 지금까지 진행된 연구는 격벽의 구멍이 한 개인 경우에 국한되었다. 즉, 격벽에 2개 이상의 구멍이 존재하는 이중 공동의 음향 고유주파수를 이론적으로 계산하는 연구나 최대 또는 최소 고유주파수를 얻기 위한 최적의 구멍 배열을 구하는 연구 결과는 아직 보고되지 않고 있다. 이 연구에서는, 허용되는 전체 구멍의 단면적에 대하여 이중 공동의 고유주파수의 최소 또는 최대값에 해당하는 최적의 격벽 구멍 분포를 위상 최적화 기법을 이용하여 얻고자 한다.

한 개의 구멍을 가진 격벽으로 분할된, 두 개의 하

† 교신저자 : 정희원, 서울대학교 기계항공 공학부  
E-mail : yykim@snu.ac.kr  
Tel : (02)872-7154, Fax : (02)883-1513  
\* 정희원, 퍼듀대학교 기계공학과

부 공동(sub-cavity)으로 구성된 이중 공동의 음향 고유주파수는 각 하부 공동의 고유모드를 기저 함수(basis function)로 사용한 모드 중첩법(mode superposition)을 적용하여 계산할 수 있다<sup>(3,5,6)</sup>. 이중 공동의 격벽의 길이가 작을 경우에는, 구멍을 질량이 없는 멤브레인으로 가정하여 고유주파수와 고유모드를 계산할 수 있다<sup>(5,6)</sup>. 구멍의 위치 변화에 따른 고유주파수와 고유모드의 정확도를 증가시키기 위해, 구멍 주위의 감쇠파(evanescent acoustic wave)가 고려되기도 하였다<sup>(3)</sup>. 이중 공동을 헬름홀츠 공명기(Helmholtz resonator)와 직사각형 음향 공동으로 연결된 음향 시스템으로 가정하여, 근접한 두 고유주파수의 상호 작용을 살펴보는 연구도 진행되었다<sup>(7)</sup>. 이런 이론적 연구 결과들은 2개 이상의 구멍이 존재하는 격벽을 갖는 이중 공동의 이론 음향 해석에 확장할 수 있지만, 특정 음향 특성을 갖는 최적의 구멍 분포를 얻기에는 한계가 있다. 이 경우에 사용할 수 있는 수치적인 계산 방법이 위상 최적화 기법이다.

구조물의 제한된 부피에 대하여, 최대 강성을 갖는 구조물을 설계하기 위해 사용되었던 위상 최적화 기법<sup>(8,9)</sup>이 최근에 음향 설계 분야에서 적용되고 있다. Jensen과 Sigmund<sup>(10)</sup>는 음향 공동 내부의 국부적인 음압 감소를 위하여 위상 최적화 기법을 사용하였다. 그리고, 위상 최적화 기법은 유전 알고리즘(genetic algorithm)과 함께, 효과적인 음향 방사를 위한 박판 설계에 사용되었다<sup>(11)</sup>. Wadbro와 Berggren<sup>(12)</sup>은 위상 최적화 기법을 이용하여 음향 혼(acoustic horn)을 설계하였다. Lee와 Kim<sup>(13)</sup>는 특정 주파수 대역에서 소음을 줄일 수 있는 머플러 설계를 위해 음향 위상 최적화 문제를 정식화하였다. 그리고, 위상 최적화 기법을 이용한 음향 고유주파수 최적화는 Lee와 Kim<sup>(14-16)</sup>에 의해 처음 시도되었다.

이 연구에서는, 구배 기반 위상 최적화 기법(gradient-based topology optimization method)을 사용하여, 이중 공동의 고유주파수를 최적화하기 위한 격벽 설계 문제를 음향 위상최적화 문제로 정식화하였다. Lee와 Kim<sup>(14,15)</sup>의 연구에서는 해석적인 모델을 사용하였지만, 이 연구에서는 설계영역을 유한요소로 모델링하여 보다 다양한 문제를 다룰 수 있는 프레임워크를 마련하였다. 위상최적화를 수행하기 위해 두 하부 공동의 음향 매질(acoustic media)을 공기로 가정한 다음, 이중 공동의 격벽을 설계 영역으로 선

정하였다. 그 설계 영역은 많은 하부 격벽(sub-partition)으로 분할하였으며, 각 하부 격벽에 연속으로 변화하는 실수인 설계 변수 한 개씩을 부여하였다. 설계 변수가 최소값인 0을 갖는 경우, 하부 격벽이 공기로 채워지게 되어 그 곳은 구멍이 된다. 반대로, 설계 변수가 최대값인 1을 가지면, 해당 하부 격벽은 강체(rigid body)로 채워져서 입사되는 음파가 모두 반사 된다. 설계 변수가 0과 1사이의 값을 가지는 하부 격벽은 공기와 강체의 중간 음향 매질로 채워지고, 그 음향 물질 특성은 보간 함수(interpolation function)에 의해 결정된다.

기존의 위상 최적화 연구와 비교하여, 이 논문의 위상 최적화 문제는 두 가지 특징(보간 함수와 설계 변수의 초기값 선정)이 있다. 기존의 논문에서는 고유주파수 최대화 또는 최소화 문제에 따라 서로 다른 보간 함수를 사용하였으나<sup>(14-17)</sup>, 이 논문에서는 같은 형태의 보간 함수를 사용하되 벌칙 계수(penalty parameter)를 조절하여, 후처리 과정(post-processing)을 거치지 않고 명확한 구멍 분포를 얻을 수 있도록 하였다. 그리고, 최적해가 설계 변수의 초기값에 강하게 의존하는 단점<sup>(13,14)</sup>을 해결하고 대칭인 구멍 분포를 얻기 위해, 이중 공동의 음향 특성을 잘 나타내는 크로스모드(cross-mode)<sup>(1-4)</sup>로부터 초기값을 추출하였다. 그리고, 선정된 보간 함수와 초기값의 유효성을 살펴보기 위해, 두 가지 경우에 대하여 정식화된 음향 위상최적화 문제의 해를 순차적으로 구한다. 첫 번째 경우에는, 격벽이 높이 방향으로만 분할되고, 두 번째 경우에는, 높이와 폭 방향으로 분할된다. 두 경우는 각각 하부 격벽의 1차원 배열과 2차원 배열에 해당한다.

## 2. 음향 위상 최적화 정식화

이 논문에서 다루는 이중 공동(double cavity)은, Fig. 1과 같이, 직사각형 격벽에 의해 두 개의 직사각형 하부공동(sub-cavity)으로 나누어진다. 공동 내부의 음압(acoustic pressure,  $p$ )의 공간상 분포는 헬름홀츠 방정식(Helmholtz equation, 식 (1))과 경계조건에 의해 결정된다<sup>(10)</sup>.

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \frac{\omega^2}{K} \cdot p = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서,  $\rho$ 는 음향 매질의 밀도이고,  $K$ 는 벌크 모듈러스(bulk modulus)이며,  $\omega$ 는 각 주파수(angular frequency)이다.

유한요소법을 이용하면, 식 (1)은 음압 벡터  $\mathbf{P}$ , 시스템의 질량 행렬  $\mathbf{M}$ 과 강성 행렬  $\mathbf{K}$ 로 구성된 식 (2)로 변환된다.

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{P} = 0 \quad (2)$$

시스템의 질량 행렬과 강성 행렬은 각 요소(element)의 질량 행렬과 강성 행렬로 구성된다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \sum_{n=1}^N \mathbf{k}_n \quad (3a)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \sum_{n=1}^N \mathbf{m}_n \quad (3b)$$

여기서,  $\mathbf{A}$ 는 어셈블리 연산자(assembly operator)

이고,  $N$ 은 총 요소의 개수이다.  $n$ 번째 요소의 질량행렬  $\mathbf{m}_n$ 과 강성 행렬  $\mathbf{k}_n$ 은 형상 함수(shape function)  $\mathbf{N}_n$ 을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{k}_n = \int_{\Omega_n} \frac{1}{\rho_n} \nabla \mathbf{N}_n^T \nabla \mathbf{N}_n d\Omega \quad (4a)$$

$$\mathbf{m}_n = \int_{\Omega_n} \frac{1}{K_n} \mathbf{N}_n^T \mathbf{N}_n d\Omega \quad (4b)$$

이중 공동의 고유주파수는 식 (2)로부터 유도된 특성 방정식에서 구할 수 있다:

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (5)$$

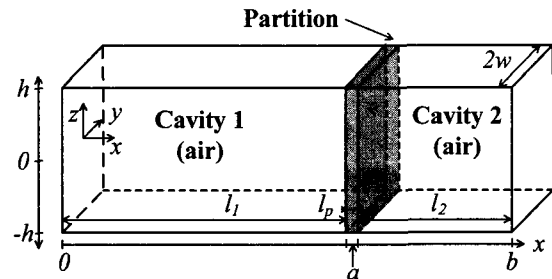


Fig.1 Double cavity with a partition of variable properties

설계 영역으로 설정된 격벽은 많은 하부 격벽으로 분할되고, 각 하부 격벽에는 한 개의 설계 변수가 부여된다. 정식화될 최적화 문제의 해를 구배 기반 최적화 알고리즘인 MMA<sup>(18)</sup>로 구하기 때문에 (MMA의 유용성은 이전 유사연구<sup>(19)</sup>에서도 검증됨), 설계 변수에 대한 고유주파수의 미분식이 필요하다. 따라서, 식 (2)로부터,  $m$ 번째 설계 변수  $\chi_m$ 에 대한  $r$ 번째 고유 각 주파수  $\omega_r$ 의 미분 값을 구하였다<sup>(20)</sup>:

$$\frac{\partial \omega_r^2}{\partial \chi_m} = \frac{1}{\mathbf{P}_r^T \mathbf{M} \mathbf{P}_r} \left[ \mathbf{P}_r^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \chi_m} \mathbf{P}_r - \omega_r^2 \mathbf{P}_r^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \chi_m} \mathbf{P}_r \right] \quad (6)$$

여기서  $\mathbf{P}_r$ 은  $r$ 번째 고유벡터이다. 그리고, 격벽의 구멍은 음향 고유모드의  $x$ 축 방향 음압 분포에 강하게 영향을 주므로, 이 연구에서 다루는 고유주파수는  $x$ 축 방향 음향 고유모드( $x$ -axial eigenmode)에 국한한다.

### 2.1 고유주파수 최소화 문제

허용된 전체 구멍의 단면적에 대한, 이중 공동의 최소 고유주파수를 얻기 위하여, 다음과 같은 목적 함수와 제한 조건이 사용된다.

$$\text{Min}_{0 \leq \chi_m \leq 1} L = \omega_r \quad (7a)$$

$$V_h / V_p = V_a \quad (7b)$$

여기서,  $V_a$ 은 허용된 구멍의 부피 비율이고,  $V_p$ 과  $V_h$ 은 각각 격벽과 구멍의 부피를 나타낸다. 구멍과 격벽의 길이가  $l_p$ 로 같기 때문에, 부피 비율은 단면적의 비율과 같다. 그리고, 분할된 각 하부 격벽의 단면적이 같으므로, 단면적의 비율은 허용된 구멍의 수  $H$ 와 전체 하부 격벽의 수  $M$ 의 비율과 같다.  $m$ 번째 하부 격벽의 밀도  $\rho_m$ 과 벌크 모듈러스  $K_m$ 는 다음과 같은 보간 함수에 의해 결정된다.

$$\rho_m(\chi_m) = \rho_{\text{rigid}} \cdot \gamma + \rho_{\text{air}} \cdot (1 - \gamma) \quad (8a)$$

$$K_m(\chi_m) = K_{\text{rigid}} \cdot \gamma + K_{\text{air}} \cdot (1 - \gamma) \quad (8b)$$

$$\gamma = \frac{\chi_m}{1 + (1 - \chi_m) \cdot \alpha} \quad (8c)$$

식 (8a)와 (8b)의 하부 첨자 air과 rigid는 각각 공기(air)와 강체(rigid body)를 나타내고, 식 (8c)의

$\alpha$ 는 벌칙 계수(penalty parameter)이다. 식 (8)은 Stople과 Svanberg<sup>(21)</sup>가 구조 강성 최대화를 위한 위상 최적화 문제에서 사용한 보간 함수와 동일한 형태이다. 이 문제에 적합한 벌칙계수는 목적함수의 거동을 고려하여 결정하게 되는데, 구체적인 값은 수치 예제 A와 C에서 제시하고자 한다.

### 2.2 고유주파수 최대화 문제

이중 공동의 고유주파수 최대화 문제는 다음의 목적 함수와 제한 조건을 사용하여 정식화된다.

$$\text{Min } L = -\log \omega, \quad (9a)$$

$$V_h / V_p = V_a \quad (9b)$$

고유주파수 최소화 문제에서 사용한 보간 함수(식 (8))를 사용하지만, 서로 다른 벌칙 계수를 사용한다. 3장에서 간단한 수치 예제로 벌칙 계수를 결정하는 방법이 설명될 것이다.

### 3. 수치 예제

정식화된 음향 위상 최적화 문제의 해를 구하기 위해, 다음의 수치 데이터를 사용하였다.

$$l_1 = 1.00 \text{ m}, \quad l_2 = 0.50 \text{ m}$$

$$l_p = 0.012 \text{ m}, \quad h = 0.32 \text{ m}, \quad w = 0.22 \text{ m}$$

$$\rho_{\text{air}} = 1.21 \text{ kg/m}^3, \quad c_{\text{air}} = 343 \text{ m/s},$$

$$\rho_{\text{rigid}} = 10^6 \cdot \rho_{\text{air}}, \quad c_{\text{rigid}} = 10^1 \cdot c_{\text{air}}$$

음향 고유치 해석을 위한 유한요소모델은 8점 노드(node)의 음향 요소(acoustic element)로 구성하였다. 인접한 두 노드의  $x$ 축 방향 거리는 0.02 m(격벽에서는 0.012 m)로 일정하지만,  $y$ 축과  $z$ 축 방향 거리는 하부 격벽의 수와 분할 방법에 따라 달라진다. 따라서, 각 수치 예제에서 두 노드의  $y$ 축과  $z$ 축 방향 거리가 명시된다. 음향 해석과 최적해를 구하는 프로그램은 matlab으로 작성되었다.

일반적인 구조 위상최적화 문제에서는, 제한 조건에서 주어진 부피 또는 질량 비율을 각 설계변수의 초기값으로 사용한다. 그러나, 이런 방법으로는 의미 있는 결과를 얻기 곤란한데, 그것은 설계변수에 의해 강성만이 변화하는 정적 문제와는 달리 질량과

강성을 동시에 고려해야 하는 동적 문제에서는 이와 같은 수치적 어려움이 보고되고 있기 때문이다<sup>(14-16)</sup>. 따라서, 앞선 연구에서 이중 공동의 구멍 영향을 설명하기 위해 사용한 크로스 모드(cross-mode)<sup>(1-4)</sup>를 초기값으로 사용하였다. 크로스 모드는 지수 감쇠파가 갖는 음향 모드로서, 감쇠파가 진행하는 방향의 수직 방향으로 음압이 분포되므로,  $x$  축 방향 음향 고유모드에 수직한 구멍의 최적 분포를 구하는 문제에 알맞은 초기값을 제공해 줄 수 있다. 그리고, 상하 대칭인 최적해를 얻기 위해 크로스 모드의 절대값을 섭동(perturbation)시켜서 얻었다.

$$\chi_m^{\text{initial}} = (1 - V_a) + \left( \frac{|\mathbb{E}_q(y_m, z_m)|}{\sum_{m=1}^M |\mathbb{E}_q(y_m, z_m)| / M} - 1 \right) \cdot V_a, \quad (10)$$

$(m = 1, \dots, M; q = 1, \dots, Q)$

식 (10)에서  $M$ 은 설계 변수의 개수이고,  $q$ 는 크로스 모드(cross-mode)를 나타내는 지수(index)이다.

2장의 음향 위상최적화 정식화(acoustical topology optimization formulation)를 하부 격벽의 1차원 배열(Fig. 2(a))에 대해 먼저 적용한다. 간단한 수치 예제로 고유주파수 최소화/최대화 문제에 사용될 보간 함수의 벌칙 계수를 결정하고, 최종해의 초기 값 의존성을 살펴본다. 같은 절차를 따라서 2차원 하부 격벽 배열(Fig. 2(b))에 대해 해를 구한다. 그림에서  $2w_p$ 와  $2h_p$ 는 하부 격벽의 폭과 높이를 나타낸다.

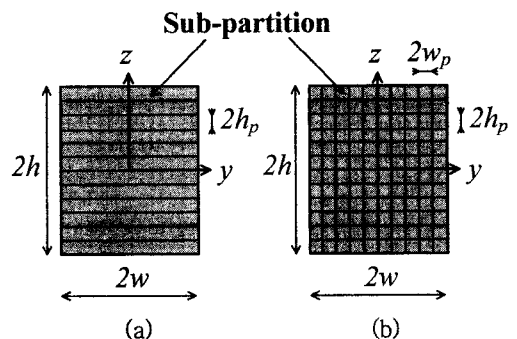


Fig. 2 Partition division : (a) one-dimensional distribution of sub-partitions, (b) two-dimensional distribution of sub-partitions

3.1 최적의 1차원 구멍 분포

Fig. 2(a)의 1차원 하부 격벽 배열에서는, 하부 격벽의 폭이 두 하부 공동의 폭과 같으므로, 구멍으로 인해 발생하는 크로스 모드(cross-mode)는 z축 방향 모드(z-axial mode)이다. 따라서, 다음과 같은 초기값을 사용하였다.

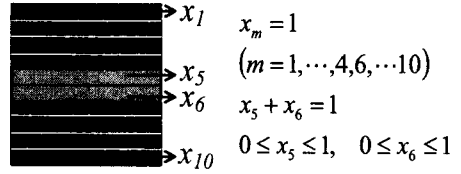
$$\begin{aligned} \varepsilon_q(z_m) &= \cos(q\pi(m-0.5)/M) \\ (m &= 1, 2, \dots, M) \end{aligned} \quad (11)$$

식 (8)의 벌칙 계수를 결정하기 위해 새로운 상관 관계를 살펴본다. 이전 논문에서 자주 다루어졌던, 벌칙 계수와 물성치의 상관관계로는 음향 고유주파수 최대화/최소화 문제에 적절한 벌칙계수를 직접 결정할 수 없었다. 따라서, 이 논문에서는 벌칙 계수와 고유주파수의 상관관계로부터 보간 함수의 벌칙 계수를 결정한다. 아울러, 초기값이 최적해에 미치는 영향도 살펴본다.

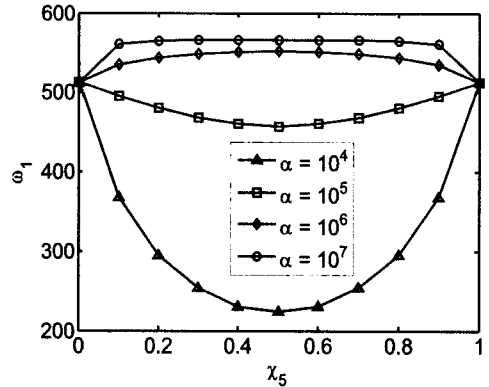
(1) 수치 예제A: 보간 함수의 벌칙 계수 결정

최적화에 앞서 이 설계 문제에서 사용할 보간 함수의 벌칙 계수를 결정해야만 한다. 이를 위해 Fig. 3(a)에 나타낸 설계 변수 분포를 가정한 다음 벌칙 계수 값을 바꾸어 가면서 설계변수와 목적함수인 1차 고유주파수와와의 관계를 살펴보았다. 일반적인 정적 문제에서는 설계 변수가 강성을 제어하고 또 목적함수가 강성값과 직접 관련되어 있기 때문에 설계 변수와 강성값의 관계만 조사하여도 설계변수와 목적함수의 관계를 알 수 있다. 하지만, 동적 문제의 경우, 설계 변수가 밀도와 강성을 동시에 다른 함수 형태로 제어하기 때문에, 설계 변수와 밀도-강성관계로부터 설계변수와 목적함수와의 관계를 추출하기 어렵다. 따라서 이 연구에서는 설계변수와 목적함수의 관계를 직접 살펴보는 방법을 채택하고자 한다. 이 방법의 유용성은 최근 연구<sup>(22)</sup>에서도 입증된 바 있다.

벌칙 계수 값의 영향을 조사하기 위해, 먼저 Fig. 3(a)에 제시된 10개의 설계 변수 중 가운데 위치한 요소와 관련된 2개의 변수만 변할 수 있도록 하고 그 변수들의 합이 1이 되도록 하였다. 그리고 나머지 설계 변수는 모두 1로 고정하였다. 이런 방식으로 설계변수를 선정한 이유는 격벽에 있는 구멍의 총 부피비  $V_p$ 가 항상 특정값(지금의 경우는 0.1)을



(a)

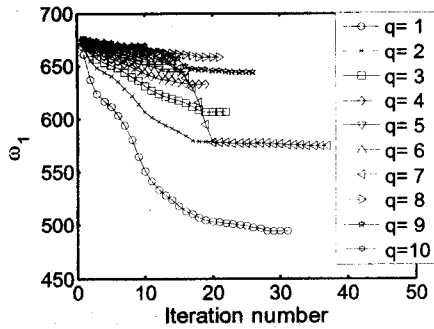


(b)

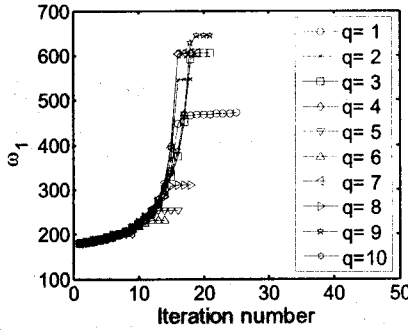
Fig. 3 One-dimensional numerical problems to determine the effects of the penalty exponents: (a) optimal topology layout, (b) the variation of the first fundamental frequency as a function of  $x_5$  for varying penalty exponent values

만족시킴으로써 부피구속조건을 항상 만족하도록 하였다. 또 변화할 수 있는 두 개의 설계변수의 합이 1이 되게 함으로써 실질적으로 한 개의 독립변수를 갖는 간단한 최적화 문제를 다룰 수 있도록 하였다. 이제 설계 변수 값의 변화에 따른 함수거동을 보면, 최적화시 중간밀도를 제어할 수 있는 가장 효과적인 벌칙계수를 찾을 수 있게 된다.

Fig. 3(b)는 네 개의 벌칙 계수 값에 대하여, 설계 변수  $x_5$ 의 변화에 따른 1차 고유주파수의 변화를 나타내었다.  $x_5$ 의 양끝 값과 중간 값에서의 고유주파수와 고유주파수 변화율을 비교하여,  $10^6$ 과  $10^4$ 를 각각 고유주파수 최소화/최대화 문제의 벌칙 계수로 선정하였다. 즉, 벌칙 계수가  $10^6$ 과  $10^7$ 인 경우,  $x_5$ 가 0 또는 1일 때, 고유주파수가 최소이지만, 중간 값에서의 고유주파수 변화율은 벌칙 계수가  $10^6$ 일 때가 훨씬 크므로, 이 값을 고유주파수 최소화 문제의 벌칙 계수로 선정하였다. 고유주파수 최대화 문제의 벌칙 계수는 이와 반대인 기준으로 선정하였다.



(a) Eigenfrequency minimization problem



(b) Eigenfrequency maximization problem

Fig. 4 Iteration histories in acoustic topology optimization problems

(2) 수치 예제B: 고유주파수 최소화/최대화

수치 예제 A에서 결정된 벌칙 계수를 사용하여, 2장에서 정식화된 음향 위상최적화 문제의 해를 구하였다. 사용된 하부 격벽의 수는 60개이고, 10개의 초기값을 사용하였다:  $h_p = h/60$ .

Fig. 4는 최적화 과정 동안의 고유주파수의 변화와 최종 수렴값을 나타낸다. 두 음향 위상최적화 문제의 해가 초기값에 강하게 영향을 받고 있음을 쉽게 알 수 있다. Fig. 4(a)에 나타낸 10개의 최종해 중에서 최소값을 최소 고유주파수로, Fig. 4(b)에서 10개의 최종해 중에서 최대값을 최대 고유주파수로 간주하였다. Figs. 5와 6은 각각 고유주파수의 최소값과 최대값에 해당하는 최적 위상과 음향 모드를 나타낸다. 고유주파수가 최소인 경우(Fig. 5(a))에는, 모든 구멍이 중심에 모여있고, 최대인 경우(Fig. 5(b))에는 서로 떨어져 있다. 이런 구멍 분포에 따라, 음향 모드의 음압 분포가 현저히 다를 수 있다. 즉, 절선(nodal line)이 Fig. 6(a)에서는 구멍에 중심을 둔 반원 모양이지만, Fig. 6(b)에서는 격벽과 거의 수평을 이룬다.

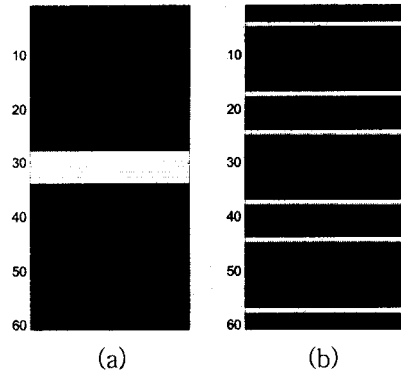


Fig. 5 Optimal layouts for: (a) minimized eigenfrequency; and (b) maximized eigenfrequency

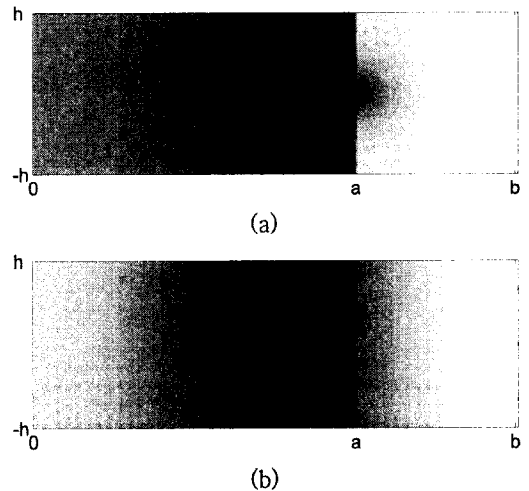


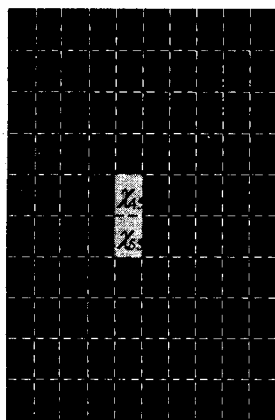
Fig. 6 The first acoustic mode of the optimized double cavity for (a) minimized eigenfrequency(494.5 rad/s), (b) maximized eigenfrequency(644.0 rad/s)

3.2 최적의 2차원 구멍 분포

1차원 구멍 분포 문제에서와 마찬가지로, 보간 함수의 벌칙 계수를 먼저 결정한 후에, 정식화된 음향 위상 최적화 문제의 해를 구하였다.

(1) 수치 예제C: 보간 함수의 벌칙 계수 결정

Fig. 7(a)의 설계 변수 분포를 이용하여 2차원 구멍 분포에 알맞은 보간 함수의 벌칙 계수를 결정하였다. 격벽은 y축과 z축으로 각각 10개씩 분할하였다:  $w_p = w/10; h_p = h/10$ . 전체 설계 변수 100개 중에서, 98개의 설계 변수 값은 1로 고정되어 있고, 두 개의 설계 변수( $\chi_{45}, \chi_{55}$ )는 식 (12)를 만족시키



$\chi_m = 1, (m=1, \dots, 100, m \neq 45, 55)$

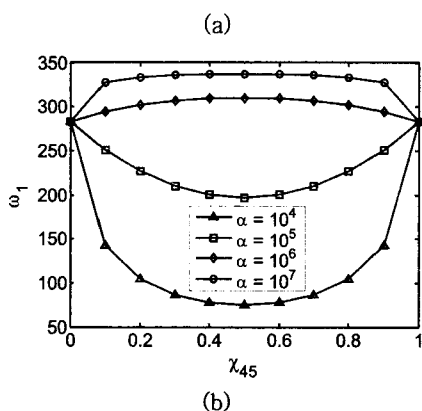


Fig. 7 Two-dimensional numerical problems used to determine appropriate penalty exponent values: (a) optimized layout, (b) the variation of the first eigenfrequency as a function of  $\chi_{45}$  for varying penalty exponent values

면서 변화한다:  $V_o = 0.99$ .

$$\begin{aligned} \chi_{45} + \chi_{55} &= 1 \\ 0 \leq \chi_{45} \leq 1, \quad 0 \leq \chi_{55} \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Fig. 7(b)는, 네 개의 벌칙 계수 값에 대하여, 설계 변수  $\chi_{45}$ 의 변화에 대한 1차 고유주파수의 변화를 나타낸다. 수치 예제A에서와 마찬가지로,  $\chi_{45}$ 의 양끝 값과 중간 값에서의  $\omega_1$  값을 비교하고  $\omega_1$ 의 변화율을 고려하여,  $\alpha = 10^6$ 과  $\alpha = 10^5$ 를 각각 고유주파수 최소화 문제와 최대화 문제의 벌칙 계수로 선정하였다.

(2) 수치 예제 D: 고유주파수 최소화/최대화

Fig. 2(b)의 2차원 구멍 분포 문제의 최소/최대 고

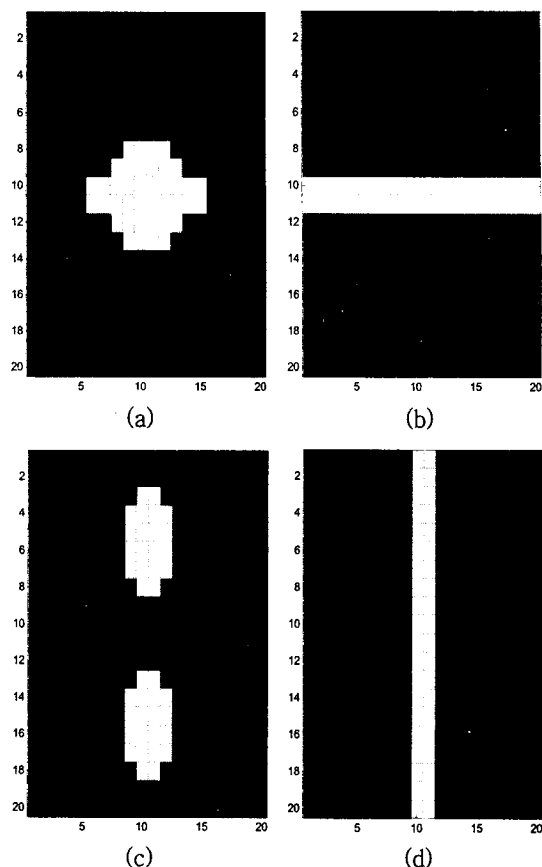


Fig. 8 Optimized two-dimensional partition layouts for minimized eigenfrequency: (a) 486.9 rad/s, (b) 500.2 rad/s, (c) 532.4 rad/s, (d) 543.2 rad/s

유주파수를 구하기 위해, 다음과 같은 크로스 모드 (cross-mode)를 식 (10)에 사용하여 초기값을 선정하였다.

$$\begin{aligned} \Xi_q(y_m, z_m) &= \cos(q_y \pi (y_m / w_p - 0.5) / M_y) \\ &\quad \cdot \cos(q_z \pi (z_m / h_p - 0.5) / M_z) \end{aligned} \quad (13)$$

$$(y_m / w_p = 1, 2, \dots, M_y), (z_m / h_p = 1, 2, \dots, M_z)$$

격벽을  $y$ 축과  $z$ 축으로 각각 20개씩 분할하였다:  $M_y = M_z = 20$ ,  $w_p = w / M_y$ ,  $h_p = h / M_z$ . 모두 20쌍의 크로스 모드가 사용되었다.  $(q_y, q_z)$ 의 순서쌍은 고유주파수가 가장 작은 고유모드로부터 순차적으로 결정하였다.

1차원 문제와 마찬가지로, 최종해는 초기값에 강하게 영향을 받았다. 고유주파수 최소화 문제에서

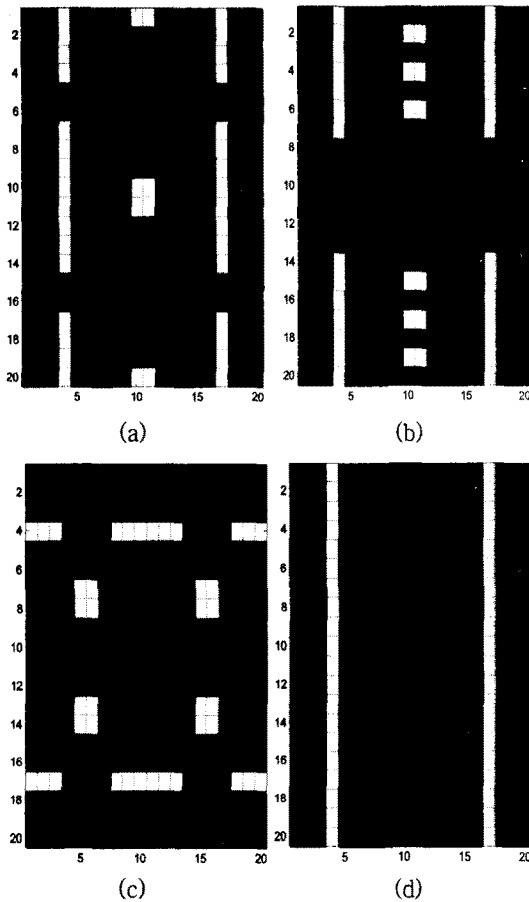


Fig. 9 Optimized two-dimensional partition layouts for maximized eigenfrequency: (a) 613.2 rad/s, (b) 612.0 rad/s, (c) 608.8 rad/s, (d) 607.0 rad/s

얻은 최종 구멍 분포 중에서, 고유주파수가 가장 작은 4개의 위상을 Fig. 8에 나타내었다. Fig. 8(a)와 8(c)는 하부 격벽의 1차원 배열만으로는 구할 수 없는 해이다. Fig. 8(b)는 Fig. 5(a)와 동일한 위상 분포이다. 다만, 수치 계산에 사용된 유한요소모델의 메쉬 밀도(mesh density) 차이에 의해 해당하는 고유주파수 값이 상이할 따름이다. Fig. 8(a)와 Fig. 5(a)를 고려할 때, 구멍이 가능한 가운데 모일수록 고유주파수 값이 작아짐을 알 수 있다.

Fig. 9는 고유주파수 최대화 문제의 최종해 중에서 그 값이 가장 큰 4개의 최적 위상을 나열하였다. 고유주파수 최소화 문제의 해와 달리, 가능한 구멍이 서로 떨어져 있을수록, 고유주파수가 증가함을 알 수 있다.

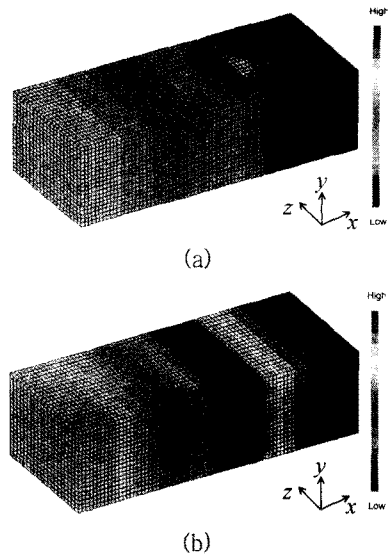


Fig. 10 The first acoustic modes of the optimized two-dimensional partition layouts: (a) topological layout in Fig. 8(a) and (b) topological layout in Fig. 9(a)

Fig. 10은 Fig. 8(a)와 Fig. 9(a)의 최적 위상을 갖는 이중 공동의 1차 음향 고유모드를 나타낸다. 각 음향 모드 그림을 얻기 위해 Sysnoise 5.5를 사용하였으며, 고유모드의 색깔은 음압의 절대값을 나타낸다.

#### 4. 최적해 고찰

최종해를 얻기 위해 필요한 수치 계산 횟수를 중심으로, 이 연구에서 제안한 방법의 공학적 타당성을 살펴본다. 즉, 위상 최적화 기법을 사용하지 않고 최적해를 얻는데 필요한 계산 횟수와 위상 최적화 기법을 이용하여 최적해를 얻는데 필요한 계산 횟수를 비교한다. 아울러, 위상 최적화 기법에 의해 구한 해와 실제 최적해의 차이도 살펴본다.

수치 예제 B에서, 가능한 모든 구멍 분포에 대해 고유주파수를 얻는데 필요한 계산 횟수는  ${}_{30}C_3 = 4060$  회이다. 2장에서 정식화된 음향 위상 최적화와 10개의 초기값을 사용하여 최소 고유주파수를 얻기 위해 필요한 음향 고유치 계산 횟수는 216회였다. 물론, 각 반복 계산시에, 설계 변수에 대한 미분값 계산이 요구되지만, 이에 소요되는 총 시간은 음향 고유치 계산에 사용되는 시간과 거의 같거나 작았다. 그리고, 이 연구에서 얻은 최소 고유주파수가 전체 최소 고유주파수



(global minimum eigenfrequency)였다. 10개의 초기값을 사용하여 최대 고유주파수를 구하는데, 필요한 총 계산 횟수는 179회였다. 얻어진 최대 고유주파수가 전체 최대 고유주파수(global maximum eigenfrequency)는 아니었지만, 두 값의 차이는 아주 작았다.

수치 예제 D에서, 20개의 서로 다른 초기값을 사용하여 최소 고유주파수와 최대 고유주파수를 얻을 때에 필요한 고유치 계산 횟수는 574와 309회였다. 가능한 모든 구멍 분포의 고유주파수를 얻는데 필요한 계산 횟수가  ${}_{100}C_{10} \approx 10^{13}$  인 것을 고려하면, 설계 변수의 개수가 증가할 수록, 이 연구에서 제시하는 방법의 공학적 적용 타당성을 확신할 수 있다.

## 5. 결 론

이 연구에서는 다중 구멍 격벽(multiple-hole partition)을 갖는 이중 공동의 고유주파수의 최소값 또는 최대값을 얻기 위한 두 개의 음향 위상 최적화 문제를 정식화하였으며, 수치 예제를 통해 제안된 방법의 공학적 타당성을 입증하였다. 기존의 해석적인 방법에 의한 설계 영역 분할과는 달리, 설계영역을 유한요소로 이산화하여 임의의 설계 영역을 쉽게 다룰 수 있도록 확장하였다. 최적화가 완료된 시점에 나타나는 형상이 공기와 강체의 분포로 수렴될 수 있는 벌칙 계수를 결정하였다. 또 설계 변수의 초기값이 균일한 경우에 최적해를 얻지 못하는 문제점을 해결하기 위해, 크로스 모드를 초기값으로 사용하는 방법의 유용성도 검증하였다. 위상최적화 기법과 모든 경우의 수를 살펴보는 직접적인 기법에서 요구되는 고유치 계산 횟수를 비교하여, 이 연구에서 제안한 수치 계산 방법의 공학적 유용성을 검증하였다.

## 후 기

이 연구는 서울대학교 정밀 기계설계공동연구소를 통해 체결된 창의적 연구 진흥사업(한국과학재단, 과제 번호 2007-019와 0420-2008-0011)의 지원으로 수행되었습니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Lee, J. W. and Lee, J. M., 2007, "Forced Vibro-acoustical Analysis for a Theoretical Model of a Passenger Compartment with a Trunk-Part I: Theoretical Part", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, No. 4-5, pp. 900~917.
- (2) Lee, J. W. and Lee, J. M., 2007, "Forced Vibro-acoustical Analysis for a Theoretical Model of a Passenger Compartment with a Trunk-Part II: Experimental Part", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 299, No. 4, pp. 918~932.
- (3) Lee, J. W., Lee, J. M. and Kim, S. H., 2004, "Acoustical Analysis of Multiple Cavities Connected by Necks in Series with a Consideration of Evanescent Waves", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 273, No. 4~5, pp. 515~542.
- (4) Lee, J. W. and Lee, J. M., 2007, "An Improved Mode Superposition Method Applicable to a Coupled Structural-acoustic System with a Multiple Cavity", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, No. 3-5, pp. 821~845.
- (5) Dowell, E. H., Gorman, G. F. and Smith, D. A., 1977, "Acoustoelasticity: General Theory, Acoustic Natural Modes and Forced Response to Sinusoidal Excitation, Including Comparisons with Experiment", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 52, No. 4, pp. 519~542.
- (6) Morse, P. M. and Ingard, K. U., 1968, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill Book Company, New York.
- (7) Fahy, F. J. and Schofield, C., 1980, "A Note on the Interaction between a Helmholtz Resonator and an Acoustic Mode of an Enclosure", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 72, No. 3, pp. 365~378.
- (8) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N., 1988, "Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method", *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197~224.
- (9) Bendsøe, M. P. and Sigmund, O., 2003, *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Springer Verlag, Berlin.
- (10) Sigmund, O. and Jensen, J. S., 2005, "Sys-

tematic Design of Acoustic Devices by Topology Optimization”, Proceedings of ICSV12, Lisbon, pp. 197~224.

(11) Lee, J., Wang, S. and Dikec, A., 2004, “Topology Optimization for the Radiation and Scattering of Sound from Thin-body Using Genetic Algorithms”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 276, No. 3-5, pp. 899~918.

(12) Wadbro, E. and Berggren, M., 2006, “Topology Optimization of an Acoustic Horn”, Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering, Vol. 196, No. 1-3, pp. 420~436.

(13) Lee, J. W. and Kim, Y. Y., 2007, “Muffler Design Using a Topology Optimization Method”, Proceedings of the KSNVE Annual Spring Conference, pp. 1085~1089.

(14) Lee, J. W. and Kim, Y. Y., 2007, “Controlling the Fundamental Eigenfrequency of a Hole-partitioned Double Cavity by a Topology Optimization Method”, Proceedings of the 7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Seoul, CD-Rom.

(15) Lee, J. W. and Kim, Y. Y., 2007, “Partition Hole Design for Maximizing or Minimizing the Fundamental Eigenfrequency of a Double Cavity by Topology Optimization”, Proceedings of the 14th International Congress on Sound and Vibration, Cairns, Australia, CD-Rom.

(16) Lee, J. W. and Kim, Y. Y., 2008, “Optimal Distribution of Holes in a Partition Interfacing two Cavities for Controlling Eigenfrequencies by Acoustical Topology Optimization”, Submitted.

(17) Jensen, J. S. and Pedersen, N. L., 2006, “On Maximal Eigenfrequency Separation in Two-material Structures: the 1D and 2D Scalar Cases”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 289, No. 4-5, pp. 967~986.

(18) Svanberg, K., 1987, “The Method of Moving Asymptotes: a New Model for Structural Optimization”, Internal Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, No. 2, pp. 359~373.

(19) Lee, J. S., Kim, J. E. and Kim, Y. Y., 2006, “A Feasibility Study on the Application of the Topology Optimization Method for Structural Damage Identification”, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 16, No. 2, pp. 115~123.

(20) Maeda, Y., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M., Matsui, K. and Terda, K., 2006, “Structural Topology Optimization of Vibrating Structures with Specified Eigenfrequencies and Eigenmode Shapes”, Internal Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 67, No. 5, pp. 597~628.

(21) Stople, M. and Svanberg, K., 2001, “An Alternative Interpolation Scheme for Minimum Compliance Topology Optimization”, Structural and Multidisciplinary Optimization, Vol. 22, No. 2, pp. 116~124.

(22) Lee, J. S., Kim, E. I. Kim, Y. Y., Kim, J. S., and Kang, Y. J., 2007, “Optimal Poroelastic Layer Sequencing for Sound Transmission Loss Maximization by Topology Optimization Method, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 122, No. 4, pp. 2097~2106.