한국소음진동공학회논문집 제 18 권 제 11 호, pp. 1111~1117, 2008.

RecurDyn을 이용한 동적 해석 시 마찰모델에 따른 적분 안정성 및 정확성 연구

Study on the Integration Stability and the Accuracy of Some Friction Models for the Dynamic Analysis Using Recurdyn

유 홍 희† · 이 준 희*

Hong Hee Yoo and Jun Hee Lee

(2008년 8월 8일 접수 ; 2008년 9월 30일 심사완료)

Key Words : Contact(접촉), Friction(마찰), Integration Step Size(적분 시간 간격), Dynamic Analysis(동적 해석), Self Excited Vibration(자려 진동)

ABSTRACT

During the dynamic analysis of a system, the Coulomb friction law is employed to calculate the friction force. Since the static friction coefficient is only employed during the zero relative velocity, it is impractical to employ the coefficient during the dynamic analysis. To calculate the static friction force, therefore, some friction models have been developed. In this study, the integration stability and the accuracy of the models are investigated with some numerical examples. The effect of time step size during the numerical integration is also investigated. The numerical study shows that the friction model employed for most commercial codes is not as good as the one proposed in this study.

기 호 설 명

μ_s : 정적 마찰계수
μ_k : 동적 마찰계수
v_s : 정적 천이속도(m/s)
v_d : 동적 천이속도(m/s)

1. 서 론

다물체 동역학에 관한 연구에서는 물체 사이에 일어나는 접촉현상을 효과적으로 반영하고자 하는 많은 노력이[1,2] 있어왔다. 임의의 두 강체 사이에 접촉이 일어날 경우, 그 접촉점에서는 수직항력과 접선방향의 마찰력이 발생하게 된다. 그런데 접선방향 마찰력에 대해 쿨롱의 이론적인 마찰 모델을 적용하면 물체간의 상대속도가 0이 되는 점에서 힘의 불연속이 발생하여 수치적분 시 종종 문제가 발생한다. 그러므로 대부분의 다물체 동역학 프로그램들에서는 이러한 문제를 해결하기 위해 마찰계수를 Spline 함수로[3,4] 모델링하여 사용하기도 한다. 그러나, 대부분의 상용프로그램에 사용하고 있는 마찰 모델은 두 강체가 점착 조건으로 접촉하고 있을 때 저속 미끄럼 현상이 발생하는 문제점들을 갖고 있다. 이는 두 강체 사이의 상대속도가 0에 가까워짐에 따라서 마찰계수가 0에 가까워지고 접선 방향 마찰력 역시 0에 가까워지기 때문에 정지 마찰력이 작용해야 하는 경우에도 두 강체가 점착 되지 못하고 미끄럼이 발생하기 때문이다. 또한 이러한 기존의 모델들은 마찰에 의한 자려 진동 현상을 구현하기에도 어려움이 있었다. 즉 기존의 마찰모델이 물체 간의 접촉 현상

† 교신저자 : 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02)2220-0446, Fax : (02)2293-5070
* 정회원, 한양대학교 대학원 기계공학과

을 제대로 구현하지 못했던 것이다. 이에 따라 이러한 문제점들을 극복하기 위한 연구가 이루어져 왔고, 두 강체 사이의 접촉 모델에 사용될 새로운 형태의 마찰계수 함수가[5] 제시되었다. 새로 제안된 마찰모델을 이용하여 상용 프로그램에 사용되는 마찰모델의 문제점인 저속 미끄럼현상이 개선되었고, 자려 진동 현상 또한 성공적으로 구현하였다.

그러나 지금까지의 연구에서는 동적 해석 시에 주어져야 하는 적분 시간 간격과 오차 허용범위의 변화에 따른 해석 안정성과 정확도에 관한 검증이 이루어지지 않았다. 적분 시간의 간격과 오차 허용범위는 일반적으로 해의 정확도에 중요한 영향을 미친다. 일반적으로 적분 시간의 간격이 좁아질수록 정확도는 그만큼 더 좋아진다. 반면 적분 시간 간격이 좁아지면 간격이 넓을 때 보다 계산시간이 많이 소요됨으로 이에 따른 해의 수렴성에 관한 검증이 필요하다.

이 연구에서는 쿨롱의 이론적 마찰 모델과 현재 상용 해석 프로그램들에서 사용되는 마찰 모델, 그리고 기존 모델의 문제점을 개선한 마찰 모델[5]을 적용하여 동적 해석이 적분 시간 간격과 허용 오차 범위의 변화에 따라서 어떻게 달라지는지에 대한 연구를 수행하였다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어서 2장에서는 이 연구에서 사용된 마찰 모델들에 대해 비교 분석 하였고, 3장에서는 마찰 모델들을 적용할 예제들을 제시하고 동적 해석 시 적분 시간 간격과 허용 오차범위를 변화시켜가며 그 결과를 비교 분석하였다. 마지막으로 4장에서는 이 논문의 결론을 요약하여 수록하였다.

2. 접촉 모델링

2.1 쿨롱의 마찰계수 함수

Fig. 1은 쿨롱의 마찰계수 모델을 나타내는데 이론적인 모델에서는 υ_s가 0에 접근하는 값을 갖는다. 이 모델의 해석적인 표현은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_s \qquad (0 < \upsilon < \upsilon_s) \\ \mu &= \mu_k \qquad (\upsilon > \upsilon_s) \end{aligned} \tag{1}$$

상대속도가 υ_s보다 작은 경우는 정적 마찰계수 μ_s가 사용되고, 상대속도가 υ_s보다 큰 경우는 동적

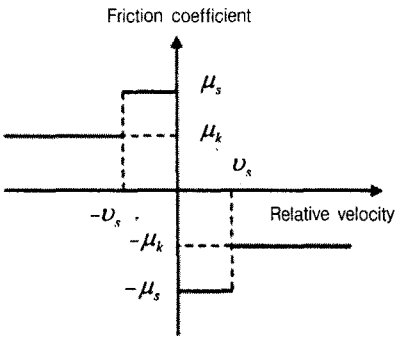

Fig. 1 Coulomb friction coefficient function model

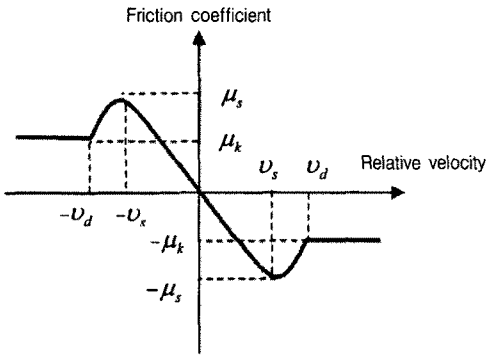

Fig. 2 Relations between relative velocity and friction coefficient employed in most commercial codes

마찰계수 μ_k가 사용된다. 그러나 이 마찰모델을 적용하여 수치 적분을 수행할 때 함수의 불연속으로 인해 문제가 종종 발생한다.

2.2 상용 프로그램의 마찰계수 함수

Fig. 2는 대부분의 다물체 동역학 해석 프로그램에서 사용하는 마찰계수 함수모델을 보여준다. 이 모델에서는 마찰계수를 υ_s와 υ_d의 두 가지 천이속도(transition velocity)와 정적 그리고 동적 마찰계수를 이용하여 정의한다. 이때 상대속도가 υ_s값보다 작을 경우 다음과 같이 정의된 마찰계수함수[6,7]가 사용된다.

$$\mu = hav\sin(\upsilon, 0, 0, \upsilon_s, \mu_s) \tag{2}$$

또한 상대속도가 $\upsilon_s < \upsilon < \upsilon_d$일 경우에는

$$\mu = hav\sin(\upsilon, \upsilon_s, \mu_s, \upsilon_d, \mu_k) \tag{3}$$

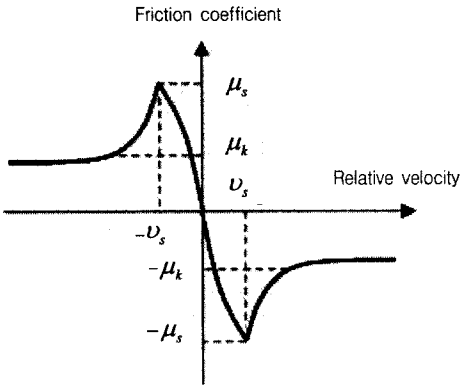

Fig. 3 Proposed friction coefficient function model

일 때 정확한 결과를 얻지 못하고 있다. 이는 힘의 불연속으로 인한 수치적분상의 에러를 방지하기 위해 사용되는 마찰계수 함수에서 속도가 0에 가까워짐에 따라 마찰력 또한 0에 가까워지면서 필연적으로 발생하는 현상이다.

2.3 제안된 마찰계수 함수

Fig. 3은 상용 프로그램에서 사용되는 마찰계수 함수의 문제점을 개선하기 위해 제안된 마찰계수 함수이다. 이 함수는 다음 식들에 의해 나타내어 질 수 있다.

$$\begin{aligned} \mu &= -a^{(\upsilon-b)} - \mu_k \qquad (\upsilon < -\upsilon_s) \\ \mu &= \frac{\mu_s}{(\upsilon_s)^\beta}\upsilon^\beta \qquad (-\upsilon_s \le \upsilon \le \upsilon_s) \\ \mu &= a^{-(\upsilon+b)} + \mu_k \qquad (\upsilon > \upsilon_s) \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 μ_k와 μ_s는 동적 및 정적 마찰계수를 나타내며 β와 $a\,(>1.0)$의 값은 사용자가 결정하는 상수값이고 b는 위 값들이 정해지면 계산되는 상수값이다.

3. 모델링 예제

다음 예제들은 다물체 동역학 해석 프로그램 RecurDyn을 사용해 해석하였으며 RecurDyn 마찰함수를 사용한 결과를 쿨롱의 이론모델 및 제안된 함수 모델에 의한 결과와 비교하였다.

3.1 비탈면 상의 물체

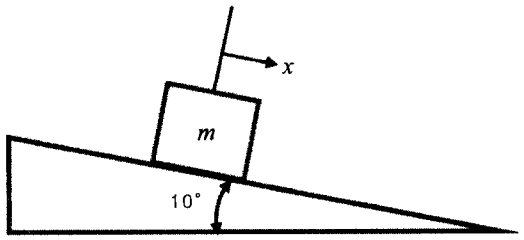

Fig. 4 A box lying on a slanted plane

Table 1 Input parameters

m=10 kg, μ_s=0.35, μ_k=0.3, υ_s=0.01 m/s	
RecurDyn	υ_d=0.15 m/s
Proposed	β=1/3, a=1.5

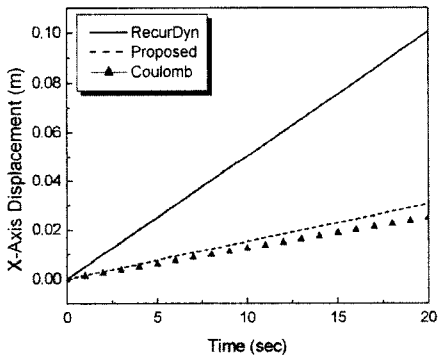

Fig. 5 Comparison of x-direction displacement contained with three friction models

Fig. 4는 10° 만큼 기울어진 평면에 질량 m을 갖는 상자가 놓여져 있는 시스템이다.

Fig. 5는 Table 1의 데이터를 사용하고 각 마찰계수 함수들을 적용하고 1×10^{-6}~1×10^{-2} sec 사이의 적분 시간 간격을 자동으로 상용 프로그램상에서 변화될 수 있게 하여 해석을 수행한 결과값들이다. Table 1의 데이터를 사용했을 때는 두 강체 사이에 점착이 일어나 비탈면 상에서 정지해 있어야 한다. 하지만, 그림에서 보는 바와 같이 RecurDyn의 마찰계수 함수를 사용했을 때 20초 동안 x축으로 0.1 m 만큼 미끄러져 내려가는 것을 확인 할 수 있다. 반면, Coulomb의 모델과 제안된 함수 모델을 사용했을 때는 미끄러짐 현상이 RecurDyn의 결과보다 개선된 것을 볼 수 있다.

Figs. 6~8은 각각의 마찰계수 함수를 사용하여 시

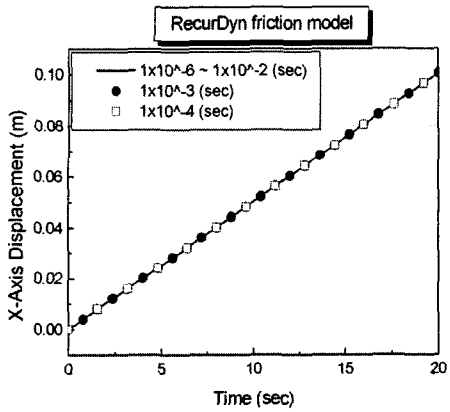

Fig. 6 Variation of x-direction displacement with three integration step sizes using RecurDyn friction model

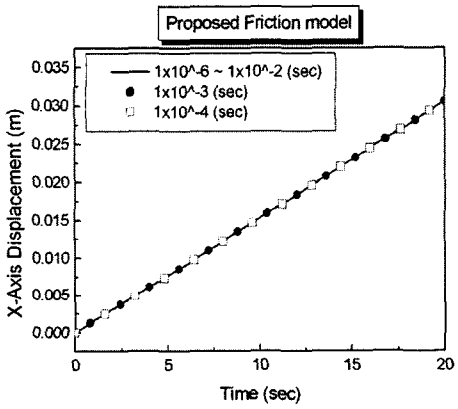

Fig. 7 Variation of x-direction displacement with three integration step sizes using proposed friction model

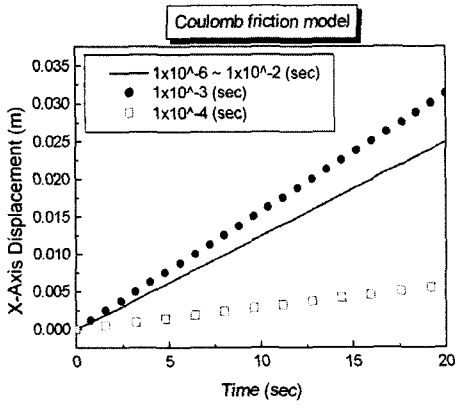

Fig. 8 Variation of x-direction displacement with three integration step sizes using Coulomb friction model

스템을 해석할 때 적분 시간 간격을 변화시키면서 그 결과를 비교했다. 먼저 Fig. 6의 결과를 살펴보면 적분 시간 간격을 1×10^{-6}~1×10^{-2} sec사이에서 변화시켰을 때와 임의로 적분 시간 간격을 지정 하였을 때가 같은 결과를 도출했다. 이는 RecurDyn 프로그램에서 사용되는 마찰계수 함수를 사용하여 해석을 수행했을 때 적분 시간 간격에 상관없이 그 결과가 안정적이고 정확성을 띄고 있다는 것을 보여준다.

Fig. 7은 상용화된 마찰계수 함수의 문제점을 개선하기 위해서 제안된 함수에 의한 결과이다. 적분 시간 간격을 Fig. 6에서와 같이 변화시키면서 20초 동안 축 방향으로의 변위를 비교하였다. 그 결과는 상용화된 마찰계수 함수와 마찬가지로 적분 시간 간격에 상관없이 일정한 변위를 보였다. 그러나 미끄럼 변위의 크기는 훨씬 더 작은 값을 가짐을 알 수 있다.

Fig. 8은 이론적인 쿨롱의 모델에 의한 결과이다. 적분 시간 간격을 변화시키면서 축 방향으로의 변위를 비교하였다. 앞의 두 마찰계수 함수들의 결과와 다르게 적분 시간 간격이 변할 때마다 다른 결과값이 보이는 것을 확인 할 수 있다. 고전적인 쿨롱의 마찰계수 함수를 사용하여 시스템을 해석할 경우 적분 시간 간격에 따라 서로 다른 결과를 얻는 이유는 다른 마찰계수 함수들과 이 함수는 힘의 불연속성을 갖기 때문이다.

Table 2는 적분 시간 간격에 따른 각 마찰모델의 해석 시간을 비교하고 있다. RecurDyn 마찰모델과 제안된 마찰모델, 그리고 쿨롱의 마찰모델들은 모두 시간간격이 짧아질수록 해석 시간이 크게 길어지는 것을 알 수 있다.

Fig. 11은 허용 오차범위를 변화시키며 쿨롱의 마찰계수 함수를 사용하여 시스템을 해석한 결과이다. Fig. 9와 Fig. 10은 허용 오차범위를 변화시키면서

Table 2 CPU time with different integration step size using three friction models

	CPU Time with Integration step size		
Friction model	Automatic	1×10^{-3}	1×10^{-4}
RecurDyn	8 sec	66 sec	654 sec
Proposed	7 sec	64 sec	651 sec
Coulomb	65 sec	65 sec	656 sec

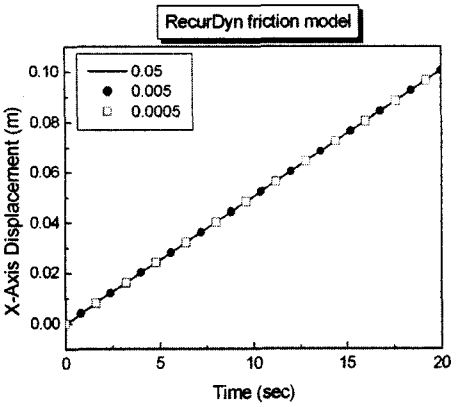

Fig. 9 Variation of x-direction displacement with three error tolerance sizes using RecurDyn friction model

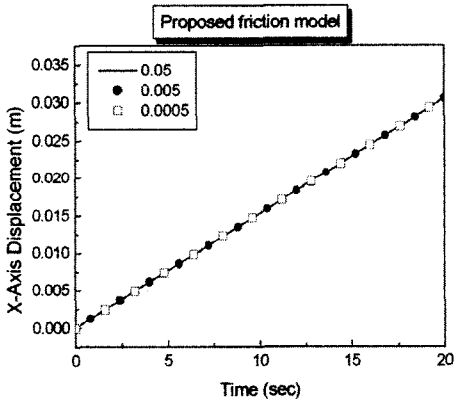

Fig. 10 Variation of x-direction displacement with three error tolerance sizes using proposed friction model

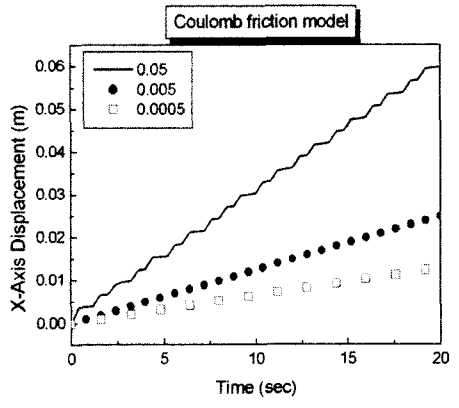

Fig. 11 Variation of x-direction displacement with three error tolerance sizes using Coulomb friction model

시스템을 해석해도 같은 변위 값을 얻는데 반해, Fig. 11에서는 허용 오차범위에 따라 x축 방향으로의 변위가 변하는 것을 알 수 있다.

3.2 움직이는 벨트 위에서 자려 진동하는 물체

Fig. 12는 일정 속도 v_b로 움직이는 벨트 위에 스프링 k가 연결된 질량 m을 갖는 물체가 놓여 있는 시스템[8]이다. 이때 물체의 x축 방향 변위를 보고자 한다.

Fig. 13은 Table 1의 데이터를 이용하여 상용 프로그램에서 사용하고 있는 마찰계수 함수와 제안 된 마찰계수 함수 그리고, 고전적인 쿨롱의 마찰 계수 함수를 이용해 비교한 결과이다. 위 결과는 적분 시간 간격을 상용프로그램 즉, RecurDyn에서 사용되는 기본값인 1×10^{-6}~1×10^{-2} sec 구간에서 수행되었다. Fig. 13에서 확인할 수 있듯이 쿨롱의 마찰 계수 함수와 Recurdyn 프로그램에서 사용하고 있는 마찰계수 함수는 자려 진동 현상을 구현하지 못하고 있다. 이에 반해 제안된 마찰계수 함수는 자려 진동 현상을 성공적으로 구현하고 있다. 이는 대부분의 다물체 동역학 해석 프로그램에서 사용되는 마찰모델이 힘의 불연속으로 인한 수치적분 상의 문제점은 발생하지 않지만, 상대속도가 0에 가까워짐에 따라 0으로 접근하는 마찰력에 의해 제대로 된 마찰력 값을 제공하지 못함을 보여주는 것이다.

Figs. 14~16은 각각의 마찰계수 함수를 사용하여 시스템을 해석할 때 적분 시간의 간격을 변화시켜 가면서 그 결과를 비교했다.

Fig. 14는 앞서 소개했던 비탈면 예제와는 달리, 상용 프로그램에 사용되는 마찰계수 함수를 자려 진동 예제에 적용했을 때에 적분 시간 간격을 변화 시킴에 따라 x축 방향으로의 변위의 값이 서로 다름을 확인할 수 있다. 더 짧은 적분 시간 간격을 사용할 수록 시스템의 동적 반응이 증가하는 것을 알 수 있다.

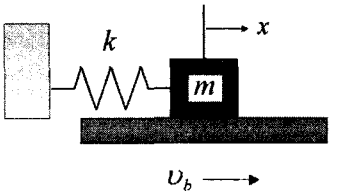

Fig. 12 Spring-mass system on a moving belt (m=10 kg, k=300 N/m, v_b=1.5 m/s)

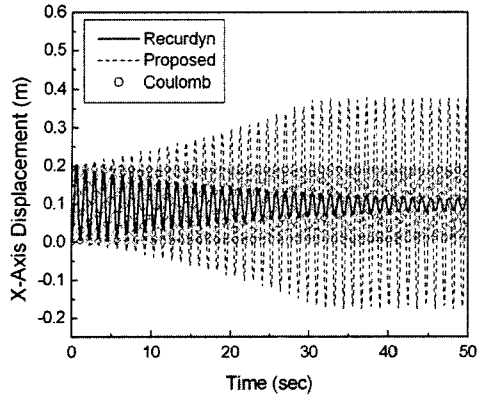

Fig. 13 Comparison of x-direction displacement about each friction model

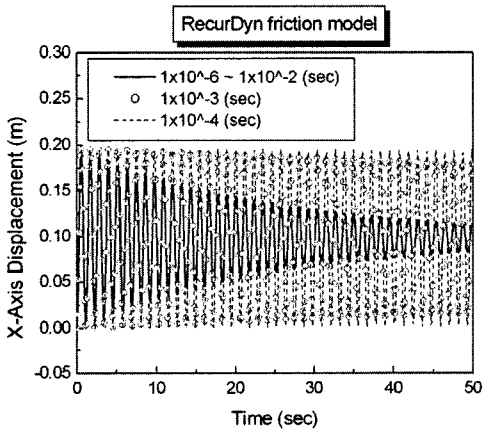

Fig. 14 Variation of x-direction displacement with three integration step sizes using Recurdyn friction model

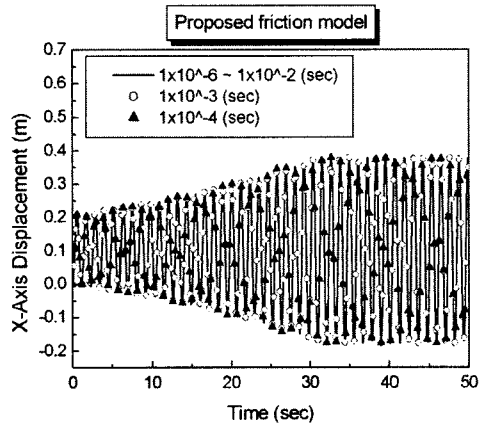

Fig. 15 Variation of x-direction displacement with three integration step sizes using proposed friction model

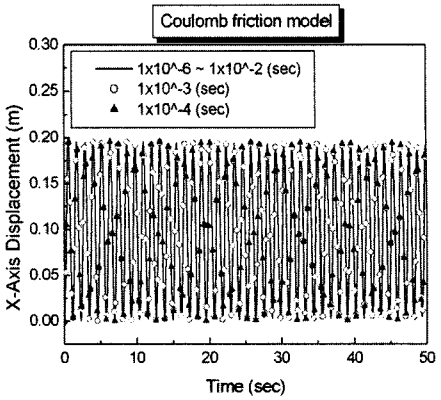

Fig. 16 Variation of x-direction displacement with three integration step sizes using Coulomb friction model

Table 3 CPU time with different integration step size using three friction models

	CPU Time with Integration step size		
Friction model	Automatic	1×10^{-3}	1×10^{-4}
RecurDyn	18 sec	167 sec	1709 sec
Proposed	159 sec	167 sec	1701 sec
Coulomb	225 sec	223 sec	1674 sec

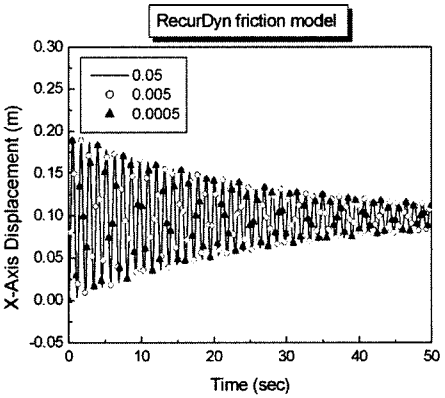

Fig. 17 Variation of x-direction displacement with three error tolerance sizes using RecurDyn friction model

이는 해석의 정확성을 떠나서 상용 프로그램이 갖는 단점으로 지적될 수 있다.

Figs. 15와 16에서 사용된 마찰계수 함수들은 Fig. 14에서 사용된 상용 마찰계수 함수와 다르게 적분 시간 간격을 더 짧게 변화시켜도 동일한 해석 결과를

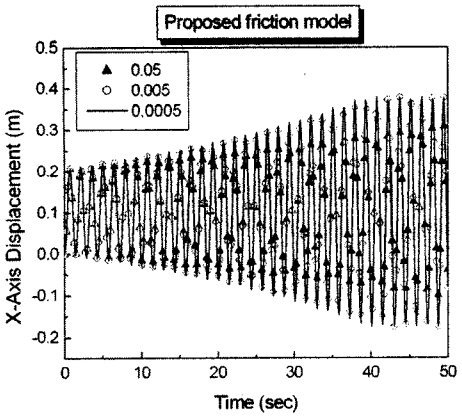

Fig. 18 Variation of x-direction displacement with three error tolerance sizes using proposed friction model

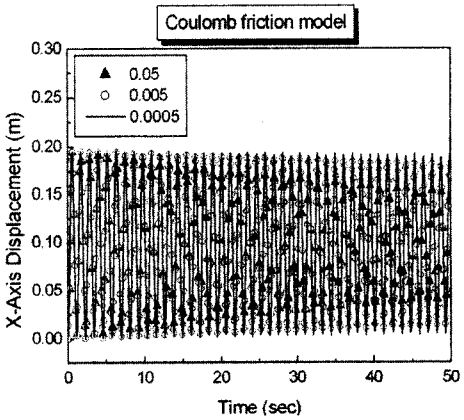

Fig. 19 Variation of x-direction displacement with three error tolerance sizes using Coulomb friction model

보였다. 이 결과는 제안된 마찰 모델이 자려진동 예제에 대해서 정확성과 더불어 적분 시간 간격에 따른 해석결과의 강건성을 갖는 것을 보여준다.

Table 3은 적분 시간 간격의 변화에 따라 논문에서 다룬 세가지 마찰 모델들이 시스템의 동적 해석 시 사용한 해석시간을 보여주고 있다. 이 결과는 앞의 예제와 동일한 결과를 보여준다.

Figs. 17~19는 허용 오차범위를 변화시키면서 세 마찰 모델들을 사용하여 얻어진 해석 결과들이다.

제안된 마찰모델은 오차를 줄일수록 Fig. 17은 변화가 없는 반면, Figs. 18, 19는 x축 방향으로 변위가 증가하고 있다. 해석결과가 달라지는 모습을 보여주는데 이는 자연스러운 결과라 할 수 있다.

4. 결 론

이 연구에서는 3가지 마찰 모델들에 대하여 다물체 동역학 해석 시에 적분 시간 간격과 허용 오차에 따른 수치해석의 안정성과 정확성에 대해서 조사하였다. 해석결과에 따른 분석결과는 새로 제안된 모델이 정확성과 더불어 수치해석 시의 적분 시간 간격변화에 따른 강건성을 가지고 있음을 잘 보여주었다.

후 기

이 논문은 2008년도 2단계 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었습니다.

참 고 문 헌

(1) Park, J. H., Yoo, H. H. and Hwang, Y. H., 2000, "Multibody Dynamic Analysis for Contacting Rigid Bodies", Trans. of the KSME(A), Vol. 24. No. 2, pp. 411~420.

(2) Park, J. H., Yoo, H. H. and Hwang, Y. H., 1999, "Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems Using Partial Velocity Matrix", Trans. of the KSME(A), Vol. 23. No. 5, pp. 861~870.

(3) Denny, M., 2004, "Stick-slip Motion: and Important Example of Self-excited Oscillation", Eur. J. Phys. 25, pp. 311~322.

(4) Li, Y., Feng, Z. C., 2004, "Bifurcation and Chaos in Friction-induced Vibration", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 9, pp. 633~647.

(5) Roh, H. Y. and Yoo, H. H., 2007, "Friction Model to Realize Self-excited Vibration of Multibody Systems", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17. No. 6, pp. 524~530.

(6) RecurDyn Manual(version6.2), 2005.

(7) RecurDyn Manual(version6.3), 2006.

(8) Thomson, W. T., 1998, "Theory of Vibration with Applications", 4th Edition, Prentice Hall.