응용통계연구 (2008)
21(5), 801–811

추세계수 국소선형근사법의 특성과 해석

윤민[1] · 최영수[2] · 이윤동[3]

[1]건국대학교 응용통계학과; [2]한국외국어대학교 수학과; [3]건국대학교 응용통계학과

(2008년 9월 접수, 2008년 9월 채택)

요 약

확산모형은 금융현상을 모형화하기 위한 방법으로 자주 사용된다. 특히 최근에 제안된 다양한 확산모형들은 정교한 추론방법을 필요로 하게 되고, 이러한 필요성에 따라 정밀도가 높은 여러 가지 추론 방법에 대한 연구가 진행되고 있다. 본 논문에서는 확률편미분방정식에 의하여 표현되는 확산과정의 추론을 위하여 사용되는 여러 가지 방법 중 우도추론법에 대하여 살펴보게 된다. 다양한 우도추론법 중에서도, 근사적 우도추론법의 일종인 추세계수 국소선형근사법을 중심으로 그 수리적 성질을 검토한다.

주요용어: 금융확산모형, 확률편미분방정식, 우도추론법.

1. 서론

확산모형은 미세분자의 움직임과 같은 물리 현상의 모형화 뿐만 아니라, 금융현상의 확률적 해석을 위하여 자주 사용되는 모형이다. 수리적으로 확산모형 X_t는, 추세계수 $a_t = a(\theta, t, X_t)$와 확산계수 $b_t = b(\theta, t, X_t)$를 갖는 확률편미분방정식

$$dX_t = a_t dt + b_t dW_t \tag{1.1}$$

의 해로서 주어지는 연속형 표본경로를 갖는 연속시간 마코프 확률과정이다. 이에 대한 엄격한 수리적 표현은 Kloeden과 Platen (1999, p.36)에 있고, 확률편미분방정식 (1.1)이 해를 갖게 될 조건은 Oksendal (2003, p.68)에서 찾을 수 있다. 추세계수 a_t와 확산계수 b_t의 형태에 따라 다양한 확산과정이 정의된다. Bachelier (1900)와 Samuelson (1965)이 브라운운동과 기하브라운운동(Geometric Brownian Motion: GBM)을 통하여 금융현상을 설명한 이후, 금융현상의 설명을 위하여 다양한 형태의 확산모형이 제안되고 연구되었다 (*cf.* Chan 등, 1992; Ahn과 Gao, 1999). 표 1.1은 관심있게 연구된 다양한 형태의 확산모형들을 보여주고 있다.

Cox (1975)는 Constant Elasticity of Variance(CEV) 모형을 제안하였고, Marsh와 Rosenfeld (1983)는 CEV 모형을 이자율 모형화에 적용하였다. Vasicek (1977) 모형은 Ornstein-Uhlenbeck(OU) 확률과정이라고 불리며, 채권가격 할인에 대한 균형 모형을 계산하는 경우 등 다양한 분야에 응용되고 있다. CIR 모형은 Cox 등 (1985)에 의하여 제안되었고, Feller의 제곱근 확률과정이라고도 불린다. 이

본 연구는 한국학술진흥재단 2006년 신진교수연구비 지원에 (C00056) 의하여 수행되었음.
[1](143-701) 서울시 광진구 화양동 건국대학교 응용통계학과, 강의교수. E-mail: myoon515@konkuk.ac.kr
[2](449-791) 경기도 용인시 모현면 황산리 산 89, 한국외국어대학교 통계학과, 교수. E-mail: choiys@hufs.ac.kr
[3]교신저자: (143-701) 서울시 광진구 화양동 건국대학교 응용통계학과, 부교수.
E-mail: poisson@dreamwiz.com

표 1.1. 다양한 확산모형들

모형 (년도)	$a(x)$	$b(x)$
Bachelier (1900)	α	σ_0
GBM (1965)	βx	$\sigma_0 x$
CEV (1975)	βx	$\sigma_0 x^\gamma$
Visicek (1977)	$\alpha+\beta x$	σ_0
BS (1980)	$\alpha+\beta x$	$\sigma_0 x$
CIR VR (1980)	0	$\sigma_0 x^{3/2}$
CIR (1985)	$\alpha+\beta x$	$\sigma_0 x^{1/2}$
CKLS (1992)	$\alpha+\beta x$	$\sigma_0 x^\gamma$
DK (1996)	$\alpha+\beta_1 x+\beta_2 x^2$	$\sigma_0\sqrt{\sigma_1+x}$
Aït-Sahalia (1996)	$\alpha+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\beta_3/x$	$\sigma_0\sqrt{\sigma_1+\sigma_2 x+x^{2\gamma}}$
CHLS (1997)	$\alpha+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\beta_3/x$	$\sigma_0 x^\gamma$
AG (1999)	$x(\alpha+\beta x)$	$\sigma_0 x^{1.5}$

모형은 이자율에 민감한 파생상품에 대한 가격 평가를 위한 모형으로 자주 이용된다. 특히 OU 확률과정과 CIR 모형은, GBM과 마찬가지로 그 전환확률이 명확한 형태로 주어진다는 점 때문에 이론 연구들에 있어서 자주 거론되는 대표적인 확산모형이다. OU 확률과정과 CIR 모형에 대한 자세한 사항은 Aït-Sahalia (1999)에서 찾을 수 있다. Chan 등 (1992)이 CEV모형이나 CIR 모형 등 기존에 제안된 모형을 일반화하여 통합하기 위한 방안으로 제안한 모형이 Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders(CKLS) 모형이다. Brennan과 Schwartz (1980)에 의하여 제안된 BS 모형, Cox 등 (1980)에 의하여 제안된 CIR VR(variable rate) 모형 등도 CKLS 모형의 특수한 경우이다. Duffie와 Kan (1996)은 CIR 모형의 추세계수에 x^2-항을 추가하고, 확산계수에 상수항을 추가한 DK 모형을 제안하였다. Conley 등 (1997) 은 Aït-Sahalia 모형과 동일한 추세계수를 가지면서도, CEV 모형이나 CKLS 모형에서와 같이 보다 단순한 형태의 확산계수를 가지는 모형 Conley, Hansen, Luttmer, Scheinkman(CHLS)을 제안하였다. Ahn과 Gao (1999)는 CIR 모형의 추세계수와 확산계수에 각각 x가 곱해지는 형태의 AG 모형의 성질을 연구하였다. Bali와 Wu (2006)는 위의 모형들을 통합하는 모형으로 추세계수에 5차 다항식과 $1/x$-항을 포함하고, Aït-Sahalia 모형의 확산계수를 고려하여 11개의 모수가 개입된 모형을 고려하였다.

금융현상에 대한 연구가 진전됨에 따라 모형들이 점점 복잡해지고, 모형의 추세계수(drift coefficient)와 확산계수(diffusion coefficient)에 더 많은 모수들이 개입되는 모형들이 제안되고 있다. 이와 보조를 맞추어, 모수가 많아서 모형이 복잡 정교한 경우 이들 모수를 자료로부터 잘 추론할 수 있는 방법이 또한 중요하게 연구되고 있다. 본 논문에서는 이러한 확산모형의 추론 방법과, 그 중에서도 상대적으로 정교한 추론이 가능한 우도적 추론방법에 대하여 살펴보게 될 것이다. 정교한 추론 방법의 문제와는 별개로 중요하게 고려되어져야 하는 사항중 하나는, 모수가 많은 복잡한 모형이 과연 바람직한 가의 문제이다. 모형의 모수가 많다는 것은 통계 모형의 잔차가 갖는 자유도를 줄여서 통계적 검정 능력을 떨어뜨리는 역할을 한다. 일반적으로 복잡한 모형은 모형이 갖는 설명력과 예측력에 대한 신뢰성을 떨어뜨리기 때문에, 오히려 보다 적은 수의 모수를 갖는 단순한 형태의 절약적 모형(parsimonious model)이 선호되기도 한다. CHLS 모형은 Aït-Sahalia 모형에 비하여 모수가 절약적으로 사용된 모형이다. 절약적 모형의 장점을 살리면서 자료 해석력이 우수한 모형을 선정하기 위한 방법으로, 모수의 수가 다르고 다양한 형태의 모형들에 적용이 가능한 추론 방법으로 벌칙우도(penalized likelihood)와 같은 통계적 추론 방법을 적용하는 문제가 연구되고 있기도 하다.

확률편미분방정식 (1.1)에 의하여 정의되는 확산모형 X_t는 시간에 대하여 연속적인 표본경로를 갖는데 반하여, 확산모형에 대한 관측은 이산적 시점들 t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$에서만 가능하다. 때문에 이산적 시점에서 얻어진 자료 X_{t_i}로부터 연속 표본경로를 갖는 확산모형의 모수 θ를 추론하기 위하여 다양한 연구들이 수행되어왔다. 확산모형에 대한 추론방법들은 크게 적률추론법, 우도추론법, 기타 추론법으로 분류해 볼 수 있다. 적률추론법에는 일반화 적률추론법(Generalized Method of Moments: GMM), 효율적 적률추론법(Efficient Method of Moments: EMM), 시뮬레이션 적률추론법(Simulated Method of Moments: SMM) 등이 있다. 우도추정법에는 시뮬레이션 최대우도추정법(Simulated Maximum Likelihood Estimation method: SMLE), 근사적 최대우도추정법(Approximated Maximum Likelihood Estimation method: AMLE)과 같은 방법이 있다. SMLE에 대한 구체적인 내용은 Pederson (1995), Brandt와 Santa-Clara (2001), Durham과 Gallant (2001), Nicolau (2002)에서 찾을 수 있고, AMLE에 대한 연구로는 Shoji와 Ozaki (1998), Aït-Sahalia (1999, 2002, 2006), Aït-Sahalia와 Yu (2006) 등이 있다. 또한 모수에 대한 사전확률을 부여하고 MCMC 방법을 이용하여 사후확률을 계산하는 베이지안 추론법을 확산과정에 적용하기 위한 연구로는 Elerian 등 (2001), Eraker (2001)을 찾을 수 있다. Hurn 등 (2007)과 빈기범 (2005)은 비모수적 추론법이나 간접 추론법(indirect inference) 등과 같은 다양한 추론법과 그 성질을 검토하였다.

본 논문에서는 Shoji와 Ozaki (1998)가 확산모형의 추론방법으로 제안한 추세계수 국소선형근사법을 이용한 우도적 추론법에 대하여 살펴보게 될 것이다. 추세계수 국소선형근사법은 AMLE 방법의 일종이라고 할 수 있고, 다른 방법들에 비하여 그 이론적 전개가 단순하고, 계산이 빠르면서도 상대적으로 정확도가 높은 결과를 준다는 장점을 가지고 있다 (*cf.* Hurn 등, 2007). 다음 절에서는 논문을 전개하는데 필요한 확산과정과 관련된 기본적인 사항들에 대하여 먼저 검토하고, 다음으로 추세계수 국소선형근사법의 특징을 수리적 관점에서 검토하게 될 것이다.

2. 확산과정과 그 수리적 특성

확산모형으로부터 얻어지는 관측자료에 대한 우도(likelihood)는 전이확률 $p(s,\, x;\, t,\, y)$에 의하여 표현된다. 전이확률 $p(s,\, x;\, t,\, y)$는, 시점 s와 t에 대하여 $(s < t)$, 확률과정이 $X_s = x$인 조건으로부터 $X_t = y$로 변화될 조건부 확률밀도를 의미한다. 즉, $\Pr(X_t \in d\, y \,|\, X_s = x) = p(s,\, x;\, t,\, y)dy$이다. 확산모형의 마코프 성질로부터 챕만-콜모고로프(Chapman-Kolmogorov) 방정식

$$p(s, x; t, y) = \int p(s, x; u, z) p(u, z; t, y) dz \tag{2.1}$$

을 얻는다. 여기서 $s \le u \le t$이다.

확률과정 X_t가 확률편미분방정식 (1.1)을 만족할 때, 어떤 함수 $q(t, X_t)$에 대한 미분소 $dq(t, X_t)$는 이또 포뮬러에 의하여 다음과 같이 나타난다.

$$dq(t,\, X_t) = \big[(D_t + \mathcal{A}_x)q\big](t,\, X_t)\, dt + [\mathcal{B}_x q](t,\, X_t) dW_t, \tag{2.2}$$

여기서 D_t와 D_x는 각각 t와 x에 대한 편미분 연산자 $(\partial/\partial t)$와 $(\partial/\partial x)$이고, $\mathcal{A}_x$는 딘킨(Dynkin) 연산자로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}_x q](t,\, x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E\big[q(t,\, X_h) - q(t, X_0) \,|\, X_0 = x\big] \\ &= a(t,\, x)\, [D_x q](t,\, x) + \frac{1}{2} b^2(t,\, x)\, \big[D_x^2 q\big](t,\, x).\end{aligned} \tag{2.3}$$

또한 $\mathcal{B}_x$는 $[\mathcal{B}_x q](t,\, x) = b(t,\, x)[D_x q](t,\, x)$인 성질을 갖는 연산자로 정의된다.

임의의 두 시점 s와 t사이에서의 전환확률 $p(s,\, x;\, t,\, y)$가 시점 0과 $t-s$ 사이에서의 전환확률 $p(0,\, x;\, t-s,\, y)$과 동일한 경우를 시간동질성(time-homogeneity)을 만족한다고 한다. 추세계수와 확산계수가 $a_t = a(\theta,\, X_t)$이고 $b_t = b(\theta,\, X)$인 형태로 t에 대하여 직접 영향을 받지 않는 경우에 확률편미분방정식은

$$dX_t = a(\theta,\, X_t)dt + b(\theta,\, X_t)dW_t \tag{2.4}$$

와 같은 형태로 나타난다. 이때 확률편미분방정식 (2.4)의 해로서 시간동질성을 만족하는 확률과정 X_t를 이또-확산 확률과정이라 한다. 이또-확산 확률과정(Itô diffusion processe)이 되기 위한 조건은 추세계수와 확산계수가 1차 립쉬조건(Lipschitz condition)을 만족하여야 한다. 즉, 임의의 x, y에 대하여

$$|a(x) - a(y)| + |b(x) - b(y)| < M|x - y|$$

을 만족하는 M이 존재하여야 한다 (*cf.* Oksendal, 2003; p.114, p.149). 확률과정 X_t가 이또-확산 확률과정일 때, 전환확률 $p(s, x; t, y)$를 보다 간단한 형태로 $p^{t-s}(x,\, y)$와 같이 나타내기로 하자.

확률편미분방정식 (2.4)로 표현되는 확률과정 X_t를 적분형태로 표현하면,

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} a(X_s)ds + \int_{t_0}^{t} b(X_s)dW_s \tag{2.5}$$

이다. 이때 추세계수 a_t와 확산계수 b_t에 대하여 식 (2.2)에서 언급된 이또포뮬라를 적용하여, 적분형태로 나타내면,

$$\begin{aligned} a(X_t) &= a(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} [\mathcal{A}_x a](X_s)ds + \int_{t_0}^{t} [\mathcal{B}_x a](X_s)dW_s, \\ b(X_t) &= b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} [\mathcal{A}_x b](X_s)ds + \int_{t_0}^{t} [\mathcal{B}_x b](X_s)dW_s \end{aligned} \tag{2.6}$$

와 같이 표현된다. 이를 식 (2.5)에 대입하기로 하자. 여기서 $[\mathcal{B}_x b] = b[D_x b]$인 관계가 있다. 이때 $[\mathcal{B}_x b]\,(X_t)$에 대하여도 마찬가지 관계를 적용하여, 적분형태로 나타내면,

$$[\mathcal{B}_x b](X_t) = [\mathcal{B}_x b](X_{t_0}) + \int_{t_0}^{t} [\mathcal{A}_x \mathcal{B}_x b](X_s)ds + \int_{t_0}^{t} [\mathcal{B}_x \mathcal{B}_x b](X_s)dW_s$$

와 같이 나타나고 이를 식 (2.6)과 (2.5)에 반복적으로 대입하면

$$X_t = X_{t_0} + a(X_{t_0})(t - t_0) + b(X_{t_0})(W_t - W_{t_0}) + R_0 + R \tag{2.7}$$

을 얻는다. 여기서

$$R_0 = \frac{1}{2}[\mathcal{B}_x b]\,(X_{t_0}) \cdot \left\{(W_t - W_{t_0})^2 - (t - t_0)\right\}$$

이다. R은 나머지항이다. 확률과정 X_t의 표본경로를 식 (2.7)에 근거하여, $\Delta_t = t - t_0$가 매우 작은 경우에

$$X_t \simeq X_{t_0} + a(X_{t_0})\Delta_t + b(X_{t_0})\Delta W_t$$

라고 근사하는 방법이 Euler(-Maruyama) 근사법이다. 여기서 $\Delta W_t = W_t - W_{t_0}$이다. 또한 여기에 R_0항을 추가하여

$$X_t \simeq X_{t_0} + a(X_{t_0})\Delta_t + b(X_{t_0})\Delta W_t + \frac{1}{2}[\mathcal{B}_x b](X_{t_0}) \cdot \left\{(\Delta W_t)^2 - \Delta_t\right\}$$

라고 확률과정 X_t의 표본경로를 근사하는 방법이 Milstein 근사법이다. 특별히 Milstein 근사법에서 $[\mathcal{B}_x b] = b[D_x b]$를 직접 구하기 어려운 경우 $\hat{X}_t = X_{t_0} + a(X_{t_0})\Delta_t + b(X_{t_0})\sqrt{\Delta_t}$에 대하여, $[\mathcal{B}_x b](X_{t_0}) \approx (b(\hat{X}_t) - b(X_{t_0}))/\sqrt{\Delta_t}$라고 근사적으로 대입하는 Runge-Kutta 방법이 사용되기도 한다 (*ref.* Kloeden과 Platen, 1999). 수학이나 물리학 분야에서 확률편미분방정식 (1.1)의 해를 구하기 위하여 자주사용되는 방법은 콜모고로프 전향방정식과 후향방정식을 푸는 것이다.

콜모고로프(Kolmogorov) 전향방정식(forward equation)은 방정식 (2.1)을 (t, y)로 편미분하여 얻게 되고, 콜모고로프 후향방정식(backward equation)은 방정식 (2.1)을 (s, x)로 편미분하여 얻게 된다. 포커-플랑크(Fokker-Planck) 방정식은 콜모고로프 전향방정식의 다른 이름이다. 콜모고로프 후향방정식은 다음과 같이 설명된다. 확률과정 X_t가 (1.1)을 따르는 확산과정이고, 함수 $g(x)$는 유계함수(bounded function)이다. 이때 $(t, x) \in \Re^+ \times \Re$인 영역에서 정의되는 함수 $q(t, x) = E[g(X_t)|X_0 = x]$에 대하여, 다음과 같은 콜모고로프 후향방정식이 만족된다.

$$[D_t q](t, x) = [\mathcal{A}_x q](t, x) \tag{2.8}$$

이다. 이때 경계값 조건은 $\lim_{t \to +0} q(t, x) = g(x)$이다.

두 함수 $\rho(x)$와 $\xi(x)$가 있고, 식 (2.3)에서 언급된 딘킨 연산자에 의하여 변환된 함수 $[\mathcal{A}_x \xi](x)$가 있다 하자. 이때

$$\int \rho(x)\xi(x)dx = \langle \rho,\ \xi \rangle, \qquad \int \rho(x)[\mathcal{A}_x \xi](x)dx = \langle \rho,\ \mathcal{A}_x \xi \rangle$$

와 같이 함수들의 곱에 대한 적분을 내적 $< \cdot, \cdot >$을 이용하여 나타내기로 하자. 여기서

$$\langle \rho,\ \mathcal{A}_x \xi \rangle = \langle \mathcal{A}_x^* \rho,\ \xi \rangle$$

가 되는 연산자 $\mathcal{A}_x^*$를 $\mathcal{A}_x$의 수반(adjoint) 연산자라고 한다. 연산의 곱 $(\rho\, a\, \xi)(x)$이 적당한 경계값을 갖는다고 하면, 부분적분법으로부터,

$$\langle \rho,\ a\,[D_x \xi] \rangle = \langle \rho\, a,\ [D_x \xi] \rangle = \langle [-D_x(\rho\, a)],\ \xi \rangle$$

이다. 또한 마찬가지로 $(\rho\, b^2\, [D_x \xi])(x)$와 $([D_x(\rho\, b^2)]\xi)(x)$이 관심 구간의 경계에서 적당한 값으로 지정이 되어 무시할 수 있다고 하자. 그러면,

$$\left\langle \rho,\ b^2\,[D_x^2 \xi] \right\rangle = \left\langle \rho\, b^2,\ [D_x^2 \xi] \right\rangle = \left\langle [D_x^2(\rho\, b^2)],\ \xi \right\rangle$$

이므로,

$$[\mathcal{A}_x^* \rho](x) = [-D_x(\rho\, a)](x) + \frac{1}{2}\left[D_x^2(\rho\, b^2)\right](x)$$

임을 알 수 있다. 여기서 사용된 a와 b는 물론 x의 함수 $a(x)$, $b(x)$를 의미하고 확률편미분방정식 (1.1) 혹은 (2.4)에 사용된 $a_t = a(t,\ x)$와 $b_t = b(t,\ x)$를 의미한다. 위의 관계를 이용하여 콜모고로프 전향방정식은, $(t,\ x) \in \Re^+ \times \Re$인 영역에서 정의되는 함수 $r(t,\ x) = E[p(0,\ X_0;\ t,\ x)]$에 대하여

$$[D_t r](t,\ x) = [\mathcal{A}_x^* r](t,\ x)$$

과 같이 표현된다. 여기서 확률과정 X_t는 (1.1)을 따르는 확산과정이고, 초기값 X_0는 어떤 특정 분포를 따른다고 가정된다.

3. 확산모형에 대한 추론: 추세계수 국소선형근사법을 중심으로

앞서의 표 1.1에서 CEV, CKLS, Aït-Sahalia 등과 같은 다수의 모형들은 확산계수가 $b(x) = \sigma_0\sigma(x)$와 같이 x의 함수 형태로 주어진 경우를 고려하고 있다. 이와 같이 확산계수가 상수가 아닌 경우, 확산모형의 수리적 성질을 밝히거나 이후의 추론 과정을 진행하는데 어려움이 있기 때문에, 이러한 어려움을 비켜가는 방법으로 확산계수 안정변환이 고려된다. 확률편미분방정식 (1.1)을 통해서 주어지는 확률과정 X_t에 대한 확산계수 안정변환

$$h_c(x) = \int_c^x du \Big/ \sigma(u) \tag{3.1}$$

을 통해서 얻어지는 확률과정 $Y_t = h_c(X_t)$는 $dY_t = a_Y(Y_t)dt + \sigma_0 dW_t$인 확률편미분방정식을 만족한다. 여기서 c는 적당한 임의의 상수일 수 있으나 가능한 $h_c(x)$의 형태를 단순하게 만드는 값이 선호된다. 또한

$$a_Y(h_c(x)) = \frac{a(x)}{\sigma(x)} - \frac{\sigma_0^2}{2}\sigma'(x) \tag{3.2}$$

인 관계가 성립한다. 여기서 $\sigma'(x) = [D_x\sigma](x)$이다.

확률편미분방정식 (1.1)혹은 (2.4)의 추세계수 $a(\cdot)$와 확산계수 $b(\cdot)$에는 표 1.1에서의 α, β, σ_0와 같은 모수들이 포함되어 있다. 관측된 확률과정의 값들로부터 이러한 모수들을 알아내는 추론 과정에 대하여 생각해 보기로 하자. 추정대상이 되는 모수들의 집합을 일반적으로 θ라고 나타내기로 하자. 추정하고자 하는 모형에 따라서 θ는 다양하게 정의된다. CEV 모형이라면 $\theta = (\beta, \sigma_0)$이고 CIR 모형이라면 $\theta = (\alpha, \beta, \sigma_0)$이다. 추세계수 $a(\cdot)$와 확산계수 $b(\cdot)$가 θ의 함수임을 명시하기 위하여, 필요에 따라 $a(x; \theta)$나 $b(t, x; \theta)$와 같은 방법으로 나타내기로 하자.

확산모형에 우도법을 적용하는데 있어서 가장 큰 어려움은 확률편미분방정식 (2.4)를 통하여 정의된 모형으로부터, 이산적 시점에서 얻어진 자료들 사이의 확률관계를 설명하는 전환확률을 얻어내는 과정이 쉽지 않다는 점이다. 전환확률이 주어진 경우 자료로 얻어진 값들을 대입하여 곧바로 우도를 얻을 수 있고 이를 최대화하는 모수를 찾음으로써 최대우도추정량을 구할 수 있다. 확률편미분방정식 (2.4)가 주어진 경우 그 전환확률의 형태는 Rogers (1985)와 Dacunha-Castelle와 Florens-Zmirou (1986)에 주어져 있다. 이를 구체적인 값으로 구하는 방법에 따라 여러 가지 추론법들이 제시되고 연구되고 있다. 이들 방법 중 가장 가장 기본적인 방법은 관측 시점 사이의 시간 $\Delta = \delta$가 매우 짧을 때 그 동안의 변화에 대한 전환확률은 오일러 근사법에 의하여

$$p^{\delta}(x, y) = \phi\left(y; x + a(x, \theta)\delta, b^2(x, \theta)\delta\right)$$

와 같이 평균이 $x + a(x, \theta)\delta$이고 분산이 $b^2(x, \theta)\delta$인 정규분포의 형태로 표현될 수 있다는 점을 이용하는 것이다. 반면 Δ가 어느 정도 큰 값을 가지는 경우는 오일러 근사법을 직접 사용하는 경우 정확도가 높은 추정량을 얻을 수 없기 때문에, 이를 개선하기 위하여 SMLE와 AMLE같은 방법이 사용된다. 먼저 SMLE는 관측구간 Δ를 작은 구간으로 세분하여(예를 들면 Δ/K), 작은 구간 사이에서 얻어졌어야 할 관측값이 관측되지 않은 것으로 가정하고, 가상적인 관측값들을 시뮬레이션 방법으로 대치하여 그 경우들에 대한 기대치를 우도로 잡는 방법이다.

AMLE는 $p^{\Delta}(x, y)$에 대한 유한차수 적률들의 특성을 구하고, 그 특성에 따라,

$$p^{(K)}(x, y; \Delta) \to p^{\Delta}(x, y) \quad \text{as} \quad K \to \infty$$

인 성질을 만족하는 Δ에 대한 K-차 다항함수를 포함하는 함수열 $p^{(K)}(x, y; \Delta)$, $K = 0, 1, 2, \ldots$를 구성하는 방법이다. 이 방법에서는 $p^{\Delta}(x, y)$를 적당한 차수 K 만큼 근사한 $p^{(K)}(x, y; \Delta)$를 이용하여

우도를 계산한다. Aït-Sahalia (1999, 2002, 2006), Aït-Sahalia와 Yu (2006)는 이런 방법들에 대하여 연구하고 있다. 이러한 방법들은 $p^{\Delta}(x, y)$를 함수적으로 근사한다는 점에서 결국 큰 틀에서 Shoji와 Ozaki (1998)가 제안한 추세계수 국소선형근사법과 동일한 방향의 접근법이라고 할 수 있다. 추세계수 국소선형근사법은, 자료가 관측된 각 시점별로, 추세계수 a_t를 선형적으로 근사하는 방법을 사용한다. 추세계수가 선형적인 경우 OU 확률과정에 해당하고, 이 경우에 대한 전환확률은 구체적인 형태로(closed form) 주어지는 것이 잘 알려져 있다. 따라서 관측된 각 자료 지점마다 다른 형태의 OU 확률과정으로의 근사를 통하여 전환확률을 구하고, 이로부터 얻어지는 전환확률들의 곱으로 우도를 구하게 된다. 다음에서는 추세계수 국소선형근사법에 대하여 그 구체적인 과정을 설명하고, 그 수리적 특성을 살펴보게 될 것이다.

Shoji와 Ozaki (1998)은 확률 편미분방정식 (1.1)의 모수를 추론하기 위하여 다음과 같은 방법을 제안하였다. 다음에서는 Shoji와 Ozaki (1998)가 제안한 방법의 아이디어를 가능한 단순화하여 표현하기 위하여, 확산계수 안정변환을 통하여, 확산방정식 (2.4)에서 확산계수가 $b(x) = \sigma_0$로 주어졌다고 가정한다. 즉,

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma_0 dW_t \tag{3.3}$$

이다. 이때, $D_x a = a'$이고 $D_x^2 a = a''$라 하면, $a(x)$에 대한 테일러(Taylor) 전개는

$$a(x) = a(x_s) + a'(x_s)(x - x_s) + \frac{1}{2}a''(x_s)(x - x_s)^2 + O\left((x - x_s)^3\right)$$

이고, 적분 형태의 표현은

$$a(X_t) = a(X_s) + \int_s^t a'(X_u)\, dX_u + \frac{\sigma_0^2}{2}\int_s^t a''(X_u)du \tag{3.4}$$

이므로, 어떤 $c,\, d \in [s,\, t]$에 대하여,

$$\begin{aligned} a(X_t) = a(X_s) \ &+\ a'(X_s)(X_t - X_s) + \frac{\sigma_0^2}{2}a''(X_s)(t - s) \\ &+\ \left[a'(X_c) - a'(X_s)\right](X_t - X_s) + \frac{\sigma_0^2}{2}\left[a''(X_d) - a''(X_s)\right](t - s) \end{aligned} \tag{3.5}$$

이다. 여기서 $a''(x)$가 존재한다고 가정하면,

$$\left[a'(X_c) - a'(X_s)\right](X_t - X_s) = O_p(t - s)$$

이고, 이차 도함수 $a''(x)$가 $[s,\, t]$에서 유계(bounded)라 하자. 그러면,

$$a(X_t) = a(X_s) + a'(X_s)(X_t - X_s) + \frac{\sigma_0^2}{2}a''(X_s)(t - s) + O_p(t - s)$$

이다. 즉, $\xi_t \sim O_p(1)$인 어떤 ξ_t가 존재하고,

$$a(X_t) = a(X_s) + a'(X_s)(X_t - X_s) + \left[\frac{\sigma_0^2}{2}a''(X_s) + \xi_t\right](t - s)$$

이다. 이 때 $t - s \simeq 0$, $(t > s)$이라 하면,

$$a(X_t) \simeq a(X_s) + a'(X_s)(X_t - X_s) \tag{3.6}$$

이다. Shoji와 Ozaki (1998)는 $a(X_t)$를

$$a(X_t) \simeq a(X_s) + a'(X_s)(X_t - X_s) + \frac{\sigma_0^2}{2}a''(X_s)(t - s) \tag{3.7}$$

라고 근사하고, 이로부터

$$d\tilde{X}_t = \left(r_s + q_s t + p_s \tilde{X}_t\right) dt + \sigma_0 dW_t \tag{3.8}$$

인 근사 확률미분방정식을 얻었다. 여기서

$$\begin{aligned} p_s &= a'\left(\tilde{X}_s\right), \\ q_s &= \frac{\sigma_0^2}{2} a''\left(\tilde{X}_s\right), \\ r_s &= a\left(\tilde{X}_s\right) - a'\left(\tilde{X}_s\right)\tilde{X}_s - \frac{\sigma_0^2}{2} a''\left(\tilde{X}_s\right) s \end{aligned}$$

이다. Shoji와 Ozaki (1998)는 확률편미분방정식 (3.8)에서 얻어지는 $\tilde{X}_t$가 확률편미분방정식 (3.3)의 근인 X_t를 매우 가까운 정도로 근사하게 될 것이라고 생각하였다. 또 확률편미분방정식 (3.8)은, s를 상수로 보는 경우, OU 확률과정이 되므로 그 전환확률 $p^{t-s}(x_s, x_t)$가 정규분포의 밀도함수 형태로 쉽게 구해지고, 이를 이용하여 자료로부터 확률 편미분방정식을 쉽게 추정할 수 있다고 보았다. 그러나 일반적인 형태의 $a(x)$에 대하여, 근사식 (3.7)과 (3.6)이 식 (3.4)를 잘 근사하기 위하여는 $t - s \simeq 0$ 인 조건이 만족되어야 한다. 그러므로 Shoji와 Ozaki (1998)의 발견은, 임의의 확산과정에 대하여 정규분포의 밀도함수에 근거한 근사적 전환확률을 고려하는 방법을 제공한다는 현실적인 의미 이외에, 확산과정의 전환확률 $p^{t-s}(\cdot, \cdot)$이 $t \to s$임에 따라서 정규분포의 확률밀도함수 형태로 바뀌게 되는 원인을 설명하는 것이라고 해석할 수 있다.

근사식 (3.7)이 (3.6)에 비하여 더 나은 의미를 가지기 위해서는 $E\xi_t = 0$ 같은 특수한 조건이 필요하고, 이런 조건이 없는 경우 근사식 (3.7)이 (3.6)에 비하여 더 나은 근사식이라는 근거는 없다. 조건 $E\xi_t = 0$가 성립하는 지를 알아보기 위한, 근사식 (3.6)에 대한 편기 확장(bias expansion)은 다음과 같다. 먼저 $a''(x)$가 차수 $\alpha \geq 0$인 립쉬츠조건을 만족한다고 하자. 즉, 모든 $x_0, x_1 \in [s, t]$에 대하여

$$\left|a''(x_1) - a''(x_0)\right| \leq M|x_1 - x_0|^\alpha$$

인 조건을 만족하는 M이 존재한다고 하자. 이때 $\alpha > 0$이면 $a(x)$는 연속이고, 만약 $\alpha = 0$이라면 $a(x)$는 불연속이다. 논의를 간단히 하기 위하여 특별히 $\alpha = 0$인 경우 $a(x)$는 $x = X_s$에서 불연속이라 하자. 그러면 식 (3.5)로부터,

$$E\xi_t \simeq \sigma_0^2 \left[a''(X_s) + \frac{1}{2}\left\{a''_+(X_s) - a''(X_s)\right\}\right]$$

이다. 여기서 $a''_+(X_s) = \lim_{c \to s} a''(X_c)$이다. 또 만약 $\alpha > 0$이라면, $a''_+(X_s) - a''(X_s) = 0$이므로 $E\xi_t \simeq \sigma_0^2 a''(X_s)$이다. 그러므로, 근사식 (3.7)이 근사식 (3.6)에 대한 편기를 보정하기 위한 방법이라면, 차라리

$$a(X_t) \simeq a(X_s) + a'(X_s)\left(X_t - X_s\right) + \frac{3}{2}\sigma_0^2 a''(X_s)(t - s) \tag{3.9}$$

라고 하는 것이 더욱 타당하다.

확률편미분방정식 (3.3)에 대한 오일러 근사는

$$X_t \simeq X_s + a(X_s)(t - s) + \sigma_0(W_t - W_s)$$

로 주어지는데 반하여, 식 (3.6)은

$$X_t \simeq X_s + \left\{a(X_s) + a'(X_s)(X_t - X_s)\right\}(t - s) + \sigma_0(W_t - W_s)$$

와 같은 근사식을 가능하게 하고, 식 (3.9)는

$$X_t \simeq X_s + \left\{ a(X_s) + a'(X_s)(X_t - X_s) + \frac{3}{2}\sigma_0^2 a''(X_s) \right\}(t-s) + \sigma_0(W_t - W_s)$$

와 같은 근사식을 가능하게 하는 점을 주목할 필요가 있다. 이상에서 살펴본 추세계수 국소선형근사법은, 다른 AMLE 방법들과 마찬가지로, 기본적으로 $t-s \approx 0$인 경우에 근사의 정확성이 높아지고, $t-s$가 상당히 커지면서 동시에 관심 범위 내의 x값들에 대하여, $a''(x)$ 값이 0에 가깝지 않은 경우에는, 근사의 정확도가 떨어지게 된다.

4. 결론

금융관련 이론이 발전함에 따라, 금융현상을 모형화하기 위하여 사용되는 확산모형들도 더욱 정교하고 다양한 형태로 진화되고 있다. 따라서 이들 모형을 추론하기 위한 효율적인 방법론에 대한 연구도 매우 중요시 되고 있다. 위에서 언급한 확산모형에 대한 다양한 추론 방법들을 현실적으로 비교 평가한다고 할 때 고려될 수 있는 기준으로는, 계산 속도와 통계적 정확성이라는 점이 중요한 기준으로 고려될 것이다. 이외에도 적용이 가능한 모형의 다양성과 그 과정의 절차적 편이성, 또 방법론의 타당성에 대한 설명 편이성 또한 중요한 기준이 될 수 있다.

확산모형에 대한 우도추론법은, 우도추론법이 일반적으로 갖는 우수한 통계적 성질을 물려받을 수 있다는 점에서 최근 관심있는 연구 주제로 부각되고 있다. 확산모형에 대한 다양한 우도추론법 중에서도 추세계수 국소선형근사법은 그 수리적 전개 과정이 상대적으로 간단하면서도 계산적인 측면에서나 통계적인 측면에서 매우 효율적인 것으로 알려져 있다. 본 논문에서는 국소선형근사법이 가지는 수리적 특성을 검토하였고, 이를 통하여 더욱 정교하고 효율적인 추정법의 개발에 도움이 되리라 생각된다.

참고문헌

빈기범 (2005). 확산과정의 추정 기법에 관한 문헌 연구, <계량경제학보>, **16**, 63–121.

Ahn, D. and Gao, B. (1999). A parametric nonlinear model of term structure dynamics, *The Review of Financial Studies*, **12**, 721–762.

Aït-Sahalia, Y. (1999). Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions, *Journal of Finance*, **54**, 1361–1395.

Aït-Sahalia, Y. (2002). Maximum-likelihood estimation of discretely-sampled diffusions: A closed-form approximation approach, *Econometrica*, **70**, 223–262.

Aït-Sahalia, Y. (2006). Likelihood inference for diffusions: A survey, *Frontiers in Statistics: in Honor of Peter J. Bickel's 65th Birthday*, Imperial College Press.

Aït-Sahalia, Y. and Yu, J. (2006). Saddlepoint approximations for continuous-time markov processes, *Journal of Econometrics*, **134**, 507–551.

Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation, *Annales Scientifiques de L'É.N.S.*, **17**, 21–86.

Bail, T. G. and Wu, L. (2006). A comprehensive analysis of the short term interest-rate dynamics, *Journal of Banking & Finance*, **30**, 1269–1290.

Brandt, M. W. and Santa-Clara, P. (2001). Simulated likelihood estimation of diffusions with an application to exchange rate dynamics in incomplete markets, *NBER Technical Working Paper 274*.

Brennan, M. and Schwartz, E. S. (1980). Analyzing convertible bonds, *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, **15**, 907–929.

Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, **47**, 1209–1227.

Conley, T. G., Hansen, L. P., Luttmer, E. G. T. and Scheinkman, J. A. (1997). Short-term interest rates as subordinated diffusions, *The Review of Financial Studies*, **10**, 525–577.

Cox, J. C. (1975). Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions, Working paper, Stanford University (reprinted in *Journal of Portfolio Management*, 1996, **22**, 15–17).

Cox, J. C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. (1980). An analysis of variable interest rate loan contracts, *Journal of Finance*, **35**, 389–403.

Cox, J. C., Ingersoll, Jr. and Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385–407.

Dacunha-Castelle, D. and Florens-Zmirou, D. (1986). Estimation of the coefficients of a diffusion from discrete observations, *Stochastics*, **19**, 263–284.

Duffie, D. and Kan, R. (1996). A yield-factor model of interest rate, *Mathematical Finance*, **6**, 379–406.

Durham, G. and Gallant, R. (2001). *Numerical Techniques for Maximum Likelihood Estimation of Continuous Time Diffusion Processes*, Technical Report.

Elerian, O., Chib, S. and Shephard, N. (2001). Likelihood inference for discretely observed nonlinear diffusions, *Econometrika*, **69**, 959–993.

Eraker, B. (2001). MCMC analysis of diffusion models with application to finance, *Journal of Business & Economic Statistics*, **19**, 177–191.

Hurn, A., Jeisman, J. I. and Lindsay, K. (2007). Seeing the wood for the trees: A critical evaluation of methods to estimate the parameters of stochastic differential equations, *Journal of Financial Econometrics*, **5**, 390–455.

Kloeden, P. and Platen, E. (1999). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.

Marsh, T. A. and Rosenfeld, E. R. (1983). Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices, *Journal of Finance*, **38**, 635–650.

Nicolau, J. (2002). A new technique for simulating the likelihood of stochastic differential equations, *Econometrics Journal*, **5**, 91–102.

Oksendall, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, Berlin.

Pederson, A. R. (1995). A new approach to maximum likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, **22**, 55–71.

Rogers, L. C. G. (1985). Smooth transitional densities for one-dimensional diffusions, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **17**, 157–161.

Samuelson, P. A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial Management Review*, **6**, 41–50.

Shoji, I. and Ozaki, T. (1998). Estimation for nonlinear stochastic differential equations by a local linearization method, *Stochastic Analysis and Applications*, **16**, 733–752.

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.

Mathematical Review on the Local Linearizing Method of Drift Coefficient

Min Yoon[1] · Youngsoo Choi[2] · Yoon Dong Lee[3]

[1]Dept. of Applied Statistics, Konkuk University;
[2]Dept. of Mathematics, Hankuk University of Foreign Studies;
[3]Dept. of Applied Statistics, Konkuk University

(Received September 2008; accepted September 2008)

Abstract

Modeling financial phenomena with diffusion processes is a commonly used methodology in the area of modern finance. Recently, various types of diffusion models have been suggested to explain the specific financial processes, and their related inference methodology have been also developed. In particular, likelihood methods for the efficient and accurate inference have been explored in various ways. In this paper, we review the mathematical properties of an approximated likelihood method, which is obtained by linearizing the drift coefficient of a diffusion process.

Keywords: Diffusion models, stochastic differential equations, OU processes, likelihood inference

This research was supported by the Korean Research Fund for new faculty in 2006(C00056).
[1]Lecturer, Dept. of Applied Statistics, Konkuk University, HwaYang-Dong, Kwang-Jin, Seoul 143-701, Korea. E-mail: myoon515@konkuk.ac.kr
[2]Professor, Dept. of Mathematics, Hankuk University of Foreign Studies, Mohyun, Yongin-Shi, Kyongki-Do 449-791, Korea. E-mail: choiys@hufs.ac.kr
[3]Corresponding author: Associate Professor, Dept. of Applied Statistics, Konkuk University, HwaYang-Dong, Kwang-Jin, Seoul 143-701, Korea. E-mail: poisson@dreamwiz.com