

폴디드 하이퍼스타 네트워크의 성질과 임베딩 분석

김종석[†], 조정호^{**}, 이형욱^{***}

요 약

본 논문에서는 널리 알려진 상호연결망인 하이퍼큐브의 망 비용을 개선한 폴디드 하이퍼스타 네트워크의 성질과 임베딩을 분석한다. 폴디드 하이퍼스타 네트워크는 재귀적 확장성과 최대 고장 허용도를 갖는다. 임베딩의 연구 결과는 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 와 $n \times n$ 토러스 구조를 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 에 연장을 2에 임베딩 가능하다. 또한, 폴디드 하이퍼스타 네트워크 $FHS(2n, n)$ 은 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 에 연장을 1에 임베딩 가능함을 보인다.

Analysis of Topological Properties and Embedding for Folded Hyper-Star Network

Jongseok Kim[†], Chungcho Cho^{**}, Hyeongok Lee^{***}

ABSTRACT

In this paper, we analyze topological properties and embedding of Folded Hyper-Star network to further improve the network cost of Hypercube, a major interconnection network. Folded Hyper-Star network has a recursive expansion and maximal fault tolerance. The result of embedding is that Folded Hypercube FQ_n and $n \times n$ Torus can be embedded into Folded Hyper-Star $FHS(2n, n)$ with dilation 2. Also, we show Folded Hyper-Star $FHS(2n, n)$ can be embedded into Folded Hypercube FQ_{2n-1} with dilation 1.

Key words: interconnection network(상호연결망), embedding(임베딩), dilation(연장을)

1. 서 론

오늘날 공학과 과학 분야의 많은 응용문제들은 많은 계산을 수행하면서 동시에 실시간 처리를 필요로 하므로 지금까지의 컴퓨터보다 빠른 계산 능력을 갖는 고성능 컴퓨터에 대한 요구가 증대하고 있다. 이러한 요구를 만족시키기 위해서 여러 개의 처리기를 사용하여 병렬적으로 작업을 처리하는 병렬 처리 컴퓨터에 대한 관심이 증가하고 있다. 병렬 처리를 위한 컴퓨터는 크게 공유 메모리를 갖는 다중프로세서(multi-processor) 시스템과 분산 메모리를 갖는 다

중컴퓨터(multi-computer) 시스템으로 나눌 수 있다. 다중프로세서 시스템은 공유 메모리를 가지며, 프로세서들 사이의 통신은 공유 메모리의 접근에 의해 이루어진다. 이 경우 전체 메모리 공간에 대한 접근이 쉬운 장점을 갖지만 기억장치 접근시 병목 현상으로 성능 저하를 초래할 수 있으며 확장성이 좋지 않은 단점이 있다. 다중컴퓨터 시스템은 자신의 메모리를 갖는 프로세서들을 상호연결망으로 연결하고, 프로세서들 사이에 통신은 상호연결망을 통해 메시지를 교환하는 방식으로 이루어진다. 이러한 다중컴퓨터의 상호연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및

※ 교신저자(Corresponding Author) : 이형욱, 주소 : 전남 순천시 매곡동 315번지(540-742), 전화 : 061)750-3345, FAX : 061)750-3308, E-mail : oklee@sunchon.ac.kr
접수일 : 2008년 4월 21일, 완료일 : 2008년 7월 25일
[†] 정회원, 영남대학교 전자정보공학부 BK21 연구교수

(E-mail : rockhee7@gmail.com)
^{**} 정회원, 광주대학교 정보통신공학과 부교수
(E-mail : chcho@gwangju.ac.kr)
^{***} 정회원, 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수

확장성에 큰 영향을 미치는 것으로 병렬처리 컴퓨터 개발의 기반 기술 제공을 위해 그 필요성이 증가 되고 있다[1-4].

상호연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프(undirected graph)로 표현 될 수 있다. 상호연결망을 평가하는 망 척도는 분지수(degree), 연결도(connectivity), 확장성(scalability), 지름(diameter), 라우팅 알고리즘, 고장 허용도(fault tolerance), 임베딩(embedding), 병렬경로(parallel path) 등이 있다 [1,2,3]. 지금까지 제안된 상호연결망으로는 트리, 메쉬[3,5,6], Honeycomb 메쉬[7], 하이퍼큐브[4,8,9], Twisted n -cube, Cube-Connected-Cycle, Multiply-Twisted-Cube, Folded Hypercube[8], star 그래프 [1,3], (n,k) -star 그래프, Hierarchical Cubic Network[10,11], de Bruijn, Shuffle Exchange, Hyper-Star 그래프[12,13] 등이 있다.

연결망의 망 척도 중 하드웨어의 비용과 관련된 분지수와 메시지의 전송 시간과 관련된 지름은 상호간에 상관관계를 갖고 있다. 이러한 특성 때문에 상호연결망을 비교 평가하기 위해 연결망의 분지수 \times 지름 값으로 정의되는 망비용(network cost)이 있다 [5,7]. 망비용은 연결망이 같은 개수의 노드를 가질 때 분지수 \times 지름 값이 작은 연결망이 좋은 특성을 갖는 것으로 분석한다. 표 1에는 하이퍼큐브와 그의 변형들을 망 비용 관점에서 비교하였다.

그래프의 임베딩은 어떤 그래프가 다른 그래프 구

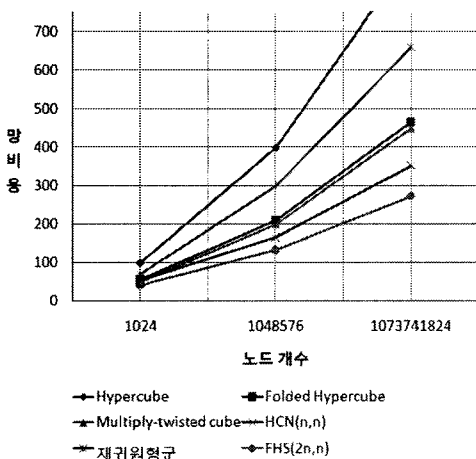
조에 포함 혹은 어떻게 연관되어 있는지를 알아보기 위해 어떤 특정한 그래프를 다른 그래프에 사상(mapping)하는 것이다. 연결망 G 가 연결망 H 에 적은 비용으로 임베딩 되면 연결망 G 에서 개발된 알고리즘을 연결망 H 에서 적은 비용으로 시뮬레이션 할 수 있기 때문에 상호연결망에서 임베딩 문제는 의미 있는 연구이다[6,9,10]. 그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩 f 는 다음과 같이 정의되는 함수의 쌍 (ϕ, ρ) 을 말한다. ϕ 는 G 의 정점 집합 $V(G)$ 를 H 의 정점 집합 $V(H)$ 에 대응 시키는 함수이고, ρ 는 G 의 에지 $e=(v,w)$ 를 $\phi(v)$ 과 $\phi(w)$ 를 잇는 H 상의 경로로 대응 시키는 함수이다. 임베딩의 비용을 나타내는 척도로 다음과 같은 것이 널리 사용되고 있다. 연결망 G 의 에지 e 의 연장율(dilation)은 H 상의 경로 $\rho(e)$ 의 길이를 말하고, f 의 연장율은 G 의 모든 에지에 대한 연장율의 최대값을 말한다. 그래프 H 의 에지 e' 의 밀집율(congestion)은 e' 를 포함하는 $\rho(e)$ 의 개수를 말하고, f 의 밀집율은 H 의 모든 에지의 밀집율 중 최대값이다. 임베딩 f 의 확장율(expansion)은 G 의 정점수에 대한 H 의 정점수의 비, 즉 $|V(H)| / |V(G)|$ 이다[14].

본 논문에서는 상호연결망의 망비용이 하이퍼큐브와 그의 변형들보다 작은 값을 갖는 폴디드 하이퍼스타 네트워크에서 확장성 성질과 최대 고장허용도를 분석하고, 다른 그래프와의 임베딩을 위한 방법을 제안하고 그 결과를 통해 연장율을 분석한다. 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 본 논문과 관련된 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 정의와 성질을 알아보고, 3장에서는 폴디드 하이퍼스타 네트워크 $FHS(n,k)$ 의 확장성과 $FHS(2n,n)$ 의 최대고장 허용도를 분석하고, 4장에서는 폴디드 하이퍼큐브와 토러스 구조를 폴디드 하이퍼스타 네트워크에 연장율 2로 임베딩하고, 폴디드 하이퍼스타를 폴디드 하이퍼큐브에 연장율 1에 임베딩 가능함을 보이고, 마지막으로 결론을 맺는다.

2. 폴디드 하이퍼스타 네트워크 $FHS(2n,n)$ 의 정의와 성질

폴디드 하이퍼스타 네트워크 $FHS(n,k)$ 는 이진수 "0" 또는 "1"로 구성된 n 개 이진 비트스트링 $s_1s_2...s_i...s_n$ 에서 k 개 비트가 "1"로 구성된 비트스트링

표 1. 하이퍼큐브와 그의 변형들의 망 비용 비교



으로 노드를 표현한다($n > k$). 에지 관계는 노드의 비트스트링에서 심볼 s_1 과 s_i 가 보수(complement)이면서 교환된 비트스트링을 연결하는 i -차원 에지와 비트스트링 $s_1s_2...s_i...s_n$ 과 보수 관계에 있는 비트스트링 $\overline{s_1s_2s_3...s_i...s_n}$ 을 연결하는 c -차원 에지로 구성된다($2 \leq i \leq n$).

위의 정의에 의해 폴디드 하이퍼스타 네트워크 $FHS(n,k)$ 를 구성하는 노드는 전체 n 개의 비트스트링에서 k 개의 "1"과 $(n-k)$ 개의 "0"에 대한 중복순열로 표현할 수 있으므로 노드 개수는 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 이고, 이것은 nC_k 로 나타낼 수 있다. 또한 노드주소에서 가장 좌측 심볼이 "1"인 노드의 분지수는 $(n-k)$ 이고, 심볼이 "0"인 노드의 분지수는 k 이므로, 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n,k)$ 의 분지수는 $(n-k) \sim k$ 이다. 따라서 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n,k)$ 는 $n=2k$ 이면 정규연결망이고, 그렇지 않으면 비정규 연결망이다. 그림 1은 위의 정의에 따라 구성된 폴디드 하이퍼스타 $FHS(4,1)$ 과 $FHS(4,2)$ 이다.

폴디드 하이퍼스타 $FHS(n,k)$ 는 노드를 나타내는 비트스트링 $s_1s_2...s_i...s_n$ 에서 첫 번째 심볼을 기준으로 $s_1="0"$ 과 $s_1="1"$ 을 갖는 노드들로 나눌 수 있고, 에지 정의에 의해 $s_1="0"$ 인 노드와 인접한 노드는 $s_1="1"$ 을 갖는 노드이므로 이분할 그래프(bipartite graph)이다. 또한 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n,k)$ 와 $FHS(n,n-k)$ 는 서로 동형인 성질이 있다. 폴디드 하이퍼스타 $HS(n,k)$ 의 비트스트링 $s_1s_2...s_i...s_n$ 에서 심볼 s_1 과 s_i 가 보수이면서 서로 교환된 노드의 비트스트링 $s_1s_2...s_1...s_n$ 을 연결하는 에지를 i -차원 에지라 한다. 예를 들면, $FHS(4,2)$ 에서 노드 심볼이 0011인 노드를 v 라 하고, 1010인 노드를 w 라 할 때, 노드 v 와 w 를 연결하는 에지는 4-차원 에지이고, 노드 v 와 c -차원 에지에 의해 인접한 노드는 1100이다.

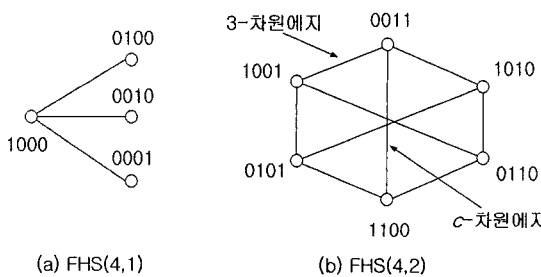


그림 1. 폴디드하이퍼스타 $FHS(4,1)$ 과 $FHS(4,2)$

3. 폴디드 하이퍼스타의 확장성과 노드 연결도

상호연결망에서 노드 개수가 작은 연결망을 이용하여 노드 개수가 많은 연결망을 구성할 때 재귀적 성질이 존재하면 연결망이 좋은 특성을 갖는다고 할 수 있다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 를 연결하여 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n,k)$ 를 생성하는 경우 $n \neq 2k$ 이면 정규연결망을 생성하지 못하므로, 본 연구에서는 정규연결망을 생성할 수 있는 경우로 제한하여 분석한다.

정리 1 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 를 연결하여 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n,k)$ 를 생성할 수 있다(단, $n=2k$).

증명 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n-1,k-1)$ 의 노드주소를 나타내는 비트스트링을 $s_1s_2...s_{j-1}s_{j+1}...s_n$ 이라 할 때, 노드 주소의 첫 번째 심볼 $s_1="0"$ 인 노드의 개수는 $n-1C_{k-1}$ 개이고, 이 노드의 분지수는 $k-1$ 이다. 노드 개수를 나타낸 연산자 C 는 조합(combination)을 의미한다. 또한, 주소의 첫 번째 심볼 $s_1="1"$ 인 노드는 모두 $n-1C_k$ 개이고 분지수는 $n-k$ 이다.

폴디드 하이퍼스타 $FHS(n-1,k)$ 의 노드주소를 나타내는 비트스트링을 $s'_1s'_2...s'_j...s'_n$ 이라 할 때, 노드주소의 첫 번째 심볼 $s'_1="0"$ 인 노드의 개수는 $n-1C_k$ 개이고, 이 노드의 분지수는 k 이다. 또한, 노드주소의 첫 번째 심볼 $s'_1="1"$ 인 노드는 모두 $n-1C_{k-1}$ 개이고 분지수는 $n-(k+1)$ 이다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 를 연결하는 방법은 다음 2가지 단계를 거친다.

[단계1] 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 를 구성하는 노드주소에서 $s_1 = \overline{s'_1}$ 이고, $s_2...s_j...s_n = s'_2...s'_j...s'_n$ 인 노드를 서로 연결한다. $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 그래프의 노드에 에지가 추가되면 노드주소가 n 개 비트로 수정되어야 하므로 두 그래프에 새로운 비트 s_n 과 s'_n 를 각각 추가한다. 추가된 비트 s_n 과 s'_n 가 갖는 이진비트스트링은 $s_n="1"$ 과 $s'_n="0"$ 이다. 이유는 $FHS(n,k)$ 의 노드주소에서 n 개 비트스트링에서 이진수 "1"이 k 개이므로 $FHS(n-1,k-1)$ 의 노드에는 이진수 "1"이 추가되어야 하고, $FHS(n-1,k)$ 의 노드에는 이진수 "0"이 추가되어야 한다. $FHS(n-1,k-1)$ 을 구성하는 노드주소에

서 첫 번째 심벌 $s_1=“0”$ 인 노드와 $FHS(n-1,k)$ 를 구성하는 노드의 주소에서 첫 번째 심벌 $s'_1=“1”$ 인 노드는 각각 ${}_{n-2}C_{k-1}$ 개이다. $FHS(n-1,k-1)$ 의 노드주소에서 첫 번째 심벌 $s_1=“0”$ 인 노드들의 비트스트링 $s_2...s_j...s_{n-1}$ 은 $n-2$ 개 비트에서 $k-1$ 개의 비트가 이진수 “1”로 구성된 모든 경우의 수이고, $FHS(n-1,k)$ 에서 첫 번째 심벌 $s'_1=“1”$ 인 노드의 비트스트링 $s'_2...s'_j...s'_{n-1}$ 은 $n-2$ 개 비트에서 $k-1$ 개의 비트가 이진수 “1”로 구성된 모든 경우의 수이다. 따라서 $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 에서 $s_1 = \overline{s'_1}$ 이고, $s_2...s_j...s_{n-1} = s'_2...s'_j...s'_{n-1}$ 인 노드는 일대일로 연결되어 있고, 분지수가 k 임을 알 수 있다. $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 의 노드에서 첫 번째 심벌 $s_1=“1”$ 인 노드와 $s'_1=“0”$ 인 노드의 분지수는 k 이고, 이들 노드주소에서 $s_n=“1”$ 과 $s'_n=“0”$ 비트가 추가되어졌다. $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 을 연결하면 그래프의 분지수는 k 이고, 노드 개수는 ${}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k = {}_n C_k$ 개의 노드를 가지므로 $FHS(n,k)$ 그래프임을 알 수 있다.

[단계2] $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 의 노드주소를 $n-1$ 개 비트에서 n 개 비트로 확장하면 $FHS(n-1,k-1)$ 의 모든 노드는 $FHS(n-1,k)$ 의 노드와 보수를 갖는 노드가 오직 한 개씩 존재함을 알 수 있다. $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 의 노드주소에서 서로 보수 관계를 갖는 노드를 일대일로 연결하는 에지를 한 개씩 추가한다. 이때 추가된 에지를 c -차원에지라 한다.

예를 들어, 폴디드 하이퍼스타 $FHS(3,1)$ 과 $FHS(3,2)$ 를 위의 방법에 의해 연결하여 $FHS(4,2)$ 를 생성하는 과정을 알아보자. 그림 2의 (b)에서 점선으로 표현된 에지는 [단계1]에서 추가된 에지를 나타내고, 노드 주소에서 가장 오른쪽 1비트는 추가된 비트를 나타내고, (c)에서 점선에지는 [단계2]에서 추가된 c -에지를 나타낸다.

그래프 G 에서 임의의 $k-1$ 개 이하의 노드를 제거했을 때 G 가 연결되어 있고, 적절한 k 개의 노드를 제거했을 때 G 가 2개 이상으로 분리되면 연결망 G 의 노드 연결도를 k 이라 한다. 연결망에서 노드 연결도와 분지수가 같은 연결망을 최대고장허용도(maximally fault tolerant)를 가졌다고 한다[1]. 연결망 G 의 노드 연결도를 $\kappa(G)$, 에지 연결도를 $\lambda(G)$, 분지수를 $\delta(G)$ 라 할 때, 이들 간의 관계가 $\kappa(G) \leq \lambda$

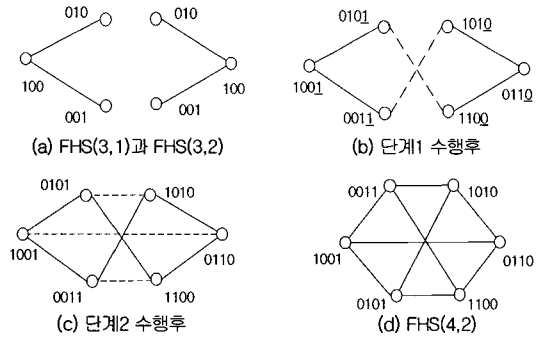


그림 2. $FHS(3,1)$ 과 $FHS(3,2)$ 를 이용한 $FHS(4,2)$ 로 확장

($G) \leq \delta(G)$ 인 사실이 알려져 있다[11]. $FHS(n,k)$ 에서 그래프의 분지수는 k 에 의해 결정되므로 $k=n$ 인 $FHS(2n,n)$ 인 정규연결망에서 $\kappa(FHS(2n,n)) \leq \lambda(FHS(2n,n)) \leq \delta(FHS(2n,n))$ 임을 통하여 $FHS(2n,n)$ 이 최대 고장허용도를 가짐을 보인다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 은 에지 정의에 의해 연결망의 분지수가 $n+1$ 이다.

정리 2 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 노드연결도 $\kappa(FHS(2n,n))$ 는 $n+1$ 이다.

증명 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 에서 적절한 $n+1$ 개의 노드를 제거하면 $FHS(2n,n)$ 이 2개 이상으로 분할됨을 보인다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 노드를 연결하는 에지는 하이퍼스타 $HS(2n,n)$ 의 에지 정의에 의해 연결되는 n 개 에지와 $HS(2n,n)$ 에서 보수 관계를 갖는 노드를 연결하는 c -에지로 나눌 수 있다. $FHS(2n,n)$ 에서 제거하는 노드 집합을 P 라 할 때, P 의 조건에 따라 2가지 경우로 나누어 n 개 노드를 제거하면 $FHS(2n,n)$ 이 분할되지 않음을 보이고, $n+1$ 개 노드를 제거하면 분할됨을 보인다. 증명을 위해 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 임의의 노드 주소가 $S(=s_1s_2...s_j...s_{2n-1}s_{2n})$ 와 $S'(=s'_1s'_2...s'_j...s'_{n-1}s'_n)$ 이라 하자($1 \leq j \leq n$).

(경우1) 제거된 n 개 노드가 모두 노드 S 에 인접한 경우

노드 $S(=s_1s_2...s_j...s_{2n-1}s_{2n})$ 와 인접한 노드의 주소는 심벌 $s_1 = \overline{s_j}$, ($2 \leq j \leq 2n$)이고, 심벌 s_1 과 s_j 가 서로 교환된 노드 $s_js_2...s_{11}...s_{2n-1}s_{2n}$ 사이에 n 개의 j -차원에지가 있고, 노드 $S(=s_1s_2...s_j...s_{2n-1}s_{2n})$ 와 보수 관계에 있

는 노드 $\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_j \dots s_{2n}}$ 사이에 1개의 c -에지에 의해 인접해 있다. 제거된 노드 P에 속하는 n 개의 노드가 노드 S와 j -차원에지에 인접한 노드이면, 노드 S는 c -에지에 의해 노드 $\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_j \dots s_{2n}}$ 와 연결되어 있으므로 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 은 연결된 그래프임을 알 수 있다.

(경우2) 제거된 n 개 노드가 2개 이상의 노드 S, S'에 인접한 경우(단, 노드 $S \neq S'$)

노드 $S(=s_1 s_2 \dots s_j \dots s_{2n-1} s_{2n})$ 와 인접한 노드는 $n+1$ 개이고, 노드 $S'(=s'_1 s'_2 \dots s'_j \dots s'_{n-1} s'_n)$ 와 인접한 노드는 $n+1$ 개이다. 이 경우에는 제거된 노드 P의 노드가 노드 S와 S'에 인접한 노드인 경우 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 이 연결된 상태임을 쉽게 알 수 있다.

(경우3) 제거된 노드가 $n+1$ 개인 경우

폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 분지수는 $n+1$ 이므로 노드 $S(=s_1 s_2 \dots s_j \dots s_{2n-1} s_{2n})$ 와 인접한 $n+1$ 개 노드를 모두 제거하면 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 은 노드 S와 노드 S를 제거한 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 그래프로 분할됨을 알 수 있다.

따라서 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 에서 임의의 노드 n 개를 제거해도 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 은 연결되어 있으므로 $\kappa(FHS(2n, n)) \geq n+1$ 이고, 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 은 분지수가 $n+1$ 인 정규그래프이므로 $\kappa(FHS(2n, n)) \leq n+1$ 이다. 그러므로 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 분지수 $\kappa(FHS(2n, n)) = n+1$ 이다.

4. 폴디드 하이퍼스타의 임베딩 분석

본 장에서는 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 을 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 으로 임베딩을 분석한다. 임베딩하는 방법은 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 주소 레이블링을 확장하여 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 비트스트링으로 표현할 수 있음을 보인다. 확장된 비트스트링을 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드로 사상하고, 사상된 노드에서 경로길이를 통해 연장율을 알아본다.

보조정리 1 $n \times n$ 토러스 구조에서 n 개 비트를 이용하여 각 행의 좌표 L에 이진수 $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ 을

순차적으로 각각 할당하고, 각 열의 좌표 V에 $(2^n-1)-2^{n-1}, (2^n-1)-2^{n-2}, (2^n-1)-2^{n-3}, \dots, (2^n-1)-2^0$ 을 순차적으로 각각 할당할 수 있다. 노드의 주소는 행과 열을 접합한 $L \cdot V$ 로 나타낸다.

증명 $n \times n$ 토러스 구조의 격자점에 있는 노드는 행과 열에 n 개 비트의 이진수를 이용하여 주소를 할당할 수 있다. 노드에 주소를 할당하기 위해 행의 위치를 $L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ 이라 하고, 열의 위치를 $V_0, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ 이라 한다. 각 노드의 행 위치 $L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ 에 이진수 $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{n-1}$ 을 순차적으로 각각 할당하고, 열 위치 $V_0, V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$ 에 이진수 $(2^n-1)-2^{n-1}, (2^n-1)-2^{n-2}, (2^n-1)-2^{n-3}, \dots, (2^n-1)-2^0$ 을 순차적으로 각각 할당한다. 노드의 주소는 노드의 행과 열에 각각 할당된 n 비트 주소를 행과 열에 대한 접합 연산 $L_i \cdot V_i, (0 \leq i \leq n-1)$ 를 이용하여 표현한다. 행과 열에 대한 접합 연산 $L_i \cdot V_i, (0 \leq i \leq n-1)$ 은 간단히 $L_i V_i$ 로 나타낸다. 행과 열에 대한 접합 연산 $L_i \cdot V_i, (0 \leq i \leq n-1)$ 로 표현된 주소는 $2n$ 개 비트로 구성되어 있고, $2n$ 개 비트에서 n 개 비트는 이진수 "1"을 갖고 나머지 n 개 비트는 이진수 "0"을 갖는다.

예를 들어, 4×4 토러스 구조에서 노드주소의 행과 열 각각을 4개 비트를 이용하여 표현하면 그림 3과 같다.

정리3 $n \times n$ 토러스를 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 에 연장율 2, 확장율 $2C_n / n^2$ 에 임베딩 가능하다.

증명 $n \times n$ 토러스 구조에서 임의의 노드 $S(=s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} s_n)$ 대해 노드 S와 행에서 인접한 노드를 S'_L 와 S'_V 이라 하고, 열에서 인접한 노드를 S'_V 와

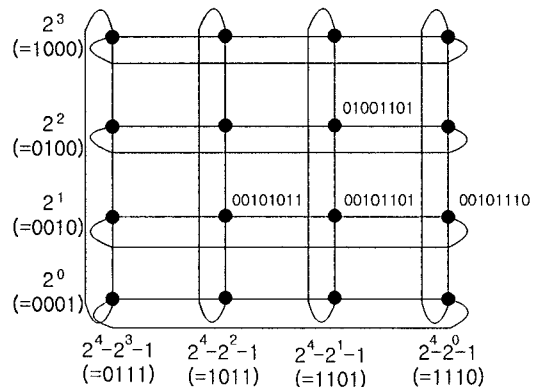


그림 3. 4×4 토러스 구조의 노드 주소 표현

S'_v 이라 하자. 노드 S 의 주소가 $2^j \cdot (2^n - 1) - 2^{n-(i+1)}$ 인 경우 노드 S 와 동일한 행에서 인접한 노드 S'_L 와 S'_R 의 주소는 $2^j \cdot (2^n - 1) - 2^{n-i}$ 또는 $2^j \cdot (2^n - 1) - 2^{n-(i+2)}$ 중의 하나를 각각 갖는다. 즉, 행에서 인접한 노드는 행의 주소는 동일하고 열의 주소만 다른 값을 갖는다. 노드의 주소표현에서 S'_L 의 열 주소가 $(2^n - 1) - 2^{n-i}$ 이라 할 때, 노드 S 와 S'_L 의 열 주소는 2비트 다르다. 왜냐하면 노드 S 와 S'_L 의 열 주소를 나타낸 수식 $(2^n - 1) - 2^{n-i}$ 와 $(2^n - 1) - 2^{n-(i+1)}$ 에서 $2^n - 2^{n-i}$ 와 $2^n - 2^{n-(i+1)}$ 의 값은 항상 2의 지수승 값 2^i 의 값을 갖고, 2^i 값은 이진수로 표현된 노드주소에서 $(j+1)$ 번째 비트는 이진수 "1"이고 나머지 $n-1$ 개 비트는 모두 이진수 "0"을 갖는다. 또한, 2^j 값에서 -1을 한 $2^j - 1$ 값은 이진수로 표현된 n 개 비트에서 첫 번째부터 j 번째 위치까지 모두 이진수 "1"을 갖는다. 따라서 노드 S 와 동일한 행에서 인접한 노드 S'_L 와 S'_R 는 행의 주소 값은 동일하고, 열 주소표현에서 정확히 2비트 서로 다름을 알 수 있다.

노드 S 의 주소가 $2^j \cdot (2^n - 1) - 2^{n-(i+1)}$ 인 경우 S 와 동일한 열에서 인접한 노드 S'_V 와 S''_V 의 주소는 $2^{j+1} \cdot (2^n - 1) - 2^{n-(i+1)}$ 또는 $2^{j+1} \cdot (2^n - 1) - 2^{n-(i+1)}$ 중의 하나를 각각 갖는다. 즉, 동일한 열에서 인접한 노드는 열의 주소는 동일하고 행의 주소만 다른 값을 갖는다. 노드 S 의 행 주소가 2^j 일 때, 노드 S 와 동일한 열에서 인접한 노드 S'_V 와 S''_V 의 행 주소는 2^{j+1} 와 2^{j+1} 이므로 n 개 이진 비트스트링으로 표현하면 이진수 "1"을 갖는 위치는 i 번째와 $(i+2)$ 번째 한 개씩 존재한다. 따라서 노드 S 와 동일한 열에서 인접한 노드 S'_V 와 S''_V 는 열의 주소는 동일하고, 행 주소표현에서 정확히 2비트 서로 다름을 알 수 있다.

본 정리4의 확장율은 다음과 같다. $n \times n$ 토러스의 노드 개수는 n^2 개 이고 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 개수는 $2_n C_n$ 개 이므로 확장율은 $2_n C_n / n^2$ 이다.

보조정리2 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 S 의 비트스트링을 $s_1 s_2 \dots s_n$ 이라 하고, 노드 S' 의 비트스트링을 $s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} s_n$ 이라 하자. 노드 S 와 S' 를 접합한 $S \cdot S'$ 의 비트스트링은 $s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} s_n s_1 s_2 s_3 \dots s_{n-1} s_n$ 이고, 이 비트스트링의 노드를 $P(=S \cdot S')$ 라 하자. 노드 P 는 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 그래프의 노드 비트스트링과 동일하다.

증명 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 S 는 n 개의 비트스트링 $s_1 s_2 s_3 \dots s_j \dots s_n$ 으로 구성되고, 예지는 노드의 심볼에서 오직 1비트 다른 노드 $s_1 s_2 s_3 \dots s_j \dots s_n, (1 \leq j \leq n)$ 를 연결하는 예지와 노드의 심볼이 서로 보수 관계를 갖는 노드 $\overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_j \dots s_n}$ 를 연결하는 2가지의 예지로 정의된다. 본 논문에서는 노드의 심볼이 $j, (1 \leq j \leq n)$ 번째 위치에서 1비트 다른 노드를 연결하는 예지를 j -차원 예지라 하고, 노드의 심볼이 서로 보수 관계인 노드를 연결하는 예지를 c -차원 예지라 한다. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 에서 노드의 비트스트링을 $2n$ 으로 확장하기 위해 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 비트스트링 $s_1 s_2 \dots s_n$ 과 보수 관계를 갖는 n 개의 비트스트링을 $s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} \dots s_{n+j} \dots s_{2n} (= \overline{s_1 s_2 s_3 \dots s_j \dots s_n})$ 이라 하자. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 비트스트링을 $2n$ 개 비트로 확장하기 위해 비트스트링 $s_1 s_2 \dots s_n$ 과 $s_{n+1} s_{n+2} \dots s_{2n}$ 을 접합한 비트는 $s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} s_{n+2} \dots s_{2n}$ 이다. $2n$ 개의 비트스트링으로 표현된 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 비트스트링에서 "0"과 "1"의 개수는 각각 n 개씩이다. 왜냐하면 확장된 비트스트링 $s_{n+1} s_{n+2} \dots s_{2n}$ 은 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 비트스트링 $s_1 s_2 \dots s_n$ 의 보수를 생성하여 첨가했기 때문이다. $2n$ 비트로 확장된 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 비트스트링 $s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} s_{n+2} \dots s_{2n}$ 과 j -차원 예지에 의해 연결된 노드는 n 개이고, j -차원 예지에 의해 연결된 노드들은 j 번째와 $n+j$ 번째 위치가 서로 다른 비트스트링을 갖는다. 또한 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 비트스트링 $s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} s_{n+2} \dots s_{2n}$ 과 c -차원 예지에 의해 연결된 노드는 1개이고, c -차원 예지에 의해 연결된 노드들은 서로 보수 관계를 갖는다.

따라서 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 S 의 비트스트링과 보수 관계를 갖는 노드 S' 의 비트스트링을 접합한 $S \cdot S'$ 의 비트스트링은 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 비트스트링에 존재한다.

예를 들어, 폴디드 하이퍼큐브 FQ_4 의 임의의 노드 S 의 비트스트링이 0000이라 하면, 노드 S' 의 비트스트링은 1111이다. 노드 S 와 S' 의 주소를 접합한 $S \cdot S'$ 의 비트스트링은 00001111이다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(8, 4)$ 그래프의 노드 주소표현은 이진비트 8개를 이용하고, 이진수 1과 0의 개수는 각각 4개씩을 갖는다. 따라서 폴디드 하이퍼큐브 FQ_4 의 노드 S 와 S' 를 접합한 $S \cdot S'$ 의 비트스트링 00001111은 폴디드 하이퍼스타 $FHS(8, 4)$ 의 노드 중 하나이다.

폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 를 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 로 임베딩하는 방법은 FQ_n 의 노드를 $FHS(2n, n)$ 의 노드로 일대일 사상한다. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드는 n 개의 비트스트링 $s_1s_2\dots s_j\dots s_n$, ($1 \leq j \leq n$)으로 구성되고, 폴디드 하이퍼스타 그래프 $FHS(2n, n)$ 의 노드는 $2n$ 개의 비트스트링 $s_1s_2\dots s_i\dots s_{2n}$, ($1 \leq i \leq 2n$)으로 구성된다. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드를 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드로 변환하기 위해 n 개 비트로 구성된 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 주소를 $2n$ 개 비트스트링으로 확장한다. 비트스트링을 확장하는 방법은 보조정리5를 이용한다.

정리 4 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 은 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 에 연장을 2, 확장을 ${}_{2n}C_n / 2^n$ 에 임베딩 가능하다.

증명 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드는 n 개의 비트스트링 $s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n$ 으로 구성되고, 예지는 노드의 심벌에서 오직 1비트 다른 노드 $s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n$, ($1 \leq j \leq n$)을 연결하는 j -차원 예지와 노드의 심벌이 서로 보수 관계를 갖는 노드 $s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n$ 를 연결하는 c -차원 예지가 있다.

폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 와 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 그래프는 노드 대칭적인 성질이 있으므로 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 임의의 노드에 인접한 j -차원 예지와 c -차원 예지에 대해서만 보이도록 한다.

(경우1) j -차원 예지

폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 S 의 비트스트링을 $s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n$ 이라 하자. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 임의의 노드 S 와 S' 가 j -차원 예지에 의해 인접할 때, 두 노드 $S(=s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n)$ 와 $S'(=s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n)$ 의 비트스트링에서 j 번째 비트스트링이 서로 보수이다. 노드 $S(=s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n)$ 와 $S'(=s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n)$ 의 비트스트링을 보조정리1에 의해 $2n$ 개 비트스트링으로 확장하면 노드 $S(=s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} \dots s_{n+j} \dots s_{2n})$ 이고 $S'(=s_1s_2s_3\dots s_j\dots s_n s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} \dots s_{n+j} \dots s_{2n})$ 이다.

$2n$ 개 비트스트링으로 확장된 노드 S 와 S' 의 비트스트링을 비교하면 j 번째와 $n+j$ 번째 위치의 심벌이 서로 보수관계임을 알 수 있다. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 에서 j -차원 예지에 의해 인접한 노드 S 와 S' 를 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 $Q(=q_1q_2q_3\dots$

$q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 와 $Q'(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 로 각각 사상한다. 이때 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 S 와 S' 에 일대일 대응하는 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 Q 와 Q' 는 반드시 존재함을 보조정리5에 의해 알 수 있다. 경우1의 임베딩 연장은 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 그래프의 노드 Q 에서 Q' 로 라우팅을 위한 최단경로의 길이를 이용하여 분석할 수 있다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 $Q(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 에서 노드 $Q'(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 로 라우팅은 노드 $Q(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 의 심벌에서 심벌 q_i 과 q_j 의 관계 따라 다음 2가지 경우로 나눌 수 있다($2 \leq j \leq n$). (경우1.1) 노드 Q 의 비트스트링에서 심벌 $q_i = q_j$ 인 경우

폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 $Q(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 에서 심벌 $q_i = q_j$ 이므로 심벌 q_i 과 q_{n+j} 은 서로 보수 관계(즉, $q_i = \overline{q_{n+j}}$)임을 알 수 있다. 노드 $Q(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 에서 노드 $Q'(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 로 라우팅은 $(n+j)$ -차원 예지와 j -차원 예지를 연속적으로 경유하면 된다. 즉, 노드 $Q(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 에서 $(n+j)$ -차원 예지에 의한 인접한 노드의 비트스트링은 $q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n}$ 이고, 이 노드에서 j -차원 예지에 의해 인접한 노드의 비트스트링은 $q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n}$ 이고, 노드 Q' 와 동일한 비트스트링이다. 따라서 노드 Q 에서 Q' 로 라우팅하기 위한 예지 개수는 2개이므로 연장은 2이다.

(경우1.2) 노드 Q 의 비트스트링에서 심벌 $q_i \neq q_j$ 인 경우

폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 $Q(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 에서 심벌 $q_i \neq q_j$ 이므로 심벌 q_i 과 q_{n+j} 은 동일한 이진비트 관계(즉, $q_i = q_{n+j}$)임을 알 수 있다. 노드 $Q(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 에서 노드 $Q'(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 로 라우팅은 j -차원 예지와 $(n+j)$ -차원 예지를 연속적으로 경유하면 된다. 즉, 노드 $Q(=q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n})$ 에서 j -차원 예지에 의한 인접한 노드의 비트스트링은 $q_1q_2q_3\dots q_j\dots q_n q_{n+1} q_{n+2} q_{n+3} \dots q_{n+j} \dots q_{2n}$ 이고, 이 노드에서 $(n+j)$ -차원

에지에 의해 인접한 노드의 비트스트링은 $q_1q_2q_3\cdots q_j\cdots q_nq_{n+1}q_{n+2}q_{n+3}\cdots q_{n+j}\cdots q_{2n}$ 이고, 노드 Q' 와 동일한 비트스트링이다. 따라서 노드 Q 에서 Q' 로 라우팅하기 위한 에지 개수는 2개이므로 연장율은 2이다.

(경우2) c -차원 에지

폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 $S(=s_1s_2s_3\cdots s_j\cdots s_n)$ 와 c -차원 에지에 의해 인접한 노드 S' 의 비트스트링은 $s_1s_2s_3\cdots s_j\cdots s_n$ 이다. 노드 $S(=s_1s_2s_3\cdots s_j\cdots s_n)$ 와 $S'(=s_1s_2s_3\cdots s_j\cdots s_n)$ 의 비트스트링을 보조정리1에 의해 $2n$ 개 비트스트링으로 확장하면 노드 $S(=s_1s_2s_3\cdots s_j\cdots s_n s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} \cdots s_{n+j} \cdots s_{2n})$ 이고 $S'(=s_1s_2s_3\cdots s_j\cdots s_n s_{n+1} s_{n+2} s_{n+3} \cdots s_{n+j} \cdots s_{2n})$ 이다. $2n$ 개 비트스트링으로 확장된 노드 S 와 S' 의 비트스트링을 비교하면 j 번째 위치의 심별이 서로 보수이다($1 \leq j \leq 2n$).

폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 에서 c -차원 에지에 의해 인접한 노드 S 와 S' 를 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 $Q(=q_1q_2q_3\cdots q_j\cdots q_nq_{n+1}q_{n+2}q_{n+3}\cdots q_{n+j}\cdots q_{2n})$ 와 $Q'(=q_1q_2q_3\cdots q_j\cdots q_nq_{n+1}q_{n+2}q_{n+3}\cdots q_{n+j}\cdots q_{2n})$ 로 각각 사상한다. 이때 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 S 와 S' 에 일대일 대응하는 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 Q 와 Q' 는 반드시 존재함을 보조정리1에 의해 알 수 있다. 경우2의 임베딩 연장율은 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 그래프의 노드 Q 에서 Q' 로 라우팅을 위한 최단경로의 길이를 이용하여 분석할 수 있다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 c -차원 에지 정의에 의해 노드 $Q(=q_1q_2q_3\cdots q_j\cdots q_nq_{n+1}q_{n+2}q_{n+3}\cdots q_{n+j}\cdots q_{2n})$ 와 노드 $Q'(=q_1q_2q_3\cdots q_j\cdots q_nq_{n+1}q_{n+2}q_{n+3}\cdots q_{n+j}\cdots q_{2n})$ 는 서로 인접한 노드이다. 그러므로 노드 Q 에서 Q' 로 라우팅하기 위한 에지 개수는 1개이므로 연장율은 1이다.

본 정리4의 확장율은 다음과 같다. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 개수는 n^2 개 이고, 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 개수는 $2nC_n$ 개 이므로 확장율은 $2nC_n / n^2$ 이다.

예를 들어, 폴디드 하이퍼큐브 FQ_3 의 노드 S 의 비트스트링이 001이라 할 때, 노드 S 와 2-차원 에지에 의해 인접한 노드 S' 의 비트스트링은 011이다. 보조정리1에 의해 노드 S 와 S' 를 6비트로 확장하면 노드 S 의 비트스트링은 001110이고, 노드 S' 의 비트스트링은 011100이다. 6비트로 확장된 폴디드 하이퍼큐브 FQ_3 의 노드 $S(=001110)$ 와 $S'(=011100)$ 가 폴디드 하이퍼스타 그래프 $FHS(6, 3)$ 의 노드 $Q(=001110)$ 와

$Q'(=011100)$ 로 각각 사상되었을 때, 노드 $Q(=001110)$ 에서 $Q'(=011100)$ 로 라우팅은 다음과 같다. 이 경우 노드 $Q(=001110)$ 와 $Q'(=011100)$ 의 첫 번째 비트가 이진수 "0"로 동일하므로 경우1.1에 해당된다. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 에서 $n=3$ 이므로 노드 Q 에서 경유하는 차원 에지는 (3+2)-차원 에지와 2-차원 에지이다. 노드 $Q(=001110)$ 에서 (3+2)-차원 에지에 의해 인접한 노드의 비트스트링은 101100이고, 이 노드에서 2-차원 에지에 의해 인접한 노드는 011100으로 노드 Q' 의 비트스트링과 동일함을 알 수 있다.

따름정리1 하이퍼큐브 Q_n 은 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 에 연장율 2, 확장을 $2nC_n / 2^n$ 에 임베딩 가능하다.

증명 하이퍼큐브 Q_n 의 노드 정의는 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 노드 정의와 동일하고, 에지 정의는 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n 의 j -차원 에지만 있고 c -차원 에지는 없는 그래프이다. 따라서 정리2에 의해 하이퍼큐브 Q_n 은 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 에 연장율 2, 확장을 $2nC_n / 2^n$ 에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

보조정리3 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 주소에서 가장 왼쪽 1비트를 제거한 $2n-1$ 개 비트스트링은 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 노드 주소 중 일부와 동일하다.

증명 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 B 는 $2n$ 개의 이진비트스트링 $b_1b_2b_3\cdots b_j\cdots b_{2n}$ 으로 구성되어 있다($1 \leq j \leq 2n$). 노드 B 의 비트스트링에서 이진수 "1"과 "0"의 개수는 각각 n 개이다. 노드 B 의 비트스트링 $b_1b_2b_3\cdots b_j\cdots b_{2n}$ 에서 가장 왼쪽 첫 번째 비트 b_1 을 제거한 비트스트링 $b_2b_3\cdots b_j\cdots b_{2n}$ 은 $2n-1$ 개 이진비트로 구성되어 있고, 이 비트스트링은 이진수 "1"과 "0"의 개수가 1개 차이 나는 비트스트링이다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드 주소에서 가장 왼쪽 첫 번째 비트를 제거한 $2n-1$ 개 이진비트스트링으로 노드 주소를 표현한 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n, n)$ 의 노드는 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 노드 중 일부를 쉽게 알 수 있다. 왜냐하면 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 노드는 $2n-1$ 개 이진비트를 이용하여 노드 주소를 생성하는 방법으로 구성되어 있고, 전체 노드 개수는 2^{2n-1} 개이다. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 2^{2n-1} 개 노드 중 노드 주소에서 이진수 "1"이 n 개이고

이진수 “0”이 $n-1$ 개 비트스트링으로 구성된 노드는 모두 $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$ 개이다. 이러한 노드는 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 $2n$ 개 이진비트스트링으로 표현한 노드에서 가장 왼쪽의 첫 번째 비트가 $b_1=“0”$ 인 노드의 개수와 동일하다. 이와 유사하게 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 2^{2n-1} 개 노드 중 노드 주소에서 이진수 “1”이 $n-1$ 개이고 “0”이 n 개 비트스트링으로 구성된 $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$ 개 노드는 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 $2n$ 개 이진비트스트링으로 표현한 노드 주소에서 가장 왼쪽의 첫 번째 비트가 $b_1=“1”$ 인 노드의 개수와 동일하다. 따라서 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 노드 중 $2n-1$ 개 비트스트링으로 구성된 노드 중 이진수 “0”과 “1”의 개수가 한 개 차이나는 비트스트링의 개수는 $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} + \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$ 으로서 전체 노드 개수는 $\frac{(2n)!}{n!n!}$ 개이다. 따라서 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 노드 주소에서 가장왼쪽 1비트를 제거한 비트스트링은 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 전체 노드 2^{2n-1} 개 중에서 $\frac{(2n)!}{n!n!}$ 개가 동일한 노드임을 알 수 있다.

폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 을 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 로 임베딩 하는 방법은 다음과 같다. 첫째, 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 노드를 나타내는 $2n$ 개 이진비트스트링을 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 노드 주소 표현과 동일한 $2n-1$ 개 비트스트링으로 나타낸다. 둘째, 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 인접한 노드 U 와 U', U'' 를 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 두 노드 V 와 V', V'' 로 각각 사상한다. 이때 노드 U 와 U', U'' 의 이진비트스트링은 사상된 노드 V, V', V'' 와 각각 동일한 노드들이다. 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 사상된 노드 V 와 V' 그리고 V 와 V'' 가 서로 인접한 노드임을 통해 연장율이 1임을 보이도록 한다.

정리 5 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 은 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 에 연장율 1, 확장율 $2nC_n / 2^{2n-1}$ 에 임베딩 가능하다.

증명 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 노드 B 의 주소표현을 $b_1b_2b_3...b_j...b_{2n}$ 이라 할 때, 노드 B 와 인접한 j -차원노드를 B', c -차원에지에 의해 인접한 노드를 B'' 라 하자. 노드 B' 의 비트스트링은 $B'=b_1b_2b_3...b_1...b_{2n}$ (단, 심별 $b_1 = \bar{b}_j, 2 \leq j \leq 2n$)이고, 노드 B'' 의 비트스트링은 $B''=\overline{b_1b_2b_3...b_j...b_{2n}}$ 이다. 폴디드 하

이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 노드 주소를 나타내는 이진비트스트링을 보조정리5에 의해 $2n-1$ 개 비트스트링으로 노드 B, B', B'' 을 각각 표현하면 $B=b_2b_3...b_j...b_{2n}$ 이고, $B'=b_2b_3...b_1...b_{2n}$ 이고, $B''=\overline{b_2b_3...b_j...b_{2n}}$ 으로 나타낼 수 있다. 이때 심별 $b_1 = \bar{b}_j$ 인 성질에 의해 노드 $B'=b_2b_3...b_1...b_{2n}$ 은 노드 $B'=b_2b_3...b_j...b_{2n}$ 으로 나타낼 수 있다.

폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 노드 Q 의 주소표현을 $q_1q_2q_3...q_j...q_{2n-1}$ 이라 할 때, 노드 Q 와 인접한 j -차원노드를 Q', c -차원에지에 의해 인접한 노드를 Q'' 라 하자. 노드 Q' 의 비트스트링은 $Q'=q_1q_2q_3...q_j...q_{2n-1}$ (단, $1 \leq j \leq 2n-1$)이고, 노드 Q'' 의 비트스트링은 $Q''=\overline{q_1q_2q_3...q_j...q_{2n-1}}$ 이다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 노드를 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 노드로 일대일 사상할 때, 심별 $b_i=q_i, b_i \in \{0,1\}$ 이라 할 수 있다($1 \leq i \leq 2n-1$). 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 노드 B, B', B'' 을 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 노드 Q, Q', Q'' 로 순서적으로 각각 사상하면, 노드의 비트스트링을 통해 노드 $B=Q, 노드 B'=Q', 노드 B''=Q''$ 임을 알 수 있다. 또한, 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 의 노드 Q 와 Q' 는 j -차원 에지에 의해 서로 인접한 노드이고, 노드 Q 와 Q'' 는 c -차원 에지에 의해 서로 인접한 노드이다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 과 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 은 노드 대칭적인 성질이 있으므로 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 은 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 로 연장율 1, 확장율 $2nC_n / 2^{2n-1}$ 에 임베딩 가능함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 폴디드 하이퍼스타 네트워크의 성질과 임베딩을 분석하였다. 폴디드 하이퍼스타 네트워크는 노드 대칭성, 최대 고장허용도, 간단한 라우팅 성질을 갖고 있으며, 망비용 관점에서는 동일한 노드 개수를 갖는 하이퍼큐브 부류보다 개선되었지만, 스타 그래프보다는 우수하지 못하다.

본 논문의 연구 결과는 다음과 같다. 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n,k)$ 는 폴디드 하이퍼스타 $FHS(n-1,k-1)$ 와 $FHS(n-1,k)$ 를 연결하여 생성할 수 있으며, 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 의 노드연결도 $\kappa(FHS(2n,n))$ 는 $n+1$ 로 최대 고장허용도를 가짐을 보였다. 임베딩에 있어서는 폴디드 하이퍼큐브 FQ_n

은 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 에 연장을 2, 확장율 $2nC_n / 2^n$, $n \times n$ 토러스 구조를 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 에 연장을 2, 확장율 $2nC_n / n^2$ 에 임베딩 가능하다. 또한, 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 은 폴디드 하이퍼큐브 FQ_{2n-1} 에 연장을 1, 확장율 $2nC_n / 2^{n-1}$ 에 임베딩 가능함을 보였다. 이러한 임베딩 결과는 하이퍼큐브에서 개발된 알고리즘을 폴디드 하이퍼큐브에서 상수 비용만 추가하면 시뮬레이션 할 수 있음을 의미한다. 즉, 하이퍼큐브와 토러스 구조에서 개발된 알고리즘을 폴디드 하이퍼스타 $FHS(2n,n)$ 에서 이용하는 경우 처리 시간 또는 비용이 2배 증가함을 의미한다. 추후 연구로 폴디드 하이퍼스타 네트워크에서 사이클의 성질과 해밀톤 경로에 대한 연구가 요구된다.

참 고 문 헌

[1] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The Star Graph: An Attractive Alternative to the n-Cube," Proc. Int'l. Conf. on Parallel Processing, pp. 393-400, Aug. 1987.

[2] S. B. Akers and B. Krishnamurthy, "A Group-theoretic Model for Symmetric Interconnection Network," *IEEE Trans. Comput.*, Vol.38, No.4, pp. 555-565, 1989.

[3] K. Day and A. Tripathi, "A Comparative Study of Topological Properties of Hypercubes and Star Graphs," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, Vol.5, No.1, pp. 31-38, 1994.

[4] K. Efe, "A Variation on the Hypercube with Lower Diameter," *IEEE Trans. Comput.*, Vol. 40, No.11, pp. 1312-1316, 1991.

[5] A. K. Gupta and S. E. Hambrusch, "Multiple Network Embeddings into Hypercubes," *J. Parallel and Distributed Computing*, Vol.19, pp. 73-82, 1993.

[6] F. Harary, J. P. Hayes, and H.-J. Wu, "A Survey of the Theory of Hypercube Graphs," *Comput. Math. Appl.*, Vol.15, pp. 277-289, 1988.

[7] S. Y. Heiseh, "Embedding of Cycles in the

Fault Hypercube," ACSAC 2005, LNCS 3740, pp. 229-235, 2005.

[8] J. Kim and K-G. Shin, "Operationally Enhanced Folded Hypercubes," *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, Vol.5, No.12, pp. 1310-1316, Dec. 1994.

[9] J-S Kim, E-S Oh, and H-O Lee, "Topological and Communication Aspect of Hyper-star Graphs," LNCS 2868, pp. 51-58, 2003.

[10] H-O Lee, J-S Kim, E-S Oh, H-S Lim, "Hyper-star Graph: a New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," LNCS 2510, pp. 858-865, 2002.

[11] S. Ranka, J-C. Wang, and N. Yeh, "Embedding Meshes on the Star Graph," *J. Parallel and Distributed Computing*, Vol.19, pp. 131-135, 1993.

[12] I. Stojmenovic, "Honeycomb Networks: Topological Properties and Communication Algorithms," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, Vol.8, No.10, pp. 1036-1042, 1997.

[13] D. S. Scott and J. Brandenburg, "Minimal Mesh Embedding in Binary Hypercubes," *IEEE Trans. Comput.*, Vol.37, pp. 1284-1285, 1988.

[14] S. K. Yun and K. H. Park, "Comments on Hierarchical Cubic Networks," *IEEE Trans. Parallel Distributed Syst.*, Vol.9, No.4, pp. 410-414, 1998.



김 종 석

1995년 2월 순천대학교 전산학과 (학사)
 2001년 2월 순천대학교 컴퓨터과 학과(석사)
 2004년 8월 순천대학교 컴퓨터과 학과(박사)
 2005년 2월~2008년 2월 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과 학과 박사후과정
 2008년 3월~현재 영남대학교 전자정보공학부 BK21 연구교수
 관심분야 : 병렬 및 분산처리, 계산이론, 알고리즘, 네트워크 설계 및 분석



조 정 호

- 1984년 2월 전남대학교 계산통계학과(학사)
- 1987년 2월 전남대학교 전산통계학과(석사)
- 1996년 8월 전남대학교 전산통계학과(박사)

1988년 2월~1997년 2월 한국전자통신연구소 이동통신 기술연구부 선임연구원
 2005년 7월~2006년 7월 Univ. of Arizona, Research Scholar
 1997년 3월~현재 광주대학교 정보통신학과 부교수
 관심분야 : 그래프이론, 네트워크 QoS, 무선 PAN



이 형 옥

- 1994년 2월 순천대학교 전산학과(학사)
- 1996년 2월 전남대학교 전산통계학과(석사)
- 1999년 2월 전남대학교 전산통계학과(박사)
- 1999년 10월~2002년 2월 한국정보사회진흥원 선임연구원

2006년 1월~2007년 7월 Univ. of Texas at Dallas, Research Scholar
 2002년 3~현재 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수
 관심분야 : 네트워크 설계 및 분석, 병렬 및 분산처리, 계산이론, 알고리즘