대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.3, 463-487. Sep. 2008

확률에 대한 교사의 교수학적 내용 지식 분석

신 보 미*

이 연구에서는 확률에 대한 교사의 교수학적 내용 지식의 다양한 측면 중 특히 '확률에 대한 교과 내용 지식'과 '확률과 관련된 학생들의 이해에 대한 지식'을 분석하였다. 확률에 대한 교과 내용 지식을 분석하기 위하여 지필 검사를 실시하였으며, 확률과 관련된 학생들의 이해에 대한 지식을 살펴보기 위하여 교사들 간의 모둠 토론을 통해 학생들의 반응 결과에 대한 이유를 추측해 보도록 하였다. 지필 검사와 모둠 토론 결과를 선행 연구와 비교 분석함으로써 교사들이 지닌 확률 내용 지식의 특징과, 학생들이 확률을 이해하는 정도에 대해 교사가 지닌 지식의 특징을 상세히 기술하였다.

Ⅰ. 서 론

교사의 지식은 수업과 학생의 학습에 궁극적인 영향을 미친다. Ball, Lubienski, & Mewborn(2001)은 효과적인 수업을 위해 교사의 지식이 중요하다고 주장하였다. Ma(2002)는 수학 교수와 학습에 직접적인 영향을 미치는 요인으로 교사가 지닌 지식의 수준을 지적하였다. Shulman(1986; 1987)은 교사의 지식을 교과 내용 지식(subject matter knowledge), 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge), 교육과정 지식(curriculur knowledge)의 세 가지 범주로 분류하였으며, 특히 교수학적 내용 지식을 교수 능력과 관련된 가장 중요한 지식이라고 설명하였다.

선행연구에 따르면 교수학적 내용 지식은 다양한 관점에서 여러 가지 구성 요소를 통해 정의된다. 이경은(2007: 37)은 교수학적 내용 지식의 구성 요소를 8가지로 추출하여 연구자별로 이를 분류하였다. 이 분류에 따르면 학생의 이해와 오개념에 대한 지식은 분석된 모든 연구에서 교수학적 내용 지식에 포함된다. 한편, 여러 연구는 교사의 지식에서 교과 내용 지식의 중요성을 강조한 바 있다(Even, 1990; Fennema, & Franke, 1992; Ma, 2002; Stein, Baxter, & Leinhardt, 1990). 이상에 따라 '교과 내용 지식'과 '학생의 이해와 오개념에 대한 지식'을 교수학적 내용 지식의 주요한 구성 요소로 간주할 수 있다.

Stohl(2005: 351)은 확률 교육의 성패가 확률에 대한 교사의 교과 내용 지식과 학생의 확률 오개념에 대한 교사의 주의 깊은 이해에 달려 있다고 강조하였다. 그는 확률에 대한 학생의 이해와 관련된 다수의 연구가 있음에도 불구하고 확률에 대한 교사의 교과 내용 지식과 확률 지도에 필요한 교사의 지식에 대한 연구가 거의 없다고 비판하였다. 이 연구는 확률에 대한

* 광주시교육정보원(bomi0210@hanmail.net)

교사의 교수학적 내용 지식의 다양한 측면 중 특히 '확률에 대해 교사들이 지닌 교과 내용 지식'의 특징과 '학생의 확률 오개념에 대해 교사들이 이해하는 정도'를 분석하는데 목적이 있다. 또한 이러한 분석 결과를 토대로 확률에 대한 교사 교육과정의 설계와 관련된 시사점을 간접적으로 기술하고자 한다.

II. 문헌 검토

1. 교수학적 내용 지식의 구성 요소

Shulman(1986)에 의해 교사의 지식이 교과 내용 지식, 교수학적 내용 지식, 교육과정 지식으로 정의된 이후 교수학적 내용 지식은 교수 능력과 관련된 가장 중요한 지식으로 간주되어 왔다. 교수학적 내용 지식은 해당 연구의 강조점에 따라 다양한 방식과 여러 구성 요소를 통해 설명된다. Shulman(1987)은 교수학적 내용 지식이 학생의 이해에 대한 지식과 구체적인 교육 내용을 가르치는데 표상 및 전략을 사용하는 기법에 대한 지식으로 구성된다고 하였다.

안선영 · 방정숙(2006: 27)은 교수학적 내용 지식을 교사 개인이 이해한 지식의 수준을 넘어서서 아는 것을 효과적으로 표현하는 능력이며, 학습이 이루어지는 상황을 고려하여 학습하는 대상에 대한 이해뿐만 아니라 학습하는 과정에서 이루어지는 제반 요소들에 대한 지식까지를 의미한다고 설명하였다. 이들은 넓이에 대한 교수학적 내용 지식을 넓이와 관련된 수학 내용에 대한 지식, 학생의 오류와 선행 개념 등을 포함하는 학습자 이해에 대한 지식, 넓이에 대한 교육과정 이해 등을 포함하는 교수 방법에 대한 지식으로 구성하였다.

조성민(2006)은 고등학교 함수 내용을 소재로 교사의 지식과 수업의 관련성을 연구하기 위해 함수에 대한 교사의 지식을 교과 내용 지식과 교수학적 내용 지식으로 분류하였다. 그는 교과 내용 지식의 구성 요소를 개념에 대한 지식과 연결성에 대한 지식으로 보았으며, 교수학적 내용 지식을 교수 방법의 구안에 대한 지식과 학습자에 대한 인식을 구성 요소로 설명하였다. 서관석 · 전경순(2000)은 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 교과 내용 지식과 교수학적 내용 지식의 수준을 알아보는 연구에서 분수와 관련된 교과 내용 지식을 분수를 이해하는 지식, 분수와 관련된 교수학적 내용 지식을 분수를 지도하는 방법에 대한 지식으로 정의하였다.

이경은(2007: 37)은 수업 실제에서 나타나는 교사의 교수학적 내용 지식을 분석하기 위하여 외국의 선행 연구로부터 교수학적 내용 지식의 구성 요소를 추출한 다음, 이를 연구자별로 분류하였다. 이 분류에 따르면 분석된 모든 선행 연구에서 교수학적 내용 지식의 구성 요소로 '학생의 학습과 개념에 대한 지식(student learning and conception)'이 포함된다. Akkoç, Yesildere, & ö zmantar(2007)은 학생의 이해와 오개념에 대한 지식이 교수학적 내용 지식에서 주요한 위치를 차지한다고 지적하였다. 이들에 따르면 교수학적 내용 지식은 교과 내용을 학생들이 이해할 수 있도록 표현하고 구체화하는 방법에 대한 지식과 관련되기 때문에 학생이 어떤 수학적 개념을 이해하거나 어려워하는지를 아는 것이 무엇보다 중요하다.

이상의 선행 연구 결과에 비추어 보면 '학생의 이해에 대한 지식'은 교수학적 내용 지식의 필수 요소라고 볼 수 있는 반면 교과 내용 지식은 연구의 성격에 따라 교수학적 내용 지식의 범주에 포함되기도 하고 그렇지 않기도 함을 알 수 있다. 그러나 교수학적 내용 지식의 범주에 교과 내용 지식을 포함시키지 않은 연

구라고 할지라도 교사의 지식으로서 교과 내용 지식을 별도의 범주로 주요하게 다루고 있다 (Even, 1990; Fennema, & Franke, 1992; Ma, 2002; Stein, Baxter, & Leinhardt, 1990).

Fennema, & Franke(1992)는 교사의 지식을 논할 때, 교사의 수학적 지식은 그 자체로 주요한 관심사가 된다고 지적하였다. 그에 따르면 교사의 수학적 지식은 수학교육 전반에 가장 강력한 영향을 미칠 것이라는 오래된 신념이 존재한다. 때문에 교사가 학생의 학습을 돕기 위해서는 적절한 교과 내용 지식을 지닐 필요가 있다. Even(1990; Ma, 2002)에 따르면 교과 내용에 대한 교사의 지식은 교수 방법의 결정에 직접적인 영향을 미치기 때문에 교과 내용 지식에 대한 교사의 불충분한 이해는 교수학적 내용 지식의 다른 요소만으로는 보충될 수 없다. Stein, Baxter, & Leinhardt(1990)에 따르면 적절한 수학적 지식을 지닌 교사는 개념적으로 연결된 다양한 표상을 통해 의미있는 수업 상황을 진행하는데 반해 제한된 수학적 지식을 지닌 교사는 부적절한 예와 유추를 통해 기계적인 학습을 강조하는 경향이 있다. Mapolelo (1999)는 풍부한 내용 지식을 지닌 교사는 교수에 대한 부담감을 덜 갖는 경향이 있으며, 수학 자체의 내용 지식보다는 구체적인 지도 방법을 고민해 볼 수 있는 기회를 더 많이 가질 수 있기 때문에 보다 효과적으로 학생들을 지도할 수 있다고 주장하였다.

남윤석 · 전평국(2006)에 의하면 수학에 대한 교과 내용 지식과 관련된 면담에서 예비교사들은 풍부한 수학적 지식은 수학에 대한 부담감을 줄여주고 수학을 좋아하는 마음을 갖게 해주며 논리적인 추론이 가능하게 도와주기 때문에 수학을 가르치는데 장점으로 작용할 수 있다고 답하였다. 또한 예비교사들은 수학 내용 지식이 부족하면 학생들을 이해시키는데 어려움이 있을 것 같다고 답하였다. 남윤석 · 전평국은 수학 내용 지식이 부족한 예비 교사가 실제로 학생을 가르치는 장면에서 개념을 이해시키는데 어려움을 겪거나 잘못 가르치고도 잘못되었음을 모르고 지나치는 경우가 있음을 관찰하였다고 설명하였다.

Shulman(1986)은 1970-1980년대 미국의 교사 교육과 평가에서 교과 내용 지식의 중요성이 간과되었다고 비판하였다. 그는 학생들의 학업 능력 향상을 알아보는 연구의 대부분이 학생의 수학 학습의 질에 많은 영향을 미치는 교사의 수학적 지식에 대해서는 분석하지 않았다고 지적하였다. Shulman(1987)은 수학 교육에 대한 개혁이 성공하기 위해서는 가르치는 것이 변화해야 하고 이는 교사의 지식에 대한 연구를 통해 구체화될 수 있다고 하였다. 이상의 선행 연구 결과에 따르면 교사의 교과 내용 지식과 교사가 구현하는 실제 교수 상황의 특징은 밀접하게 관련되어 있으므로 그 중요성이 강조되어야 한다.

2. 확률에 대한 교수학적 내용 지식

앞 절에서는 교사의 교수학적 내용 지식을 구성하는 여러 요소 중 특히 '학생의 이해에 대한 지식'과 '교과 내용에 대한 지식'이 필수적임을 확인하였다. 이 연구에서는 확률에 대한 교수학적 내용 지식을 '확률에 대한 교과 내용 지식'과 '확률에 관한 학생의 이해에 대한 지식'의 측면에서 분석한다. 이하에서는 확률에 대한 교수학적 내용 지식에 대한 선행 연구를 이러한 두 가지 측면에 비추어 간략하게 요약하고 이 연구로의 시사점을 기술한다.

가. 확률에 대한 교과 내용 지식

Stohl(2005: 360)에 따르면 확률 교육에서 교

사가 지닌 확률에 대한 내용 지식은 무엇보다 중요하다. 교사가 확률을 잘 가르치기 위해서는 우선 확률에 대하여 잘 알고 있어야 한다. 큰 수의 법칙과 같이 확률과 관련된 주요 개념을 충분히 이해하여야 하며, 확률이 적용되는 다양한 맥락을 설명하기 위해 실세계의 결정론적 본성(deterministic nature)과 비결정론적 본성(non-deterministic nature)을 인식할 수 있어야 한다. 그러나 주요 확률 개념에 대한 교사의 이해 정도를 알아본 연구가 약간 있을 뿐 확률이 적용되는 실생활 맥락에 대한 교사의 인식 정도를 알아본 연구는 거의 없다.

Begg & Edward(1999/Stohl, 2005: 352에서 재인용)의 연구에 참여한 초등학교 교사들은 대부분 독립성 개념을 충분히 이해하지 못하였으며 대표성 판단 전략(representative heuristic)에 따라 표본을 다루는 경향이 있었다. 이들은 로또와 동전 던지기에서 1, 2, 3, 4 5, 6과 HTHTH보다 2, 13, 19, 27, 30, 38과 TTHTH의 출현 가능성이 더 높다고 판단하였다. 이 교사들은 그래프 그리기와 통계적 계산에 비해 확률을 지도하는 자신들의 능력에 대해 덜 신뢰감을 갖는다고 답하였다.

Carnell(1997)은 13명의 중학교 교사를 대상으로 조건부 확률에 대한 이해 정도를 알아보았다. 이 연구에 참여한 교사들은 조건부 확률 $P(B|A)$에서 사건 A가 사건 B보다 먼저 일어나야 한다고 생각함으로써 나중에 일어나는 사건을 조건사건으로 보지 못하였다. Carnell은 교사들 역시 조건부 확률과 관련된 전형적인 오개념인 시간 축 효과(time-axis fallacy)에 의한 판단 전략을 따르고 있다고 설명하면서 조건부 확률과 관련하여 교사와 학생의 이해 정도에 차이가 없다고 비판하였다.

이상의 선행 연구는 확률에 대한 교사의 교과 내용 지식을 확률 오개념 유형 중 일부에 비추어 간략하게 기술한 것으로, 이들 연구로부터 주요 확률 개념에 있어 교사의 이해에 대한 전반적이고 구체적인 특징을 알아보는 것은 쉽지 않다. 또한 확률이 적용되는 실생활 문제 상황을 해결하는 교사의 능력 정도를 살펴보는데도 한계가 있다. 이 연구에서는 확률에 대한 교사의 교과 내용 지식을 확률 관련 주요 개념에 대한 이해 정도와 확률이 적용되는 실생활 문제 상황을 해결하는 능력에 비추어 기술한다.

나. 확률에 관한 학생의 이해에 대한 지식

Jones(2005; Borovcnik, & Peard, 1996)에 따르면 확률 분야에는 논리적 사고에 바탕을 둔 결정론적 직관과 다른 결과가 많기 때문에 수학의 다른 어떤 분야보다도 학생들의 사전 직관과 확률 구조 사이의 관계를 분명하게 강조하여 지도하는 것이 중요하다. 이러한 맥락에서 좋은 확률 교수는 확률에 대한 학생의 직관으로부터 출발해야 한다(Batanero, & Sanchez, 2005). Saenz(1998)는 학생들의 사전 직관에 존재하는 오개념에 기초하여 수업을 진행한 결과 논리적인 추론 결과에 반하는 확률 문제에 바른 응답을 한 학생의 비율이 두드러지게 높아졌다고 하였다. 이상에 따르면 효과적인 확률 교수를 진행하는데 교사가 확률에 대한 학생의 이해와 오개념에 대한 지식을 갖는 것은 필수적이라고 볼 수 있다.

Watson(2001)은 초등학교 교사 15명과 중학교 교사 28명을 대상으로 확률에 대한 학생의 이해와 관련된 교사의 지식을 분석하였다. 그는 교사들에게 일어날 가능성이 7:2인 사건에 대해서 학생들이 들 것 같은 바른 설명과 잘못된 설명의 예를 말해보도록 요구하였다. 교사 대부분은 학생이 말할 것 같은 잘못된 설명의 예는 제시할 수 있었지만 바른 설명의 예는 15

명의 중학교 교사만이 제시할 수 있었다. 또한 확률과 관련하여 학생이 지니는 어려움이 무엇인지에 대하여 물었을 때, 2명의 초등학교 교사만이 확률 개념의 이해라고 답하였다. 13명의 중학교 교사는 확률 영역에서 학생들의 어려움은 대부분 확률과 순열의 계산 또는 수형도 그리기 등과 같은 절차적 측면에 있다고 답하였다. Watson은 교사들이 확률 영역에서 학생이 겪는 어려움에 대해 이와 같이 단편적인 지식을 지니고 있기 때문에 확률 지도가 대부분 확률 계산 등과 관련된 절차적 지식의 측면에서만 진행되며, 확률 개념과 시뮬레이션, 표본 추출 등과 같은 실제적인 지식이 거의 다루어지지 않는다고 비판하였다.

Stohl(2005)에 따르면 확률 영역에서 학생의 이해에 대한 교사의 지식을 분석한 연구가 거의 없다. Stohl은 교사가 학생의 적극적인 활동을 유도하기 위해 확률 수업 상황을 정교하게 설계하기 위해서는 구체적인 확률 과제에 대한 학생의 사전 직관과 확률 오개념을 알 필요가 있다고 지적하였다. 그러나 Watson의 연구를 통해 구체적인 확률 과제와 관련된 학생들의 이해에 대한 교사의 지식이 지닌 특징을 밝히는 데는 한계가 있다. 이 연구에서는 구체적인 확률 문제 상황에 대한 학생의 반응 결과를 평가하는 활동을 통해 실제 교사들이 확률에 관한 학생의 이해에 대해 지니고 있는 지식의 특징을 기술한다.

III. 연구 방법

이 연구의 목적은 확률에 대한 교사의 교수학적 내용 지식을 분석하는데 있다. 이는 '확률에 대한 교사의 교과 내용 지식'과 '확률과 관련된 학생의 이해에 대한 교사의 지식'이라는 두 가지 관점에서 기술된다. 이 연구에 참여한 교사는 **광역시 소재 중고등학교에서 근무하는 경력 3년에서 5년 사이에 있는 2급 정교사 44명이다[1].

우선 '확률에 대한 교사의 교과 내용 지식'을 알아보기 위해 교사 44명을 대상으로 20여 분에 걸쳐 지필 검사를 실시한다. 지필 검사는 신보미(2007)의 연구에서 학생들의 확률 오개념 특성과 확률 모델링 능력 수준을 확인하기 위해 사용한 검사지를 통해 진행한다[2]. 이 지필 검사 결과를 우선 각 문항별 정답율에 비추어 분석하고 이로부터 확률 내용 지식에 대한 교사들의 이해 정도와 관련된 전반적인 특징을 기술한다. 다음으로 이러한 전반적인 특징을 '확률 개념'에 대한 이해 정도와 '확률 실생활 문제' 해결 수준이라는 두 가지 범주에서 Fischbein, & Schnarch(1997)의 연구, 신보미(2007)의 연구를 비롯한 선행 연구 결과와 비교 분석하다.

다음으로 '확률과 관련된 학생의 이해에 대한 교사의 지식'을 알아보기 위하여 연구 대상인 교사들에게 신보미(2007)의 연구에 참여한

1) 연구대상 교사 44명중 20명은 중학교에 24명은 고등학교에 근무하고 있다.
2) 이 연구에서는 '확률과 관련된 학생의 이해에 대한 교사의 지식'을 알아보기 위해 신보미(2007)의 연구에 참여한 학생들의 지필 검사 결과를 교사들에게 제시한다. 확률과 관련된 학생의 이해에 대한 교사의 지식을 분석할 때 확률에 대해 교사 자신이 지닌 교과 내용 지식의 특징과의 관계를 간접적으로 살펴보기 위해 '확률에 대한 교사의 교과 내용 지식'을 알아보는데 신보미(2007)의 연구에서 사용된 지필 검사지를 사용하였다.
3) 이 활동지에는 '확률에 대한 교사의 교과 내용 지식'을 알아보기 위해 사용된 지필 검사지의 문항 중 12번, 13번, 14번이 포함되지 않는다. '확률과 관련된 학생의 이해에 대한 교사의 지식'은 '학생의 오개념에 대한 이해', '학생의 오류 유형에 대한 이해'의 범주에서 분석될 것이므로 모둠 토론 시간의 제한 등을 감안하여 확률 오개념과 직접적인 관련성이 약한 문항 13번과 14번, 문항 2와 중복되는 경향이 있는 문항 12번을 제외하였다.

학생들의 사전 지필 검사 결과를 활동지로 제시한다. 이 활동지에는 각 문항별로 주어진 답지를 선택한 학생의 인원수가 기록되어 있다[3]. 교사들은 각 문항에서 다수의 학생들이 오답을 선택한 이유를 약 40여분의 모둠 토론을 통해 추측해 보고 그 토론 결과를 기록한다. 각각 4명씩 11개의 모둠에서 진행된 토론 결과를 기록한 활동지를 분석함으로써 학생의 이해에 대한 교사의 지식으로부터 드러나는 전반적인 특징을 기술한다. 이 중 몇 가지 두드러진 특징에 대해서는 '학생의 확률 오개념에 대한 이해'와 '학생의 오류 유형에 대한 이해'의 범주로 구분하여 신보미(2007), 김수미(2003) 등 학생의 오개념 및 오류를 분석한 선행 연구 결과에 비추어 분석한다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 확률에 대한 교과 내용 지식

교사들의 교과 내용 지식에 대한 이해 정도를 살피는 것은 교수학적 내용 지식과 관련된 논의에 있어 주요한 부분을 차지한다. 이 연구에서는 교사들의 확률 내용 지식에 대한 이해의 특징을 알아보기 위하여 현직 중고등학교 교사를 대상으로 지필 검사를 진행하였다. 지필 검사 결과[4]의 각 문항별 정답율에 비추어 관련 개념에 대해 교사들이 이해하는 정도를 '충분', '다소 미흡', '미흡'으로 분류[5]하여 정리하면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 문항별 정답율에 따른 지필 검사 결과 분석

문항 요소		지필 검사 결과		문항 요소		지필 검사 결과	
번호	관련 개념 및 오개념	정답율 (%)	관련 개념 이해 정도	번호	관련 개념 및 오개념	정답율 (%)	관련 개념 이해 정도
1	표본공간, 등확률 오개념	27	다소 미흡	10	독립성	77	충분
2	변이성, 결과적 접근 오개념	36	다소 미흡	11	큰수의 법칙, 표본크기효과 오개념	22	미흡
3	등확률 오개념	27	다소 미흡	12	변이성	56	다소 미흡
4	조건부 확률, 조건사와 연결사	38	다소 미흡	5(1)	조건부확률, 시간축 효과 오개념	38	다소 미흡
6	유효성 오개념	84	충분	5(2)	조건부확률, 시간축 효과 오개념	59	다소 미흡
7	독립성	88	충분	13	실생활 문제 해결 전략	0.2	미흡
8	등확률 오개념	54	다소 미흡	14	실생활 문제 해결 전략	0.2	미흡
9	대표성 오개념	77	충분				

<표 Ⅳ-1>에 따르면 전반적으로 교사들은 유효성 판단 전략(문항 6)과 대표성 판단 전략(문항 9)에 따른 오개념을 지니고 있지 않으며, 사건의 독립성(문항 7, 문항 10)에 대해서도 잘 이해하고 있음을 알 수 있다. 그러나 표본공간, 자료의 변이성, 조건부 확률 등에 대한 교사들의 이해 정도는 다소 미흡한 것으로 나타났다. 표본공간 구성 등과 관련하여 등확률 판단 전략에 따른 오개념 여부를 알아보는 문항 1, 3, 8에 대해서, 문항 8에는 비교적 높은 정답율을 보인 반면 문항 1, 3에서는 그렇지 못하였다. 빈도적 자료의 중심 집중 경향과 변이성에 대한 인식 여부를 알아보는 문항 2, 12에 대해서도 문항 2와 문항 12의 정답율 사이에 다소간의 차이가 있었다. 조건부 확률과 관련된 조건사와 연결사, 시간 축 효과 판단 전략에 대한 오개념을 알아보는 문항 4와 문항 5의 (1), (2)에 대해서도 문항 간 정답율에 차이를 보였다. 또한 큰 수의 법칙과 관련하여 표본 크기 효과에 따른 오개념을 지니고 있으며(문항 11), 실생활 확률 문제 상황 해결에 필요한 전략을 고안하는데 상당한 어려움이 있는 것으로 드러났다(문항 13, 문항 14).

이상에 따르면 교사들은 표본공간, 변이성, 조건부 확률 개념과 관련하여 '다소 미흡'한 이해 정도를, 큰 수의 법칙과 실생활 문제 해결 전략에 있어 상당히 '미흡'한 이해 정도를 가졌다고 볼 수 있다. <표 Ⅳ-1>로부터 '다소 미흡' 또는 '미흡'으로 평가된 개념에 대해 교사들이 지닌 이해 정도의 주요 특징을 설문 과정에서 교사들이 제기한 질문 내용, 관련된 설문 문항의 답지별 반응 비율, 설문 문항 간 정답율에 비추어 '확률 개념'의 이해 정도와 '확률 실생활 문제' 해결 수준의 범주에서 요약하면 <표 Ⅳ-2>와 같다. 이하에서는 <표 Ⅳ-2>로 정리된 각 유형에 대해 구체적으로 살펴본다.

가. 표본공간과 근원사건 구성에 어려움이 있다.

표본공간과 근원사건에 대한 이해 정도를 알아보기 위해 제시된 문항 1에 대하여 72%의 교사가 '5와 6의 눈'이 나올 확률과 '5와 5의

<표 Ⅳ-2> 확률에 대한 교과 내용 지식의 주요 특징

범주	유형	내용	문항	주요 개념
확률 개념	유형1	표본공간과 근원사건 구성에 어려움이 있다.	문항1	표본공간과 근원사건
	유형2	자료의 중심 집중 경향을 보다 주요하게 고려한다.	문항2	변이성
	유형3	조건사와 연결사를 구별하지 못한다.	문항4 문항5(1)	조건부 확률
	유형4	시간의 순서를 거스르는 문제에서 조건부확률을 고려한다.	문항5	조건부 확률
	유형5	표본크기 효과에 따른 오개념을 지니고 있다.	문항11	큰 수의 법칙
확률 실생활 문제	유형6	실생활 문제와 관련된 해결 전략을 지니고 있지 않다.	문항13, 문항14	

4) 지필 검사 문항의 구체적인 내용과 교사들의 세부 반응 결과는 <부록 1>을 참조하기 바란다.

5) 관련 개념의 이해 정도는 지필 검사의 평균 정답율이 45.6%로 상당히 낮은 점을 감안하여, 정답율이 25% 이하인 경우 '미흡'으로 75%이상인 경우 '충분'으로 그 이외의 경우는 '다소 미흡'으로 분류하였다.

눈'이 나올 확률이 같다고 답하였다. 교사들대부분이 '5와 6의 눈'이 나올 확률을 고려할 때 (5, 6)이 나올 확률과 (6, 5)가 나올 확률을 함께 생각해야 한다는 것을 간과하였다. 또한 교사들 중에는 '주사위 2개를 던졌을 때 5와 6의 눈이 나올 확률'을 '주사위 1개를 2번 던졌을 때, 첫 번째에 5의 눈, 두 번째에 6의 눈이 나올 확률'로 생각하는 경우도 있었다. 다음 질문은 교사 A가 '5와 6의 눈이 나올 확률'을 '첫 번째에 5의 눈, 두 번째에 6의 눈이 나올 확률'로 이해하고 있음을 보여준다.

교사 A : 왜 1번의 답이 ①인가요? $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$ 니까 $\frac{1}{36}$ 아닌가요?

Fischbein, & Schnarch(1997)은 주사위 2개를 던지는 것과 같은 복합사건(compound event)의 표본공간을 구성할 때 드러나는 이러한 등확률(equiprobability) 오개념이 연령에 관계없이 지속적으로 확률적 사고에 영향을 미친다고 지적한 바 있다. Fischbein, & Schnarch의 연구에 참여한 예비교사 중 78%가 '5와 6의 눈'이 나올 확률과 '5와 5의 눈'이 나올 확률이 같다고 답하였다. 신보미(2007)의 연구에서도 학생 62%가 '두 경우의 확률이 같다'고 답하였다. 이상의 결과는 주사위 1개를 던지는 단순 사건(simple event)과 달리 주사위 2개를 던지는 복합사건에 대하여 표본공간과 근원사건을 적절히 구성하는 맥락이 학습자뿐만 아니라 교사에게도 상당한 인지적 부담이 됨을 보여준다. 학교 교육과정과 교사 교육과정 전체에 걸쳐 복합사건의 표본공간 구성과 관련된 내용이 보다 중점적이고 체계적으로 다루어질 필요가 있다.

나. 자료의 중심 집중 경향을 보다 주요하게 고려한다.

문항 2에서 빨간 사탕이 나올 수학적 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 그러나 이 사실이 빨간 사탕 10개를 '실제로' 복원 추출하였을 때, 빨간 사탕이 항상 5개씩 나온다는 것을 의미하는 것은 아니므로 문항 2에서는 검사 대상자가 ②번을 정답으로 택하는지 보다 ③번을 정답으로 택하지 않는지가 주요 관심사가 된다(Zawojewski, & Shaughnessy, 2000: 259). 검사 대상자는 수학적 확률이 $\frac{1}{2}$ 인 점을 감안하여 실제 추출한 빈도적 자료의 중심값이 5임을 염두에 두어야 하지만 동시에 자료의 변이성 역시 주요하게 고려하여야 한다. 그러나 이 연구에 참여한 교사들의 50%가 ③번을 답으로 택하는 오류를 범하였다. 신보미(2007)의 연구에서는 학생들의 34%가 ③번을 답으로 택하였다. 답지 ③에 대한 반응율의 이러한 차이는 교사들이 학생들에 비해 빈도적 자료를 다룰 때, 자료의 중심 집중 경향을 우선적으로 고려하고 있음을 보여준다.

교사들 중에는 주어진 문제를 '수학적'으로 접근해야 하는지 '통계적'으로 접근해야 하는지에 대해서 의문을 제기하기도 하였다. 실제 추출하는 상황을 고려해 보라는 연구자의 요구에 대하여 문제의 의도 자체를 파악할 수 없다며 매우 난감해 하였다. 다음 담화에 따르면 교사 B는 '수학적'으로 생각할 때는 실제로 사탕을 추출하는 상황에서조차 빨간 사탕이 항상 5개씩 나온다고 답하는 것이 옳다고 생각하는 것 같다(*). 이 교사는 '빨간 사탕이 나올 수학적 확률이 $\frac{1}{2}$ 이다'는 것을 '10개를 뽑으면 그 중에 빨간 사탕이 항상 5개 있다'는 의미로 해석하고 있다[6].

6) 교사 B의 예는 수학적 확률과 통계적 확률 개념에 대한 교사들의 전반적인 이해 정도에 대한 후속 연구가 필요함을 시사한다.

교사 B : 이 문제는 수학적으로 답하는 건가요? 통계적으로 답하는 건가요?

연구자 : 실제로 뽑는다고 생각해보세요.

교사 B : (몹시 난감해하며) 문제의 의도를 모르겠습니다.(답지 ③을 선택한다.)

연구자 : 실제로 뽑았을 때, ③번이 나올까요?

교사 B : 그렇다고 나머지 번호가 나온다는 보장도 없잖아요?

연구자 : 실제 얻어질 것 같은 것으로 가장 적절한 것을 고르시는 겁니다.

교사 B : 수학적으로 생각하느냐, 통계적으로 생각하느냐에 따라 그 답이 달라질 것 같은데요. 문제가 잘못된 것 아닌가요?(*)

답지 ③에 대해서 교사들이 보인 반응율과 교사 B의 사례에 비추어 볼 때, 교사들은 빈도적 자료의 중심 집중 경향을 그 변이성보다 중요하게 고려하는 것으로 진단할 수 있다. 학교수학은 전통적으로 결정론적 맥락에서 지도되어 왔으며(Jones 2005), 이러한 교육과정을 통해 오랫동안 수학 교육을 받았고, 비슷한 교육과정 하에서 수학을 지도하고 있는 교사들이 학생들에 비해 자료의 집중 경향을 강하게 고려하는 이러한 현상은 결정론적 맥락의 교육과정이 확률과 관련된 주요한 개념을 충분히 이해시키는데 한계가 있음을 지적한 Batanero, Henry, & Parzysz(2005)의 연구 결과를 뒷받침한다고 볼 수 있다.

다. 조건사와 연결사를 구별하지 못한다.

문항 4에는 조건부 확률 개념의 토대가 되는 조건사 '…일 때'를 연결사 '…이고'와 구별하여 충분히 이해하고 있는지를 살펴보고자 하는 의도가 있다. 문항 4에 대하여 60%의 교사들이 조건사와 연결사를 구별하지 못하고 ③번을 답으로 택하였다. 문항 5의 (1)에 대해서도 43%의 교사가 구하는 확률이 $\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$ 이기 때문에 $\frac{1}{6}$ 이라고 답하였다. 이는 첫 번째 공이 빨간 공'이고' 두 번째 공이 빨간 공일 확률을 구한 것으로 이 역시 조건사와 연결사에 대한 오개념을 반영하고 있다. 문항 5의 (1)에서 조건사인 '…일 때'를 고려함으로써 조건부 확률에 대한 아이디어를 활용하여 $\frac{1}{3}$ 이라는 바른 답을 구한 교사는 38%명에 불과하였다. 문항 4와 문항 5의 (1)에 대한 이상의 반응 결과는 조건사인 '…일 때'를 연결사인 '…이고'와 구별하여 조건부 확률을 적용하는 교사들의 능력에 상당한 한계가 있음을 보여준다.

한편, 신보미(2007)의 연구에서는 문항 4에 대하여 41%, 문항 5의 (1)에 대하여 26%의 학생들이 각각 ③번과 $\frac{1}{6}$ 을 답으로 택하였다. 교사의 오답 반응율이 학생의 오답 반응율에 비해 높게 나온 이유는 이 연구에 참여한 교사들 중 절반가량이 현재 중학교에 근무하고 있는 반면, 신보미(2007)의 연구 대상은 모두 고등학생들이었던 점에 비추어 생각해 볼 수도 있다. 조건부 확률을 지도의 맥락에서 전혀 다루지 않는 중학교 교사보다는 고등학교에 재학중인 학생들이 조건부 확률에 보다 익숙한 환경에 있을 것으로 추측할 수 있으며, 이러한 조건이 학생의 오개념 정도에 비해 교사의 오개념 정도가 높게 나타나도록 하였을 가능성이 있다.

라. 시간의 순서를 거스르는 문제에서 조건부 확률을 고려한다.

Fischbein, & Schnarch(1997)는 문항 5의 (1), (2)를 활용하여 검사 대상자가 시간 축 효과(time-axis fallacy) 판단 전략에 따른 오개념을 지니고 있는지 알아보았다. Fischbein, & Schnarch에 의하면 시간 축 효과 판단 전략에 따르는 학생은 시간의 순서 때문에 나중에 일

어나는 사건을 조건사건으로 보지 못하는 경향이 있다. 대부분의 학생들은 조건부 확률 $P(A|B)$에 대하여 사건 B가 사건 A보다 앞서야 한다고 생각한다. 이 오개념을 지닌 학생은 문항 5의 (1)에 대해서는 옳은 응답을, (2)에 대해서는 잘못된 응답을 하기 쉽다. Fischbein, & Schnarch의 연구는 5학년을 제외한 전 학년의 연령대에서 시간 축 효과 판단 전략에 따른 전형적인 오개념이 나타남을 지적하고 있다. 신보미(2007)의 연구에서도 문항 5의 (1)에는 39%의 학생이 정답을 구하였지만 (2)에 대해서는 22%만이 정답을 구하였다. 그러나 이 연구에 참여한 교사들의 문항 5에 대한 반응 결과는 이러한 선행 연구 결과와 상당한 차이를 보였다.

이 연구에서 교사들 대부분은 문항 5의 (1)을 해결하는데 조건부 확률 아이디어를 적용하지 않았다. 이들은 조건사 '…일 때'를 연결사 '…이고'로 해석하여 곱사건의 확률을 구하였으며 43%의 교사가 $\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 이라는 잘못된 답을 구하였다. 문항 5의 (1)에 대해서는 38%의 교사만이 $\frac{1}{3}$ 이라는 정답을 구한 반면 문항 5의 (2)를 해결하는 데는 59%의 교사가 조건부 확률 개념을 적용하여 바른 답을 구하였다. 즉, 이 연구에 참여한 교사들은 선행 연구 결과와 달리 문항 5의 (1)에는 오답을, (2)에는 정답을 택한 경우가 더 많았다.

문항 5의 (1), (2) 두 문제 모두 정답을 바르게 구하는 데는 조건부 확률 개념이 필요하다. 그러나 교사들이 실제로 문항 5의 (1), (2)를 해결하는데 조건부 확률 개념을 사용한 비율은 각각 38%, 59%로 다소간의 차이를 보였다[7]. 문항 5의 (1)과 (2)에 모두 조건부 확률 개념 적용이 필요함을 암시하는 조건사가 제시되었음에도 불구하고 두 문제에 대한 교사들의 해결 전략에 상당한 차이가 있었다. 한편, 문항 5의 (1)에서는 43%의 교사가 조건사와 연결사 오개념을 드러내었지만 (2)에서는 0.9%만이 조건사와 연결사를 혼동하였다.

이상에 따르면 다수의 교사들이 문항 5의 (1)에 대해서는 조건부 확률 개념 적용이 필요함을 인식하지 못함으로써 오류를 범한 반면 문항 5의 (2)에 대해서는 조건부 확률 개념을 활용하여 적절히 문제를 해결하였다. 이는 교사들에게 조건사 '…일 때'는 조건부 확률 개념 적용의 실마리가 되지 못함을 암시한다. 이 연구에 참여한 교사들은 조건사보다는 시간의 순서를 거스르는 문항 5의 (2)와 같은 문제 맥락에서 조건부 확률 개념의 필요성을 인식한 것으로 볼 수 있다.

교사들은 문항 4또는 문항 5의 (1)에 대해서는 조건부 확률 개념을 활용하지 않았지만, 문항 5의 (2)와 같이 조건사건이 나중에 일어남으

<표 Ⅳ-3> 문항 5에 대한 반응 결과 비교 (단위 : %)

분류	Fischbein, & Schnarch(1997)의 연구				본 연구	비고
	7학년	9학년	11학년	예비교사		
문항 5의 (1)정답, (2)정답	50	35	30	39	32	
문항 5의 (1)정답, (2)오답	30	35	70	44	7	시간 축 효과
문항 5의 (1)오답, (2)정답	5	5	0	17	27	
문항 5의 (1)오답, (2)오답	15	25	0	0	34	
합계	100	100	100	100	100	

7) 문항 5의 풀이 과정 및 답에 대한 세부 내용은 <표 Ⅳ-4>을 참조하기 바란다.

로써 시간의 순서를 거스르는 문제 상황에서는 조건부 확률 아이디어를 적용하였다. 이는 일반적으로 조건사를 조건부 확률 개념 적용의 단서로 생각하는 확률 문제 해결 전략과 차이를 보이는 대목이다. 이 연구에 참여한 교사들은 선행 연구들에 비해 조건부 확률과 관련하여 시간 축 효과에 따른 오개념은 덜 지니고 있는데 반해, 조건사와 연결사에 따른 오개념 정도는 상대적으로 높다고 볼 수 있다.

마. 표본크기 효과에 따른 오개념을 지니고 있다.

문항 11은 검사 대상자가 표본크기 효과(effect of sample size)에 따른 오개념을 지니고 있는지 알아보는 문항이다. 확률을 추정할 때 표본의 크기가 미치는 영향을 소홀히 하는 표본 크기 효과에 의한 오개념을 지닌 학생은 '③ 작은 병원과 큰 병원은 같다'를 답으로 택하는 경향이 있다(Fischbein, & Schnarch, 1997). Fischbein, & Schnarch은 표본크기 효과에 의한 판단 전략이 큰 수의 법칙을 통해 극복될 수 있다고 주장한 바 있다.

그러나 이 연구에서 44명의 교사들 모두가 큰 수의 법칙을 알고 있다고 답하였음에도 불구하고 이들 중 67%가 문항 11에 대하여 ③번이라는 오답을 택하였다. 이러한 결과는 큰 수

<표 Ⅳ-4> 문항 5의 풀이 과정 및 답에 대한 인원 수

문항번호		문항 5의 (1)		문항 5의 (2)		인원
조건부 확률 개념 사용 유무		사용	미사용	사용	미사용	(명)
풀이과정 및 답	(1)정답 (2)정답	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		14
	(1)정답 (2)오답	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$	2
		$\frac{1}{3}$			무응답	1
	(1)오답 (2)정답		$\frac{1}{6}$ $(=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$		10
			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		1
		$\frac{2}{3}$ (공식오류)		$\frac{1}{3}$		1
	(1)오답 (2)오답		$\frac{1}{6}$ $(=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3})$		$\frac{1}{6}$ $(=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3})$	4
			$\frac{1}{6}$ $(=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3})$		$\frac{1}{2}$	4
			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ (공식오류)		2
		$\frac{2}{3}$ (공식오류)		$\frac{1}{4}$ (공식오류)		1
			$\frac{1}{4}$		무응답	1
			$\frac{1}{6}$ $(=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3})$		무응답	1
			무응답		무응답	2
인원(명)		19	25	29	15	44

의 법칙을 아는 것만으로는 표본크기 효과에 의한 오개념을 극복하는 것이 충분치 않음을 시사한다. 문항 11에 대한 반응 결과에 따르면 이 연구에 참여한 교사들이 큰 수의 법칙 이면에 있는 확률적 사고까지를 충분히 이해했다고 보기에는 어려운 점이 있다.

Pratt(2005)는 큰 수의 법칙(law of large numbers)이 무작위성에 대한 전문적인 이해와 초등적인 이해를 구별하는 주요 원리이기 때문에 중고등학교 확률 교육과정에서 핵심적인 아이디어로 다루어져야 함을 주장한 바 있다. Batanero, & Sanchez(2005)은 큰 수의 법칙이 예측 불가능해 보이는 개별 결과들 안에도 전체적으로는 일정한 규칙이 존재한다는 것을 설명해 주는 원리로서 통계적 확률을 정의하는데 철학적인 근거가 된다고 설명하였다. 이러한 선행 연구 결과에 따르면 큰 수의 법칙과 같은 교과 내용 지식을 교사들이 분명하게 이해하는 것은 확률 영역을 지도하는데 필수적인 요소라고 볼 수 있다. 문항 11에 대한 교사들의 반응 결과는 확률 교육과 관련하여 교사 교육을 진행함에 있어 큰 수의 법칙 등과 같은 교과 내용 지식에 대한 중점적인 재음미가 필요함을 시사한다.

바. 실생활 문제와 관련된 해결 전략을 지니고 있지 않다.

문항 13와 14에 대하여 많은 교사들이 응답 자체를 하지 못하였다. 문항 14에 비해 실생활 관련성이 다소 낮은 문항 13에 대해서도 교사들의 무응답 비율은 36%로 신보미(2007)의 연구에서 학생들의 무응답 비율 34%보다 높았다. 문항 14에 대한 교사의 무응답 비율은 57%, 학생의 무응답 비율은 31%로 문항 14에 대해서도 교사의 무응답 비율이 현저히 높았다. 이는 실생활 관련성이 강한 문제일수록 교사의 문제 적응 능력이 학생에 비해 떨어짐을 보여준다. 교사들은 실생활 문제 해결을 위한 전략을 고안하려는 시도조차도 하지 못하는 경우가 대부분이었으며, 이러한 경향은 문제의 실생활 관련성이 강할수록 더욱 심화되는 것으로 나타났다.

Batanero et al. (2005: 31-32)은 확률 교육이 실생활 문제 맥락을 토대로 한 확률 모델링 활동을 통해 진행되어야 한다고 주장하였다. 그는 확률 지식이 실제적인 현상에 대한 사회적인 활동과 해석에서 출발하였기 때문에 그 발생의 본질에 비추어 볼 때 확률 지식은 실생활 문제 맥락에서 학습되어야 한다고 지적하였다. Greer, & Mukhopadhyay(2005)에 의하면 확률에 대한 연구는 모두 실생활 문제를 해결하기 위해 그 전략을 연구하는 과정이다. 따라서 확률은 학생들이 경험할 수 있는 실생활 문제 맥락을 통해 다루어져야 한다. 실생활 문제를 해결하는 과정에서 드러나는 확률 모델링은 확률 지식의 또 다른 본질이기 때문에 주요하다 (Batanero, & Sanchez, 2005; Batanero et al., 2005; Pfannkuch, 2005).

확률 모델링 활동을 통해 실생활 문제를 해결하는 것이 확률 교육의 또 다른 본질임을 주장하고 있는 이러한 선행 연구에 따르면, 확률에 대한 교사의 교과 내용 지식에 실생활 문제 해결을 위한 확률 모델링 전략이 필수적으로 포함되어야 한다. 문항 13, 14의 반응 결과는 실생활 확률 문제 상황을 해결하는데 필요한 교사의 교과 내용 지식이 만족스러운 수준에 있지 않음을 보여준다. 교사 교육과정에서 확률에 대한 교과 내용 지식으로서 이러한 측면이 주의 깊게 고려될 필요가 있다.

2. 확률에 관한 학생의 이해에 대한 지식

선행연구에 의하면 학생의 이해와 오개념에 대한 지식은 교수학적 내용 지식에서 주요한

위치를 차지한다. 교수학적 내용 지식은 전문가로서 교사의 활동 영역을 다른 분야와 구별짓는 특징을 지닌다는 관점에서 교사는 학생이 어떤 수학적 개념을 이해하거나 어려워하는지를 알고 그 이유를 적절히 추론할 수 있어야 한다. 이 연구에서는 확률에 관한 학생의 이해에 대해 교사가 지닌 지식의 특징을 알아보기 위해 학생들이 사전 검사에서 각 문항별로 오답을 선택한 이유를 추측해 보는 모둠 토론을 진행하였다[8].

이 모둠 토론 결과[9]에 따르면 전반적으로 교사들은 학생들이 지닐 수 있는 조건사와 연결사 오개념(문항 4, 문항5(1)), 유효성 오개념(문항 6), 대표성 오개념(문항 9), 정적 최근 효과 또는 부적 최근 효과에 대한 오개념(문항10), 표본 크기 효과에 대한 오개념(문항 11)을 비교적 잘 이해하고 있었다. 그러나 등확률 오개념이 드러나는 이유에 대해 다양한 관점에서 설명하지 못하였으며(문항 1, 문항 3, 문항 8), 변이성과 관련된 오개념 역시 충분히 설명하지 못하였다(문항2). 한편 교사들은 학생들이 조건부 확률과 관련하여 시간 축 효과 판단 전략에 따른 오개념을 지닐 수 있음을 전혀 인식하지 못하였다(문항 5(2)). 교사들 중에 일부는 학생들의 오류를 단순 오류로만 파악하려는 경향을 보이기도 하였다(문항 2 "아무 생각이 없어서", 문항 4 "p, q를 착각해서", 문항 7 "문제가 길어서").

이하에서는 이러한 전반적인 모둠 토론 결과를 '학생의 확률 오개념에 대한 이해'와 '학생의 오류 유형에 대한 이해'의 범주로 구분하여 선행 연구 결과에 비추어 보다 상세히 분석한 결과를 기술한다. 이러한 분석 결과는 확률과 관련된 학생의 이해에 대해 교사들이 지닌 지식의 특징으로서 <표 Ⅳ-5>과 같이 요약할 수 있다.

가. 조건사와 연결사에 대한 오개념을 이해한다.

신보미(2007)에 따르면 문항 4, 문항 5의 (1)에 대하여 각각 41%, 26%의 학생이 조건사와

<표 Ⅳ-5> 확률에 관한 학생의 이해에 대해 교사가 지닌 지식의 특징

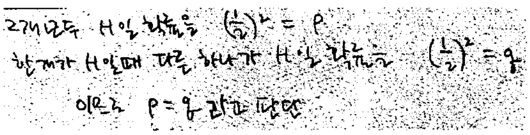
범주	유형	내용	문항	주요 개념
학생의 확률 오개념에 대한 이해	유형1	조건사와 연결사에 대한 오개념을 이해한다.	문항4, 문항5(1)	조건부 확률
	유형2	등확률 오개념을 이해하는 수준에 차이가 있다.	문항1, 문항3 문항8	표본공간과 근원사건
	유형3	변이성과 관련된 오개념을 이해하는 수준에 차이가 있다.	문항2	변이성
	유형4	시간 축 효과에 따른 오개념을 인식하지 못한다.	문항5	조건부 확률
학생의 오류 유형에 대한 이해	유형5	학생의 오개념을 단순 오류로 파악하려 한다.	문항2, 문항4 문항7	

8) 교사의 현직 경험은 이러한 모둠 토론 과정에 영향을 미쳤을 수 있다. 교사가 재직하고 있는 학교 급에 따라 학생의 이해에 대한 교사의 지식이 달라질 가능성도 있으며 이와 관련된 자세한 분석은 후속 연구로 남긴다.

9) 모둠별 토론 결과의 세부 내용은 <부록 2>을 참조하기 바란다.

연결사 관련 오개념을 나타내었다. 학생들은 조건사를 연결사로 해석하여 문항 4에서 '한 개가 H일 때, 다른 한 개가 H일 확률'을 '한 개가 H이고 다른 한 개가 H일 확률'로, 문항 5의 (1)에서 '첫 번째 공이 빨간 공일 때, 두 번째 공이 빨간 공일 확률'을 '첫 번째 공이 빨간 공이고 두 번째 공이 빨간 공일 확률'로 해석하는 오개념을 보여 주었다.

이 연구에 참여한 교사들은 문항 4, 문항 5의 (1)과 관련하여 학생이 갖는 이러한 오개념을 비교적 적절히 이해하였다. 모둠 토론을 진행한 11개 모둠 가운데 문항 4에 대해서는 8개 모둠이, 문항 5의 (1)에 대해서는 6개 모둠이 조건사와 연결사에 대해 학생들이 오개념을 지니고 있을 것이라고 지적하였다. 교사들은 학생들이 작성한 답의 잘못된 풀이 과정도 추측할 수 있었다.



[그림 Ⅳ-1] 문항 4의 학생 응답에 대한 교사의 분석 결과

나. 등확률 오개념을 이해하는 수준에 차이가 있다.

신보미(2007)에 따르면 문항 1, 문항 3, 문항 8과 관련하여 학생들은 등확률 오개념을 드러내었다. 문항 1에 대하여 학생들은 주사위 2개를 던졌을 때 '5와 6의 눈이 나올 사건'과 '5와 5의 눈이 나올 사건'을 각각 표본공간의 동일한 근원사건으로 파악하여 이들이 일어날 확률은 동등하다는 등확률 오개념을 나타내었다. 문항 3에 대해서는 Kain아니면 Abel 둘 중에 누군가는 이 경기에서 이길 것이므로 주어진 문제의 표본공간이 {Kain, Abel}이 되기 때문에 그 근원사건인 'Kain이 이기는 사건'과 'Abel이 이기는 사건'이 일어날 가능성은 동등하다는 등확률 오개념을 드러내었다. 문항 8에 대해서는 압정이 지닌 물리적인 비대칭성을 간과하고 침이 있는 부분과 등이 있는 부분이 나올 확률이 같다고 답하였다.

이 연구에서 교사들은 문항 8에 대해서는 학생들이 ③번을 답으로 택한 이유를 등확률 오개념과 관련하여 설명할 수 있었다. 교사들은 학생들이 압정을 동전과 같은 대상으로 생각하여 침이 있는 부분과 등이 있는 부분이 나올 확률을 같다고 답했을 것이라고 추측하였다. 그러나 문항 1과 문항 3에서 학생의 반응 결과를 해석하는 데는 등확률 오개념을 고려하지 못하였다. 교사들은 문항 1에서 학생들이 ③번을 택한 이유가 '5와 6의 눈이 나올 확률'을 '첫 번째에 5의 눈, 두 번째에 6의 눈이 나올 확률'로 해석했기 때문이라고 추측하였다. 문항 3에서 학생들이 ①번을 택한 이유는 HHHH와 TTHH가 나올 확률이 각각 $(\frac{1}{2})^4$이기 때문이라고 설명하였다.

교사들은 압정과 같이 물리적으로 비대칭인 대상이 문제의 직접적인 소재로 다루어지는 상황에서는 학생들에게 등확률 오개념이 드러날 수 있음을 어렵지 않게 추측하였다. 그러나 표본공간의 근원사건을 구성하는 상황 등과 같이 문제의 확률적 구조를 파악하는 과정에서 학생들이 등확률 오개념을 가질 수 있다는 점은 충분히 인식하지 못하였다. 표본공간과 근원사건 구성의 맥락에서 드러날 수 있는 등확률 오개념에 대한 교사들의 이해에 한계가 있다고 볼 수 있다.

다. 변이성과 관련된 오개념을 이해하는 수준에 차이가 있다.

문항 2에 대하여 신보미(2007)의 연구에 참여한 학생들 중 34%는 ③번을 답으로 택하였

으며 그 이유를 '수학적으로 더 가깝기 때문'이라고 설명하였다. 신보미(2007)의 연구에서는 ③번에 비해 ⑤번을 답으로 선택한 학생이 상대적으로 적었지만, Zawojewski, & Shaughnessy (2000)의 연구는 다수의 학생들이 ⑤번을 답으로 택하였다고 지적하였다. Zawojewski, & Shaughnessy는 문항 2에서 ⑤번을 답으로 택하는 학생들이 지닌 오개념을 결과적 접근 판단 전략(outcome approach)이라고 명명하였다. 결과적 접근 판단 전략에 의한 오개념을 지닌 학생은 어떤 사건의 확률을 생각할 때 한 번의 시행 결과를 근거로 시행에서는 어떤 것이든지 일어날 수 있다고 생각한다. 문항 2에서 ③번을 택한 학생은 빈도적 자료의 중심 집중 경향에, ⑤번을 택한 학생은 자료의 변이성에 주로 주목하는 것으로 볼 수 있다. 문항 2에서 ③번 또는 ⑤번에 대한 반응 여부는 주요한 오개념을 판단하는 근거가 된다.

교사 대부분[10)]은 학생들이 ③번을 택한 이유에 대해 '수학적으로만 생각해서', '빨간 사탕이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$ 이기 때문' 등과 같이 자료의 중심 집중 경향만을 고려하는 학생들의 오개념에 비추어 적절하게 설명하였다. 그러나 학생들이 ⑤번을 택한 이유에 대해서는 2개의 모둠이 '1, 3, 5, 7, 9의 평균이 5이기 때문', 2개의 모둠이 '무작위 추출이므로 다양한 범위(전부 다른 값)가 나올 것이라고 예상해서'라고 설명하였을 뿐 5개의 모둠은 그 이유에 대해서 전혀 설명하지 못하였다. 그 외 2개 모둠은 학생들이 ⑤번을 택한 이유를 '아무 생각 없이 고른 것'이라고 설명하였다.

교사들은 학생들이 ③번을 답으로 택한 이유에 대해서는 충분히 공감하였지만 ⑤번을 답으로 택한 이유에 대해서는 의미있는 설명을 거의 하지 못하였다. 교사들은 ⑤번과 같이 자료의 변이성을 과도하게 추론함으로써 발생하는 오개념보다 ③번과 같이 자료의 중심 집중 경향에만 주목하여 변이성을 간과함으로써 발생하는 오개념을 인식하는데 보다 예민하였다. 이는 빈도적 자료의 변이성보다 중심 집중 경향을 보다 주요하게 고려하는 교사 자신의 인지적 태도와 깊은 관련이 있다고 볼 수 있다[11)]. 교사의 교과 내용 지식과 교사가 지닌 학생의 이해에 대한 지식은 밀접하게 관련되어 있다는 설명이 가능하다.

라. 시간 축 효과에 따른 오개념을 인식하지 못한다.

활동지의 다른 문항들과 달리 문항 5는 하위문제 (1), (2)로 구성되어 있다. 여기에는 교사들이 문항 5의 (1)에 대한 정답율과 (2)에 대한 정답율에 주목하여 이 둘을 비교함으로써 학생의 오개념과 관련된 의미있는 논의가 진행될 수 있게 하려는 의도가 포함되어 있다. 형태상 비슷한 유형의 문제로 볼 수 있는 문항 5의 (1)과 (2)에 대하여 신보미(2007)의 연구에 참여한 학생들의 정답율은 실제 상당한 차이를 보였다. 39%의 학생이 (1)에 대해서는 정답을 구한데 반해 (2)에 대해서는 22%만이 정답을 구하였다. 이는 (1)과 (2)사이에 학생들에게 결정적으로 다르게 인식되는 확률 구조가 존재함을 암시한다. 교사들이 이 점에 주목하여 (2)가 시간의 순서를 거스르는 형태로 구성되었음을 인식함으로써 (2)에 대한 학생의 정답율이 낮은 이유를 밝힐 수 있는지가 문항 5와 관련된 주요 관심사이다.

---

10) 11개 모둠 중 10개의 모둠이 관련된 학생의 오개념에 대하여 수학적 확률을 예로 들어 적절하게 설명하였다.
11) <표 IV-2>에서 유형 2를 참고하기 바란다.

그러나 실제로 교사들은 문항 5의 (1)과 (2)에 대한 학생의 반응 결과로부터 학생들에게 시간 축 효과(time-axis fallacy)에 따른 판단 전략이 존재할 수 있음을 전혀 설명하지 못하였다. 교사들은 문항 5의 (1)과 (2) 낱낱에 대해서 학생의 반응 결과를 해석하려고 시도하였을 뿐 (1)에서의 정답율과 (2)에서의 정답율의 차이에는 주목하지 않았다. 또한 (1)에서 학생들이 $\frac{1}{6}$ 을 답으로 구한 이유에 대해 조건사와 연결사 오개념을 지니고 있기 때문이라고 설명하였으면서도 (2)에서 학생들이 $\frac{1}{6}$ 을 답으로 택한 이유에 대해서는 거의 설명하지 못하였다. 이상에 따르면 교사들은 학생들이 조건사와 연결사에 대한 오개념을 지닐 수 있음에 대해서는 이해하는 반면 시간 축 효과에 따른 오개념의 존재 여부에 대해서는 충분히 인식하지 못하고 있다고 볼 수 있다. 시간 축 효과 오개념과 관련된 교사의 불충분한 이해는 이후 조건부 확률 지도 맥락에서 학생의 오개념을 인식하고 이를 교정하는데 한계로 작용할 수 있다[12].

마. 학생의 오개념을 단순 오류로 파악하려는 경향이 있다.

김수미(2003: 216)에 의하면 학생들이 범하는 오류는 체계적인 오류와 단순 오류 두 가지로 구분할 수 있다. 체계적인 오류는 개념적 지식이나 절차적 지식과 관련하여 발생하는 연속적인 것에 반해, 단순 오류는 학생들의 부주의나 주의 산만과 같은 정의적인 문제로 야기되는 일회적인 것이다. Hadar, & Zaslavsky(1987)은 이스라엘 고등학생들을 대상으로 오류 유형을 검토한 결과 수학 학습 과정에서 발생하는 학생들의 오류는 주로 개념이나 절차에 대한 잘못된 이해로부터 비롯된다고 설명하였다. 즉, 학생들이 범하는 오류는 대부분 단순 오류보다는 체계적인 오류에 속한다고 볼 수 있다. 특히 확률 영역에는 수학의 다른 분야에서 일반적으로 적용되었던 논리적인 직관과는 다른 결과가 많기 때문에(Jones, 2005; Borovcnik, & Peard, 1996), 학생들의 오류는 확률 개념에 대한 체계적인 오류가 대부분이 될 것으로 예상할 수 있다. 교사들은 확률 영역의 이러한 특수성을 감안하여 학생들의 오류를 대할 때 보다 민감하게 반응할 필요가 있다.

그러나 이 연구에서 일부 교사들은 학생의 오개념을 단순 오류로 파악하려는 경향을 보였다. 문항 2에서 학생이 ⑤번에 답한 이유에 대해 2개 모둠이 '아무 생각 없이 그냥 고른 거다'라고 설명하였으며, 문항 4에서 학생이 ③번을 답으로 택한 이유에 대해서는 1개 모둠이 'p, q를 착각해서'라고 하였다. 문항 7에 대해서 ②번을 답으로 택한 이유에 대해서도 1개의 모둠이 '문제가 길어서 제대로 상황을 파악하지 못했기 때문'이라고 설명하였다[13].

김수미(2003: 214)에 의하면 뺄셈 계산 과정에서 다음과 같이 학생이 범한 하나의 오류에 대해서 어떤 교사는 이를 학생의 부주의에서 온 단순 오류로 파악할 수도 있고 또 다른 교사는 '뺄셈은 항상 큰 수에서 작은 수를 빼는 것'이라는 생각으로 7에서 2를 뺀 것으로 생각하여 학생이 체계적인 오류를 지니고 있다고

---

12) Batanero, & Sanchez(2005)에 의하면 시간 축 효과에 따른 판단 전략은 조건부 확률과 관련된 가장 결정적인 오개념이다.

13) 학생들은 주사위 1개를 충분히 많이 던지면 5의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$에 가까워진다는 큰 수의 법칙을 근거로 주사위 1개를 세 번 던졌을 때도 5의 눈이 연속해서 나오는 일은 거의 일어나지 않는다고 생각한다. 학생들은 주사위 1개를 세 번 던질 때보다 주사위 3개를 한 번 던질 때 5의 눈이 연속해서 세 번 나오는 일이 더 잘 일어난다고 생각한다.

진단할 수도 있다. 실제 학생이 전자의 이유로 실수를 범했든 후자의 이유로 체계적인 오류를 범했든 간에 학생의 오류에 대한 후자와 같은 태도는 이후 뺄셈 지도에 있어 교수학적 시사점을 줄 것이라는 입장에서 전자의 태도보다 긍정적이라고 볼 수 있다.

$$\begin{array}{r} 142 \\ -\ \ 37 \\ \hline 115 \end{array}$$

(김수미, 2003: 214)

오류 유형에 대한 풍부한 지식은 교사로 하여금 오류의 원인에 따른 정확한 처치가 가능하게 할 것이므로 학생의 오개념에 대해 그 실체를 파악하는 것은 교사에게 매우 주요한 능력이라고 볼 수 있다. 이러한 측면에서 학생이 드러낸 오류를 단순 오류만으로 파악하는 경향은 그 오류가 실제 학생의 부주의나 주의 산만에서 기인한 단순 오류인 경우라고 하더라도 이를 체계적 오류로 인식함으로써 이를 예방하고 교정하려는 교수학적 노력을 배제한다는 측면에서 학생의 이해에 대한 바람직한 지식이라고 보기 어렵다.

3. 시사점

'확률에 대한 교사의 교과 내용 지식'과 '확률과 관련된 학생들의 이해에 대해 교사가 지닌 지식'과 관련된 이상의 논의에 따르면 확률에 대한 교사 교육과정을 설계함에 있어 몇 가지 시사점을 얻을 수 있다.

우선 다수의 교사들이 등확률 오개념을 지니고 있음을 감안하여, 표본공간 구성과 관련된 교과 내용 지식이 교사 교육과정에서 충분히 다루어질 필요가 있다. 또한 교사 교육과정을 통해 학생들이 등확률 오개념을 지니는 이유 역시 다양한 관점에서 논의될 필요가 있다. 학생들이 등확률 오개념을 지니는 이유를 밝힌 선행 연구에 따르면, 교사들은 등확률 오개념이 압정이나 윷짝과 같이 물리적으로 비대칭인 대상을 소재로 할 때 뿐만 아니라 주사위 2개를 던지는 사건과 같이 복합사건의 표본공간을 구성하는 상황에서도 드러날 수 있음을 인식할 필요가 있다.

일반적으로 학생들은 조건부 확률과 관련하여 조건사와 연결사에 대한 오개념, 시간 축 효과에 따른 오개념을 지닌다(이정연, 2005). 이 연구에 참여한 교사 대부분은 조건사와 연결사 오개념을 지니고 있는 반면 시간 축 효과에 대한 오개념 정도는 상대적으로 약한 것으로 드러났다. 이는 교사들이 조건사 '…일 때'보다는 시간의 순서를 거스르는 문제 상황을 조건부 확률 개념 적용의 실마리로 인식한 결과라고 볼 수 있다. 이는 Fischbein, & Schnarch(1997)의 연구와 신보미(2007)의 연구에서 연구 대상 대부분이 조건사와 연결사에 따른 오개념 보다는 시간 축 효과에 따른 오개념을 주로 보여주었던 점과 차이를 보이는 대목이다.

조건부 확률과 관련하여 교사들이 지닌 이러한 오개념 특징은 조건부 확률에 대한 학생들의 오개념을 교사들이 이해하는데도 영향을 미치는 것으로 드러났다. 교사들은 학생들의 조건사와 연결사 오개념에 대해서는 설명할 수 있었지만 시간 축 효과 오개념에 대해서는 전혀 예측하지 못하였다. 이는 교과 내용 지식으로서 조건부 확률에 대한 교사의 이해 수준과 더불어 조건부 확률에 대한 학생의 이해를 교사가 인식하는 정도에 있어서도 상당한 한계가 있음을 보여준다. 확률에 대한 교사 교육과정의 설계에 있어 조건부 확률은 교과 내용 지식의 측면에서 뿐만 아니라 학생들의 오개념 유

형과 그에 따른 적절한 교정 방안 연구 등의 측면에서도 심도 있게 다루어질 필요가 있다.

교사들은 대부분 빈도적 자료의 변이성을 다룰 때 자료의 중심 집중 경향을 보다 주요하게 고려하였다. 또한 교사들은 자료의 중심 집중 경향만을 고려함으로써 발생하는 학생의 오개념에 대해서는 그 이유를 충분히 설명할 수 있었지만 변이성만을 과도하게 추론함으로써 발생하는 결과적 접근 판단 전략에 따른 오개념에 대해서는 거의 인식하지 못하였다. 한편, 교사들은 빈도적 자료의 중심 집중 경향과 변이성의 관계를 설명하는 원리인 큰 수의 법칙을 충분히 이해하지 못하였으며, 표본 크기 효과 판단 전략에 따른 오개념도 지니고 있는 것으로 나타났다. 이상에 따르면 빈도적 자료의 변이성을 고려하고 이를 적절히 다루는 전략에 대한 교사의 지식이 제한되어 있음을 알 수 있다.

Shaughnessy, Canada, & Ciancetta(2003)는 자료의 변이성에 대한 이해가 빈도적 자료를 실제 다루어 보는 경험을 통해 성장할 수 있다고 지적하였으며, Pratt(2005)는 빈도적 자료를 다루는 과정에서 큰 수의 법칙이 주요한 역할을 한다고 설명하였다. Biehler(1991)에 따르면 큰 수의 법칙은 실험 활동을 통해 얻어진 자료를 해석해 보는 과정에서 그 의미가 적절히 이해될 수 있다. 이상은 교사 교육과정을 통해 확률에 대한 교과 내용 지식을 다룰 때 이론적인 맥락에서 뿐만 아니라 통계적 관점에서 실제 빈도적 자료를 다루어보는 경험이 제공되어야 함을 시사한다. 이 때, 큰 수의 법칙 이면에 존재하는 확률적 사고와 그 의미에 대해서 교사들 간의 충분한 논의가 필수적으로 요구된다.

여러 선행 연구는 확률 지식의 또 다른 본질로서 실생활 문제 상황의 확률 모델링을 들고 있다. 그러나 이 연구에 참여한 교사들은 실생활 확률 문제 상황을 해결하는데 필요한 전략을 거의 고안하지 못하였다. 중고등학교 확률 교육과정을 비롯하여 교사 교육과정 전반에 걸쳐 실생활 확률 문제 상황을 해결하는 다양한 전략에 대한 소개가 절실하다고 볼 수 있다. 이론적 관점에서 확률을 수학적으로 다루는 것과 더불어 빈도적 측면에서 실제 시행의 맥락을 전제로 하는 통계적 확률의 아이디어를 보다 중점적으로 다루는 방안 등을 고려해 볼 수 있다.

Ⅴ. 결 론

이 연구에서는 중고등학교에 근무하고 있는 경력 3년에서 5년 사이의 교사 44명을 대상으로 확률에 대한 교사의 교수학적 내용 지식을 분석하였다. 이러한 분석은 '확률에 대한 교과 내용 지식'과 '확률과 관련된 학생들의 이해에 대한 지식'의 측면에서 진행되었다. 확률에 대한 교과 내용 지식을 분석하기 위하여 지필 검사를 실시하였으며, 확률과 관련된 학생들의 이해에 대한 지식을 살펴보기 위하여 교사들 간의 모둠 토론을 통해 학생들의 반응 결과에 대한 이유를 추측해 보도록 하였다.

지필 검사 결과를 분석함으로써 교사들이 지닌 확률에 대한 교과 내용 지식에서 두드러진 6가지 특징을 추출하였다. 교사들 중에 다수가 표본공간과 근원사건의 구성에 있어 학생들과 비슷한 정도의 어려움을 지니고 있으며 표본 크기 효과에 따른 오개념을 지니고 있었다. 교사들은 시간의 순서를 거스르는 상황에서 조건부 확률 개념을 적용함으로써 문제를 바르게 해결하였지만 조건사와 연결사에 대한 오개념을 지니고 있었다. 선행연구에 비해 이 연구에 참여한 교사들에게서 시간 축 효과에 의한 오개념은 덜 나타내는데 반해 조건사와 연결사에

대한 오개념은 상대적으로 높게 나타났다. 교사들은 빈도적 자료를 다룰 때 자료의 변이성보다는 중심 집중 경향을 보다 주요하게 고려하였으며, 실생활 맥락을 포함하는 문제에 대해서는 그 해결 전략을 거의 세우지 못하였다.

교사들 간의 모둠 토론 결과를 분석함으로써 확률과 관련된 학생들의 이해에 대해 교사들이 지닌 지식의 특징을 5가지로 기술하였다. 교사들은 조건부 확률과 관련하여 학생들이 조건사와 연결사에 대한 오개념을 지닐 수 있음을 추측할 수 있었으나 시간 축 효과와 관련된 오개념이 존재한다는 점은 전혀 의식하지 못하였다. 교사들은 압정과 같이 물리적으로 비대칭인 대상을 다루는 사건의 표본공간을 구성할 때 학생들에게 등확률 오개념과 같은 오류가 드러날 수 있음을 인식할 수 있었다. 교사들은 학생들이 빈도적 자료의 중심 집중 경향만을 고려함으로써 발생하는 오개념에 대해서는 공감하는 반면 자료의 변이성만을 염두에 두어 발생하는 오개념에 대해서는 거의 이해하지 못하였다. 교사들 중에 일부는 학생의 오개념을 단순 오류로 파악하여 소홀히 취급하려는 경향을 보이기도 하였다.

위와 같이 확률에 대한 교사의 교수학적 내용 지식의 특징을 '확률 교과 내용 지식'과 '확률과 관련된 학생의 이해에 대한 지식'의 관점에서 기술한 이 연구의 결과로부터 이후 확률과 관련된 교사 교육과정을 설계함에 있어 다음과 같은 몇 가지 시사점을 얻을 수 있었다. 첫째, 교사 교육과정에 표본공간 구성과 관련된 교과 내용 지식이 보다 상세히 다루어질 필요가 있으며 이 때, 표본공간을 구성하는 과정에서 학생들이 보일 수 있는 오개념 유형이 다양하게 소개될 필요가 있다. 둘째, 교사 교육과정에서 조건부 확률이 교과 내용 지식의 측면에서 뿐만 아니라 학생의 오개념 특징에 대한 이해의 확장이라는 측면에서도 보다 중점적으로 다루어져야 한다. 셋째, 학생을 위한 학교 교육과정에서 뿐만 아니라 교사 교육과정에서도 빈도적 자료를 통계적 관점에서 살펴보는 경험이 제공될 필요가 있으며, 실생활 확률 문제 상황을 해결하는 다양한 전략에 대한 소개가 절실하다.

참고문헌

김수미(2003). 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구. **학교수학, 5**(2), 209-221.

남윤석 · 전평국(2006). 교육실습 과정에서 배우는 초등예비교사의 수학 교수학적 내용 지식에 관한 사례연구. **수학교육, 45**(1), 75-96.

서관석 · 전경순(2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점. **수학교육학연구, 10**(1), 103-113.

신보미(2007). **시뮬레이션을 활용한 확률 지식의 교수학적 변환 방식**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

안선영 · 방정숙(2006). 평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용 지식과 수업 실제 분석. **수학교육학연구, 16**(1), 25-41.

이경은(2007). **수업 실제에서 나타나는 교사의 Pedegogical Content Knowledge에 관한 사례연구-중학교 도형의 성질을 중심으로-**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

이정연(2005). **조건부확률 개념의 이해에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

조성민(2006). **교육과정 실행의 관점에서 본 수학교사 지식과 수업의 관련성 연구-고등학교 함수 내용을 중심으로-**. 이화여자대학

교 대학원 박사학위논문.

Akkoç H., Yesildere, S., & özmantar, F. (2007). Prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of definite integral: the problem of limit process. *Proceddings of the Roceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 7-12. Great Britain; British Society for Research into Learning Mathematics.

Ball, D., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers; mathematical knowledge. In V. Richhardson (Eds.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Eductional Research Association.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). USA: Springer.

Batanero, C., & Sanchez, E. (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability. In G. A. Jones (Eds.), Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning (pp. 241-266). USA: Springer.

Begg, A., & Edwards, R. (1999, December). *Teachers' ideas about teaching satistics.* Paper presented at the combined annual meeting of the Australian Association for Research in Education the New Zealand Association for Research in Education. Melbourne, Australia.

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters : Probability in education* (pp. 169-211). Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Borovcnik, M., & Peard, R. (1996). Probability. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook in mathematics education* (Part 1, pp. 239-288). Dordrecht : Kluwer.

Carnell, L. J. (1997). *Characteristics of reasoning about conditional probability (preservice teachers).* Doctoral dissertation, University of North Carolina-Greensboro.

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case functions, *Educational Studies in Mathematics, 21*(6), 521-544.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). NY: Macmillan.

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28, 96-105.

Greer, B., & Mukhopadhyay. (2005). Teaching and learning the mathematization of uncertainty : Historical, cultural, social and political contexts. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp.

297-324). USA: Springer.

Hadar, N. M., & Zaslavsky, O. (1987). An empirical classical model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 3-14.

Jones, G. A. (2005). Introduction. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 1-12). USA: Springer.

Ma, L. (2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. (신현용, 승영조 공역). 서울: 승산(원저 1999년).

Mapolelo, D. C. (1999). Do pre-service primary teachers who excel in mathematics become good mathematics teachers?. *Teaching and Teacher Educations, 15*, pp.715-725.

Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 267-294). USA: Springer.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 171-189). USA: Springer.

Saenz, C. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 233-254.

Shaughnessy, J. M., Canada, D., & Ciancetta, M. (2003). Middle school students' thinking about variability in repeated trials: A cross-task comparison. In A. D. Pateman, N. A., Dougherty, B. J., & Zilliox, J.(Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 159-165.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

Stein, M. K., Baxter, J. A., & Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: A case from function and graphing. *American Educational Research Journal, 27*(4), 639-663.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school : Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). USA: Springer.

Waston, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(4), 305-337.

Zawojewski, J. S., & Shaughnessy, J. M. (2000). Data and chance. In E. A. Silver, & P. A. Kenney (Eds.), *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress* (pp. 235-268). Reston, VA :NCTM.

An Analysis of Teachers' Pedagogical Content Knowledge on Probability

Shin, Bo Mi (Gwangju Educational Research Information Service)

The purpose of this study was to analyze teachers' pedagogical content knowledge on probability. Teachers' pedagogical content knowledge on probability was analyzed in detail into 2 categories: (a) subject matter knowledge, (b) knowledge of students' understanding and misunderstanding. The results showed, in terms of the subject matter knowledge, that the teachers have some probability misconception. And, it showed, in the point of the knowledge of students' understanding, they could not explain why students have difficulties to solve some tasks with regard to probability. This study raised several implications for teachers' professional development for effective mathematics instruction.

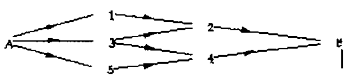
* key word : pedagogical content knowledge(교수학적 내용 지식), probability misconception (확률 오개념)

논문접수 : 2008. 7. 31
논문수정 : 2008. 8. 22
심사완료 : 2008. 8. 30

<부록 1> 학생과 교사의 지필 검사 결과 비교

설문 문항	답지	관련 오개념	신보미(2007)에서 학생 응답자수 (129명)	교사 응답자수 (44명)
1. 6개의 눈이 나올 가능성이 같은 주사위 2개를 던졌을 때 다음 중 더 잘 일어날 것 같은 경우는?	**① 5와 6의 눈(정답)**		44	12
	② 5와 5의 눈		5	
	③ ①과 ②가 일어날 가능성은 같다.	등확률 오개념	80	32
2. 빨간 사탕이 50개, 파란 사탕이 30개, 노란 사탕이 20개 들어 있는 상자에서 한 번에 10개씩의 사탕을 꺼내, 빨간 사탕의 개수를 확인한 다음 다시 집어넣어 잘 섞은 다음 다시 10개씩의 사탕을 꺼내 빨간 사탕의 개수를 세는 실험을 실제로 5번 반복하였을 때, 각 실험에서 실제 얻어질 것 같은 빨간 사탕의 개수로 가장 적절한 것은?	① 8, 9, 7, 10, 9		13	4
	② 3, 7, 5, 8, 5(정답)		47	16
	③ 5, 5, 5, 5, 5	중심 집중 경향에 대한 오개념	44	22
	④ 2, 4, 3, 4, 3		17	
	⑤ 1, 3, 5, 7, 9	결과적 접근 오개념	8	2
3. 앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같은 동전 1개를 HHHH 또는 TTHH와 같은 순서로 앞면과 뒷면이 나올 때까지 던진다. HHHH가 나오면 Kain이 이기고 TTHH가 나오면 Abel이 이긴다. 이는 공평한 경기인가?	① 공평하다.	등확률 오개념	74	32
	② 공평하지 않다.(정답)		54	12
4. 앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같은 동전 2개를 던져서 2개 모두 H일 확률을 p, 한 개가 H일 때 다른 하나가 H일 확률을 q라고 할 때, p는 q보다	① 크다.		13	1
	② 작다.(정답)		66	17
	③ 같다.	조건사와 연결사 오개념	53	26
6. 10명 중에서 8명의 대표를 고르는 경우수가 10명 중에서 2명의 대표를 고르는 경우의 수보다 더	① 많다.		20	1
	② 적다.	유효성 오개념	34	6
	③ 같다.(정답)		75	37
7. 6개의 눈이 나올 가능성이 같은 주사위 1개를 3번 던져 5의 눈이 3번 나올 확률을 p, 6개의 눈이 나올 가능성이 같은 주사위 3개를 1번 던져 5의 눈이 3번 나올 확률을 q라 하면 p가 q보다	① 크다.		19	2
	② 작다.	독립성 오개념	25	3
	③ 같다.(정답)		85	39
8. 압정 3개를 한꺼번에 던졌을 때, 침이 있는 부분이 3개 나올 확률은 등 부분이 3개 나올 확률보다	**① 크다.(정답)**		42	24
	② 작다.		32	7
	③ 같다.	등확률 오개념	55	13
9. 앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같은 동전 1개를 5번 던졌을 때 다음 중 가장 일어날 것 같은 경우는?	① HHHTT		4	1
	② HTTHT	대표성 오개념	23	6
	③ THTTT		3	1
	④ HTHTH		7	1
	⑤ 어떤 것이든 같다.(정답)		92	34
10. 앞면과 뒷면이 나올 가능성이 같은 동전 1개를 5번 던졌더니 TTTTT라는 결과를 얻었다. 이 동전을 6번째 던졌을 때 나올 가능성이 가장 높은 결과는?	① T	정적최근효과 오개념	21	9
	② H	부적최근효과 오개념	13	1
	③ T든 H든 같다.(정답)		95	34
11. 작은 병원에는 하루 평균 10명의 아이가 태어나고, 큰 병원에는 하루에 평균 100명의 아이가 태어난다. 작은 병원에서 10명중 8명이상이 남자 아이일 확률과 큰 병원에서 100명중 80명 이상이 남자아이일 확률이 있을 때, 둘 중 어느 쪽이 더 큰가?	**① 작은 병원(정답)**		19	10
	② 큰 병원		27	7
	③ 같다.	표본크기효과 오개념	83	27
12. 100번 던졌을 때 앞면이 65번 나온 동전은 정상적인 동전이라고 볼 수 있는가?	**① 정상(정답)**		9	25
	② 비정상	중심 집중 경향에 대한 오개념	15	4
	③ 알 수 없다.		69	15

12) * 등확률(equiprobability) 오개념 : 표본공간과 근원사건을 잘못 구성하여 그 발생가능성이 같다고 생각하는 오개념
* 중심 집중 경향에 대한 오개념 : 빈도적 자료의 변이성을 고려하지 않고 수학적인 확률이나 평균만을 생각하는 오개념
* 결과적 접근(outcome approach) 오개념 : 한 번 시행한 결과를 근거로 시행에서는 어떤 것이든지 일어날 수 있다고 생각하는 오개념
* 조건사와 연결사 오개념 : 조건사인 '일 때'와 연결사인 '이고'를 구별하지 못하는 오개념
* 유효성(availability) 오개념 : 쉽게 찾을 수 있는 경우의 빈도나 확률이 더 높을 것으로 생각하는 오개념
* 대표성(representativeness) 오개념 : 표본은 항상 모집단의 양상을 반영하여 무작위로 표현되어야 한다고 생각하는 오개념
* 정적최근효과(positive recency effect) 오개념 : 앞뒤가 나올 가능성이 같은 동전에 대해서도 앞면이 계속 나왔으면 다음에도 앞면이 나올 가능성이 크다고 생각하는 오개념
* 부적최근효과(negative recency effects) 오개념 : 앞뒤가 나올 가능성이 같은 동전에 대해서도 앞면이 계속 나왔으면 다음에는 뒷면이 나올 가능성이 크다고 생각하는 오개념
* 표본크기효과(effect of sample size) 오개념 : 확률을 추정할 때 표본크기가 미치는 영향을 소홀히 하는 오개념
* 시간 축 효과(time-axis fallacy) 오개념 : 조건부 확률을 다룰 때, 시간의 순서 때문에 나중에 일어나는 사건을 조건사건으로 보지 못하는 오개념

설문	확률	관련 오개념	신보미(2007)에서 학생 응답자수 (129명)	교사 응답자수 (44명)
5. 흰 공이 2개, 빨간 공이 2개들어 있는 주머니에서 공 2개를 **비복원 추출**할 때, (1) 첫 번째 공이 빨간 공일 때, 두 번째 공이 빨간 공일 확률을 구하여라.	$\frac{1}{6}$	조건사와 연결사 오개념	34	19
	$\frac{1}{3}$ (정답)		50	17
	$\frac{1}{12}$		4	
	$\frac{1}{4}$		14	1
	$\frac{2}{3}$		3	2
			12	3
	무응답		12	2
5. (2) 두 번째 공이 빨간 공일 때, 첫 번째 공이 빨간 공일 일 확률을 구하여라.	$\frac{1}{6}$	시간 축 효과 오개념	18	4
	$\frac{1}{3}$ (정답)		29	26
	$\frac{1}{12}$		10	
	$\frac{1}{4}$		18	1
	$\frac{1}{2}$		34	8
	$\frac{5}{12}$		1	
	무응답		19	5
13. 다음 그림은 오래된 펌프 5개가 있는 어떤 도시의 수도 체계이다. 각 펌프가 제대로 작동하지 않을 확률은 0.5이고, A에서 B로 물이 흐르려면 적어도 한 개의 수로에서는 펌프 2개가 모두 작동하여야 한다고 한다. 이를 테면, A에서 B로 물이 흐르는 경우는 펌프 1과 2가 동시에 작동하거나 펌프 3과 2가 동시에 작동할 때 등등이 있다. 하지만 펌프 2와 4가 모두 작동하지 않는다면 A에서 B로 물이 흐를 수 없다. A에서 B로 물이 흐를 확률을 추정하여라. 필요하다면 표 1[1)]을 활용하여라. 	$\frac{19}{32}$ (정답)		5	1
	$\frac{1}{9}$		3	
	$\frac{1}{4}$		5	3
	$\frac{3}{4}$		19	2
	$\frac{1}{2}$		17	6
	$\frac{15}{25}$		18	
	$\frac{1}{2^5}$		3	
	$\frac{1}{8}$		7	1
	$\frac{1}{7}$		3	
	$\frac{2}{3}$			3
	기타		4	12
	무응답		45	16
14. 어떤 과자 회사에서는 과자 1봉지마다 6종류의 쿠폰 중 1장씩을 넣어 두었다. 6종류의 쿠폰을 모두 모으면 경품으로 교환이 가능하다고 할 때, 6종류의 쿠폰을 모두 모으기 위해서 사야하는 과자 봉지는 어느 정도인가? 필요하다면 표 2[2)]을 활용하여라.	11		15	1
	720		3	2
	6			1
	6^6		10	3
	6^5		5	
	15(정답)		22	1
	36		15	4
	무한히		2	
	13		7	
	기타		8	7
	무응답		41	25

1) 표 1 : 동전 1개를 2000번 던진 결과표, 2) 표 2 : 주사위 1개를 2000번 던진 결과표

<부록 2> 학생 응답에 대한 교사 모둠 토론 결과

문항 요소			모둠 토론 결과	
번호	답지	오개념	교사들이 추측한 이유	모둠(개)
1	③	등확률 오개념	첫 번째에 5가 나오고 두 번째에 6이 나온다고 생각해서	8
			(5, 6), (6, 5)를 고려하지 않아서	3
2	③	중심 집중 경향만 고려	수학적 확률만을 고려해서	10
			무응답	1
	⑤	결과적 접근 오개념	평균이 5이므로	2
			다양한 범위가 나올 거라고 생각해서	2
			아무 생각이 없어서	2
			무응답	5
3	①	등확률 오개념	구하는 확률이 각각 $\frac{1}{16}$ 이라고 생각해서	8
			동전 앞, 뒤가 나올 확률이 각각 $\frac{1}{2}$ 이므로	2
			무응답	1
4	③	조건사와 연결사 오개념	일 때와 이고를 구별하지 못해서	9
			종속개념에 대한 이해가 없어서	1
			p, q를 착각해서	1
6	②	유효성 오개념	2명을 고르기가 더 쉽다고 생각해서	10
			무응답	1
7	②	독립성	시간차가 있어서 3번 던지면 5가 계속 나오기 어렵다고 생각해서	4
			곱의 법칙과 합의 법칙을 혼동해서	2
			문제가 길어서	1
			무응답	4
8	③	등확률 오개념	압정을 동전과 같다고 생각해서	9
			무응답	2
9	②	대표성 오개념	무작위로 나와야 하니까	8
			무응답	3
10	①	독립성	T가 나왔으니까 계속 나올 것이므로	7
			통계적 관점에서	1
			무응답	3
	②	독립성	T가 나왔으니까 다음부터는 H가 나올 가능성이 크다	5
			통계적 관점에서	1
			T가 나왔으니까 H가 나와야 확률이 $\frac{1}{2}$ 인 동전이니까	2
			무응답	3
11	③	표본크기효과 오개념	$\frac{8}{10}=\frac{80}{100}$ 이라고 생각해서	8
			무응답	3
5(1)	$\frac{1}{6}$	조건사와 연결사 오개념	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	6
			무응답	5
5(2)	$\frac{1}{6}$	조건사와 연결사 오개념, 시간 축 효과 오개념	무응답	11