대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.3, 443-461. Sep. 2008

초등학교 5학년 평면도형의 넓이 구하기 수업에서 나타난 학생들의 해결 방법 분석

유 연 자* · 방 정 숙**

본 연구는 주로 공식을 통한 계산 위주로 학습되는 초등학교 5학년 평면도형의 넓이 지도에 반하여 탐구 중심의 수업 설계를 바탕으로 학생들에게 충분한 시간과 조작 활동 자료를 제공한 후 학생들이 주어진 도형의 넓이를 어떻게 구하는지를 자세하게 탐색하였다. 학생들이 제시한 다양한 해결 방법과 이에 관한 면밀한 비교 분석을 통하여 평면도형의 넓이 구하기 지도 방안에 관한 구체적인 시사점을 제공한다.

Ⅰ. 서 론

교육과정 중 측정은 일상생활, 수학, 그리고 다른 교육과정 분야의 여러 측면에서 없어서는 안 되는 영역이다(Baroody & Coslick, 1998). 이런 이유로 측정은 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통해 수학적인 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고, 수학의 기본적인 지식과 기능을 활용하여 생활 주변의 여러 가지 문제를 관찰, 분석, 조직, 사고하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 강조하는 제 7차 교육과정의 목표에 적합한 영역 중 하나라 할 수 있다(교육부, 1998).

측정 내용 가운데 특히 넓이는 실제 수업에서 지도 방법에 따라 학생들이 수학적으로 사고할 수 있는 장면을 충분히 제공할 수 있는 내용이다(정동권, 2001). 그러나 현재의 교육 여건에서 넓이를 구하는 것은 형식화하여 가르칠 수 있기 때문에 측정 영역의 중요성에 대한 인지 없이 공식을 외우고 기계적인 적용을 통한 풀이 방식으로 대부분의 교육이 이루어지고 있는 실정이다(김주봉, 2000). 실제 교과서에서도 대부분 넓이 구하는 과정을 학생 스스로 생각해서 구하기보다는 제시된 순서를 따라서 하다보면 넓이 공식이 유도되고 이 공식을 이용하여 문제를 푸는 방식으로 되어있다. 이런 측면에서 학생들은 공식에 대한 필요성도 느끼지 못하고, 스스로 탐구하여 발견해 보는 경험도 갖지 못한 채, 하나의 완성된 형태로 공식을 수용하고 넓이를 기계적 계산에 의존하여 구하게 된다.

한편, 지금까지 평면도형 넓이에 관한 연구를 살펴보면 대부분이 학생들의 오류나 이해와 관련된 연구와 학습자료 개발이 대다수를 차지하고 있으며, 최근에 수업을 분석한 연구가 있기는 하나 평면도형의 넓이 구하기 수업 중 학생들의 해결 방법과 직접적으로 관련된 연구는 미흡한 실정이다. 이에 본 연구는 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 다양한 해결 방법을 강조하는 수업을 실시하여 첫째, 학생들이 주

* 전주대정초등학교(ryj99@naver.com)
** 한국교원대학교(jeongsuk@knue.ac.kr)

어진 평면도형의 넓이를 어떤 방법으로 구하는지 알아보고, 둘째, 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 자연스럽게 부각되는 쟁점이나 어려움이 무엇인지 분석하며, 셋째, 여러 가지 해결 방법 중 어떤 방법을 어떤 이유로 선호하는지 등을 면밀히 분석함으로써 평면도형의 넓이 구하기 교수·학습 지도에 대한 시사점을 얻는 데 그 목적이 있다.

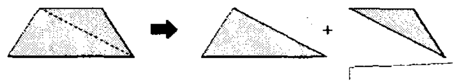
Ⅱ. 이론적 배경

1. 평면도형의 넓이

평면도형의 넓이를 측정하는 것은 주어진 단위 도형을 가지고 측정하고자 하는 도형의 내부를 겹치지 않고 빈틈없이 늘어놓아 몇 번 들어가는지 세는 일이다(구광조 & 라병소, 1997). 양을 수치적으로 나타내기 위해서는 기본 단위가 필요하다. 기본 단위는 평면을 빈틈없이 겹치지 않게 늘어놓을 수 있고, 모두 몇 개나 들어있는지를 세기가 쉬우며, 그리기 편한 도형이어야 한다(Stephan & Clements, 2003). 따라서 공간을 채우기에 적합한 정사각형을 기본 도형으로 하여 한 변의 길이가 1인 정사각형을 단위 도형으로 정의한다.

이렇게 정의된 넓이를 바탕으로 기본이 되는 직사각형의 넓이를 구하고, 이를 바탕으로 다른 도형의 넓이를 찾을 수 있다. 이 때 중요한 사실 중 하나가 넓이의 보존이다(Stephan & Clements, 2003). 넓이의 보존은 도형의 넓이를 따로 떼어도 변하지 않는 성질을 말한다(Lehrer, 2003). 따라서 도형의 넓이를 세분하여 구하거나, 분할한 부분을 재배열하여도 원래의 넓이와 동일한 양을 얻을 수 있다.

실제 학생들은 다양한 도형의 넓이를 구하기 위해 분할, 변형, 제거의 방법을 사용한다(방정숙, 김상화, 박금란, 2006). 여기서 분할은 주어진 도형의 넓이를 구하기 위해 넓이를 구하기 쉬운 하위 도형으로 나누는 방법을 말한다. 예를 들어 [그림 Ⅱ-1]과 같이 사다리꼴은 두 개의 삼각형으로 분할하여 넓이를 구할 수 있다.

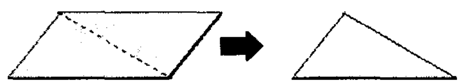


[그림Ⅱ-1] 분할로 사다리꼴의 넓이 구하기

변형은 도형의 일부를 바꿔 넓이를 구할 수 있는 도형으로 만드는 방법을 말하는데, 이것은 다시 변형시킨 결과와 처음 도형과의 넓이의 관계에 따라 등적변형, 반적변형, 배적변형으로 나눌 수 있다(정동권, 2001). 먼저, 등적변형이란 도형의 넓이는 변화시키지 않고 도형의 모양만 바꾸는 것을 말한다. 예를 들어 [그림 Ⅱ-2]와 같이 평행사변형은 등적변형을 통해 직사각형으로 넓이를 구할 수 있다.

[그림 Ⅱ-2] 등적변형으로 평행사변형 넓이 구하기

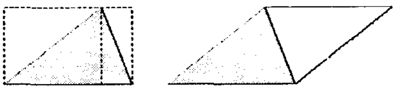
반적변형은 주어진 도형 넓이의 $\frac{1}{2}$이 되도록 하는 변형을 말한다. 예를 들어 평행사변형은 [그림 Ⅱ-3]과 같이 삼각형으로 반적 변형하여 넓이를 구할 수 있다.



[그림 Ⅱ-3] 반적변형으로 평행사변형 넓이 구하기

배적변형은 주어진 도형의 넓이가 두 배가

되도록 하는 변형이다. 예를 들어 삼각형은 [그림 Ⅱ-4]와 같이 직사각형 또는 평행사변형으로 배적 변형하여 넓이를 구할 수 있다.



[그림 Ⅱ-4]배적변형으로 삼각형의 넓이 구하기

제거는 주어진 도형에 외접하는 도형에서 빈 공간을 제외하는 방법이다. 예를 들어 [그림 Ⅱ-5]와 같이 마름모는 마름모에 외접하는 직사각형에서 빈 공간의 삼각형 4개를 빼서 그 넓이를 구할 수 있다.

[그림 Ⅱ-5] 제거로 마름모의 넓이 구하기

2. 평면도형의 넓이 지도 방법

학생들은 넓이 공식을 생각하기 이전에 대상의 넓이를 직관적·직접적으로 비교하는 활동과 매개물을 이용한 간접비교를 통해 어떻게 측정하고 무엇을 측정하고 있는지에 대한 개념을 명확히 해야 한다. 이러한 넓이에 대한 기초적인 경험을 쌓은 후 임의 단위를 도입하고, 임의 단위에 의한 불편함 인식 및 통일된 단위의 필요성이 충분히 제기되면 보편 단위를 도입한다(Grant & Kline, 2003).

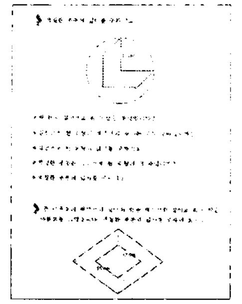
보편단위를 선택한 후에는 측정하고자 하는 넓이가 보편단위의 몇 배가 되는지를 측정하고, 측정값의 비교를 통해 대상을 비교할 수 있다. 일반적으로 가장 먼저 다루는 도형은 단위 넓이가 정확하게 들어갈 수 있는 직사각형이다. 직사각형의 내부를 채우는 배열을 구성하고, 그 단위 넓이의 총수를 결정하는 방법으로 학생들은 넓이의 값을 처음 경험하게 된다(Stephan & Clements, 2003). 이 때 넓이의 총수는 학생들이 이전에 곱셈을 학습하는 과정에서 다룬 경험을 이용하여 가로와 세로의 곱으로 나타낼 수 있고, 이것이 직사각형의 공식이 된다(Reys, Suydam, Lindquist, & Smith, 1998).

이렇게 발견한 직사각형의 공식을 바탕으로 넓이를 구하려고 하는 도형을 변형하거나 분할하는 등의 활동을 통하여 다양한 평면도형의 넓이 공식을 유도할 수 있다(방정숙 외, 2006). 예를 들어 사다리꼴의 넓이는 분할하여 두 개의 삼각형이나 직사각형과 삼각형의 합으로 구할 수 있으며, 배적변형을 이용하여 평행사변형으로 변형시켜 넓이를 구하는 것이 가능하다.

3. 교과서 분석

본 연구를 위해 5-나 단계의 6. 넓이와 무게 단원의 평면도형의 넓이 관련 차시를 중심으로 교과서를 분석하였다.

5-나 단계의 평면도형 넓이 관련 내용은 크게 사다리꼴과 마름모의 넓이 구하기, 넓이 문제 해결하기 및 실생활 문제 해결로 구성되어 있다. 사다리꼴과 마름모의 경우, 실생활 속 문제로 도입하여 도형의 변을 나타내는 용어를 약속하고, 교과서에 제시된 넓이 구하는 방법에 따라 공식을 유도한다. 그리고 이렇게 만든 공식을 이용하여 익히기 등의 넓이 문제를 해결하는 순서로 되어 있다. 문제 해결 및 실생활 문제 해결은 그동안 배운 넓이 구하는 방법을 이용하여 복합도형의 넓이를 구하는 내용으로 구성되어있다. [그림 Ⅱ-6]은 교과서에 제시된 사다리꼴 넓이 구하기와 문제 해결 관련 부분이다.

	
<5-나> 6. 넓이와 무게 p96	<5-나> 6. 넓이와 무게 p108

[그림 Ⅱ-6] 교과서에 제시된 사다리꼴 넓이 구하기와 문제 해결

사다리꼴이나 마름모의 경우 다양한 측정활동과 조작활동을 통해 학습자 스스로 공식을 이끌어 내고 일반화할 수 있는 기회를 제공하는 것이 중요하다(National Council of Teachers of Mathematics[NCTM], 2000). 그런데 위의 내용을 살펴보면 넓이를 공식화하는 과정이 교과서에 모두 제시되어 있어 학생들이 생각하고 활동하기보다는 단순히 지시에 따르는 수준에 머물게 할 가능성이 있다.

한편, 문제해결이나 실생활 문제 해결하기는 넓이를 구하는 데 꼭 필요한 치수만을 제공하고 있고, 길이 제시를 위해 표시된 선이 보조선 역할을 하여, 다양한 방법으로 문제에 접근할 수 없게 한다. 또한 실생활 해결하기에 제시된 문제가 문제 해결하기와 동일 형태로 제시되어 있어, 넓이가 실생활에서 어떻게 이용되는가를 알 수 있기보다는 넓이를 계산하여 구하는 수준으로 다루어지고 있다.

이에 본 연구에서는 사다리꼴, 마름모, 복합도형, 실생활 관련 문제의 넓이 구하는 내용을 다루되, 학생들이 넓이를 구하는 과정을 스스로 생각하고 결정하여 조작할 수 있도록 실제 크기(단, 실생활 문제의 경우 1㎡를 1㎠로 축소함)의 도형 조각과 그 과정을 상세히 기록할 수 있는 학습지를 제공하여 다양한 방법으로 넓이를 구하는 평면도형의 넓이 수업을 실시하고자 한다.

4. 선행연구 고찰

평면도형의 넓이 구하기와 관련된 연구를 살펴보면 크게 학생들의 오류나 이해에 대한 연구(예, 송미정, 2004; 장영은, 2003; Battista, 2003; Stephan & Clements, 2003)와 학습자료 개발(예, 배춘석, 2002; 장미라, 2003; 정필원, 2005)이 주를 이루고 있으며, 그 밖에 평면도형의 넓이 수업과 관련된 연구(예, 안선영, 방정숙, 2006; 이선영, 2006)가 있다.

먼저 학생들의 오류나 이해에 관련된 연구를 살펴보면 학생들은 넓이를 학습에서 여러 가지 어려움을 경험하는 것으로 나타났다. 보통 학생들은 1차원 도구인 자를 사용하여 2차원을 측정하는 활동으로 인한 혼란(Stephan & Clements, 2003)이나 가로인 수를 세고 한쪽 모서리 부분의 수를 중첩하여 세로의 수를 세고 전체 배열을 구하는 오류를 범하면서도 수치화하는 과정이 동일하여 자신의 방법이 문제가 없다고 생각하는 경향이 있다(Battista, 2003). 또한 넓이와 둘레를 혼동하거나 밑변과 높이의 의미를 명확하게 인지하지 못하는 부정확한 개념과 정의에 의한 오류와 길이나 각도를 짐작하여 문제를 해결하는 시각적 오류로 넓이를 구하는 데 어려움을 겪는다고 하였다.(송미정, 2004; 장영은, 2003).

한편 학습자료 개발에 관한 연구를 살펴보면 현재 넓이 지도가 공식을 이용한 문제 풀이에 치중되어 있음을 지적하고 이를 극복하기 위한 학습 자료로 퀴즈네르 막대(정필원, 2005)와 장판지로 만든 도형 조각(배춘석, 2002) 등을 이용할 것을 제안하고 있다.

최근에는 평면도형 넓이 구하기 수업과 직접적으로 관련된 연구도 있는데, 예를 들어, 안선영과 방정숙(2006)은 교사의 교수학적 내용 지

식 측면에서 수업을 분석하여 그 관계에 초점을 두었고, 이선영(2006)은 유추를 통한 도형의 변형을 이용하여 학생들이 평면도형의 넓이 공식을 구성하는 수업을 분석하기도 하였다. 하지만, 초등학생들이 주어진 도형의 넓이를 다양한 방법으로 구할 수 있다는 것 외에, 문제해결 과정에서 부각되는 쟁점이나 어려움, 또는 일련의 도형의 넓이를 구할 때, 여러 가지 방법 중에서 어떤 방법을 왜 이용하는 지 등, 해결 과정에 초점을 둔 연구는 미흡한 실정이다. 이에 본 연구는 다양한 해결 방법을 강조하는 평면도형의 넓이 구하기 수업에서 나타난 학생들의 해결 과정과 방법을 분석함으로써 평면도형의 넓이 구하기 교수·학습 지도에 대한 시사점을 얻는 데 그 목적이 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상 및 방법

본 연구를 위해 중소 도시에 있는 A초등학교 5학년 1개 학급을 연구대상으로 선정하였다. 이 초등학교는 학력 수준 및 사회 경제적 수준이 중상위권에 속하며, 학부모들이 자녀에게 관심이 많고 학교 활동에 적극적으로 참여하는 편이다. 연구 대상이 된 학급은 남 17명 여 15명으로 구성되어 있다. 학급의 수학 성취 수준은 동학년과 비교했을 때 다소 높은 편에 들어가고, 70%정도의 학생들이 방과 후 보습학원에서 수학을 배우고 있다. 학생들은 소집단 활동 훈련이 잘 되어 있는데, 교사가 임의로 소집단 활동 결과의 발표자를 정하는 관계로 서로 결과에 대해 가르치고 배우는 것에 익숙하며 자신의 생각을 자유롭게 표현하는 편이다. 한편 본 연구를 위한 수업에 앞서 학생들은 5-가 단계에서 삼각형과 평행사변형의 넓이를 다양한 방법으로 구할 수 있음을 배우고, 이를 직접 찾아보는 경험을 하였다.

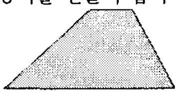
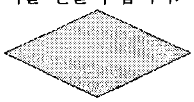
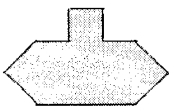
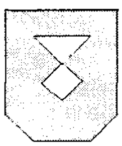
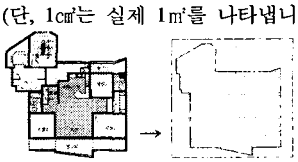
대상 학급의 교사는 교육경력 5년의 여교사로 연구 당시 교육대학원에서 초등수학교육을 전공하고 있었다. 수업 중 문제 해결에 성공한 학생들에게는 문제 해결 과정에 대한 이해를, 실패한 학생들에게는 문제 해결 방법을 지도하는 것을 중요하게 생각하고 있다. 또한 정답보다는 자신의 생각을 명료화하는 능력과 수학적 개념에 대한 올바른 이해를 높이 평가하는 편이다.

한편, 본 연구가 넓이를 구한 결과보다는 학생들이 넓이를 구하는 과정에 초점을 두고 그 과정이 어떻게 이루어지고 있는가를 분석하고자 한다는 점과, 구체적인 수업 사례를 통해 학생들의 해결 방법에 관한 정보를 찾는다는 점에서 질적 사례연구를 이용하였다.

2. 자료 수집 및 분석

본 연구를 위해 5-나 단계의 수학 교과서 내용 중 사다리꼴의 넓이 구하기, 마름모의 넓이 구하기, 복합도형의 넓이 구하기, 실생활 문제 해결하기를 수업 주제로 하여 5차례(11차시)의 수업을 실시하여 연구 문제 해결을 위한 자료를 얻었다. 수업 시간에 제시된 도형은 모두 실제 크기로 만들었으며, 해결과정을 상세히 기록할 수 있는 학습지와 함께 제공되었다. 수업은 주제에 따라 2~3차시로 실시하였으며, 각 주제별로 사용된 문제는 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-1> 수업에서 사용된 문제

수업주제 (차시)	문제
사다리꼴 (3차시)	※ 다음 사다리꼴의 넓이를 다양한 방법으로 구해보고, 사다리꼴의 넓이 구하는 공식을 만들어 봅시다. 
마름모 (2차시)	※ 다음 마름모의 넓이를 다양한 방법으로 구해보고, 마름모의 넓이 구하는 공식을 만들어 봅시다. 
복합도형1 (2차시)	※ 다음 평면도형의 넓이를 다양한 방법으로 구해 봅시다. 
복합도형2 (2차시)	※ 다음 평면도형의 넓이를 다양한 방법으로 구해 봅시다. 
실생활 문제 해결하기 (2차시)	다음 35평 아파트의 넓이를 구하시오. 계산은 계산기를 이용하세요 (단, 1㎠는 실제 1㎡를 나타냅니다.) 

한편, 수업은 탐구 학습 모형을 바탕으로 학생들이 '이미 배운 넓이 공식을 이용하여 넓이를 구할 수 있지 않을까?' 하는 가설을 세우고, 그 가설대로 조작활동을 통하여 직접 넓이를 구해보고, 그 결과를 소집단과 대집단 활동을 통하여 일반화하는 순서로 설계되었다. <표 Ⅲ-2>는 본 연구를 위해 설계된 수업 지도안의 예이다.

<표 Ⅲ-2> 사다리꼴의 넓이 구하기 수업 지도안

단원		6. 넓이와 무게
학습주제		사다리꼴의 넓이 알아보기(1~3/11)
학습목표		사다리꼴의 윗변, 아랫변, 높이를 알 수 있다. 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식을 알아내고, 넓이를 구할 수 있다.
학습 단계	학습 흐름	교수 · 학습활동
도입	전체 학습	◉ 학습동기 유발 및 전시학습 상기 ○ 여러 가지 종류의 사다리꼴 보고 공통점 말하기 ○ 여러 가지 모양의 평면도형 보고 넓이 말하기 ○ 사다리꼴의 넓이 공식의 필요성 알기 ◉ 학습목표 파악 ◉ 학습활동 안내 ○ 사다리꼴의 밑변과 높이 알기 ○ 사다리꼴의 넓이 구하는 방법 찾아보기 ○ 사다리꼴의 넓이 구하는 공식 만들어 보기
문제 상황 제시	전체 학습	◉ 사다리꼴의 밑변과 높이 알기 ○ 평행사변형이나 삼각형에서의 밑변과 높이 관계 알기 ○ 사다리꼴에서 밑변과 높이 알고 약속하기 - 윗변, 아랫변 : 사다리꼴에서 평행인 두 변 - 높이 : 두 밑변 사이의 거리 ◉ 사다리꼴의 넓이는 어떻게 구할까?
가설 설정	개별 학습	◉ 사다리꼴 넓이 구하기 ○ 사다리꼴의 넓이를 다양하게 구해보자. - **가설설정하기** (가설의 예) 만약 사다리꼴을 직사각형으로 변형시킬 수 있다면 직사각형의 넓이 구하는 공식을 적용하여 넓이를 구할 수 있지 않을까?
가설 검증	개별 학습	- **가설검증하기** (가설 검증의 예) 주어진 사다리꼴을 잘라 붙여 직사각형으로 만들어 넓이를 구한다.
일반화	소집단 학습 및 전체 학습	**-일반화하기** · 개인적으로 생각한 방법을 토대로 모둠에서 서로 비교해보고, 사다리꼴의 넓이를 쉽게 구하는 방법(공식)을 만들어본다. · 조별로 논의하여 정리한 결과를 발표해 본다. · 조별로 발표한 방법의 장단점을 이야기해 본다.
	전체 학습	◉ 학습활동 정리 ○ 사다리꼴의 밑변과 높이 알기 ○ 사다리꼴의 넓이 = (윗변+아랫변)× 높이÷ 2 ○ 차시예고 및 과제 제시 - 마름모의 넓이 구하기 - 수학일지 쓰기

3. 자료 분석

학생들이 도형의 넓이를 어떻게 구하는지 알아보고자, 방정숙 외(2006)와 정동권(2001)에 제시된 분할, 변형, 제거에 두 가지 이상의 방법을 함께 사용한 경우를 복합이라는 항목으로 추가하여 만든 <표 Ⅲ-3>를 기준으로 개별적으로 해결한 학습지와 소집단 내에서 정리한 학습지를 분석하였다. 이 때 넓이는 보존되었으나 계산상의 실수로 인한 오답은 분석 대상에 포함하였다. 그러나 넓이가 보존되지 않은 경우는 분석 대상에서 제외하였다. 또한 학생들이 주어진 도형의 넓이를 구하는 과정에서 어떤 어려움을 겪으며 다양한 해결 방법을 어떻게 평가하고 비교하는지 알아보고자, 소집단 내에서 토의한 내용과 전체 학급 내에서 토의한 내용을 에피소드 중심으로 분석하였다.

<표 Ⅲ-3> 학생들의 해결 방법 분류 기준

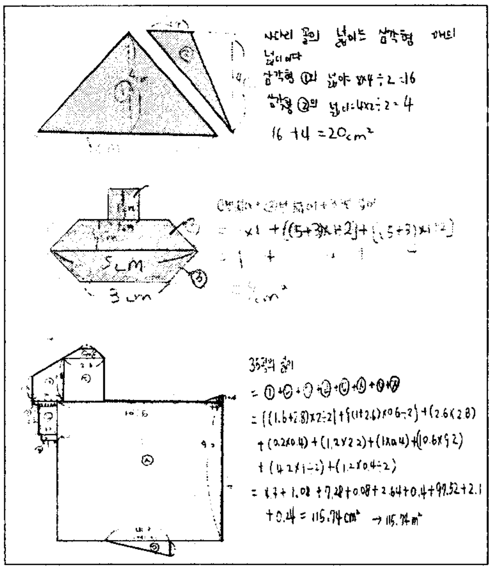
보존방법		특 징
분할		주어진 도형의 넓이를 구하기 위해 넓이를 구할 수 있는 도형으로 세분한 경우
변형	등적	도형의 넓이는 변화시키지 않고 모양만 바꾸는 경우
	반적	주어진 도형의 1/2이 되도록 모양을 바꾸는 경우
	배적	주어진 도형의 2배가 되도록 모양을 바꾸는 경우
제거		주어진 도형에 외접하는 도형에서 빈 공간을 제외시키는 경우
복합		위의 방법들을 혼합하여 사용한 경우

Ⅳ. 결과 및 분석

1. 분할하여 넓이 구하기

가. 학생들의 해결 방법

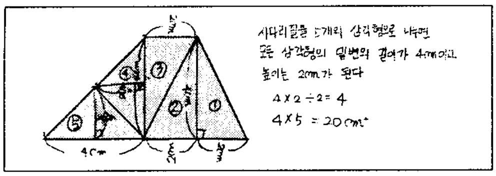
첫째, 학생들은 큰 도형으로 분할하여 넓이를 구하였다. 이 방법은 가장 일반적인 분할의 형태로 넓이를 구하는 도형의 수가 적어 편리하다고 생각하였다. 예를 들어 사다리꼴의 넓이를 2개의 삼각형으로 분할하여 구하는 경우나 마름모를 삼각형 2개로 나누는 경우가 이에 해당한다. 이 경우 학생들은 보통 주어진 도형의 가장 넓은 부분을 차지하는 도형을 선택하고, 나머지 부분을 넓이 구하는 방법을 알고 있는 도형으로 다시 분할하였다. 그러나 분할하여 사다리꼴의 넓이를 구해야 하는 경우가 나오면, 계산이 번거롭기 때문에 좀 더 계산하기 편한 삼각형 2개나 삼각형과 직사각형 등으로 나누기도 하였다. [그림 Ⅳ-1]은 큰 도형으로 나누어 구해야 하는 도형의 수를 적게 하여 넓이를 구한 예이다.



[그림 Ⅳ-1] 도형을 크게 분할하여 넓이를 구한 예

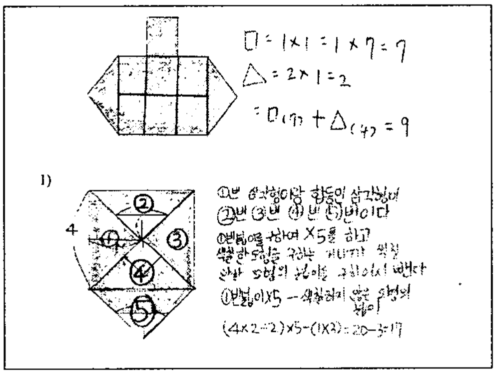
둘째, 학생들은 넓이가 같은 도형으로 분할하여 넓이를 구하였다. 넓이가 같은 도형으로 분할하는 경우는 도형의 성질을 이용하거나 합동이 되는 도형으로 분할하는 경우였다. [그림 Ⅳ-2]처럼 삼각형의 밑변과 높이가 같으면 넓이가 같다는 사실을 이용하여 사다리꼴을 넓이가

같은 삼각형으로 분할하였다.



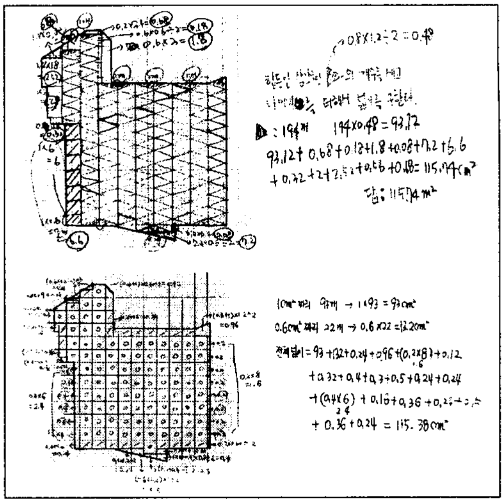
[그림 Ⅳ-2] 넓이가 같은 도형으로 분할하여 넓이를 구한 예

한편, 넓이가 같은 도형 만들기에 이용된 대부분의 전략은 [그림 Ⅳ-3]과 같이 합동인 도형으로 분할하기였다. 합동인 도형으로 도형을 분할할 수 있다면, 넓이를 구하는 도형의 개수가 적어 넓이 구하기가 편리하다고 평가되었다.



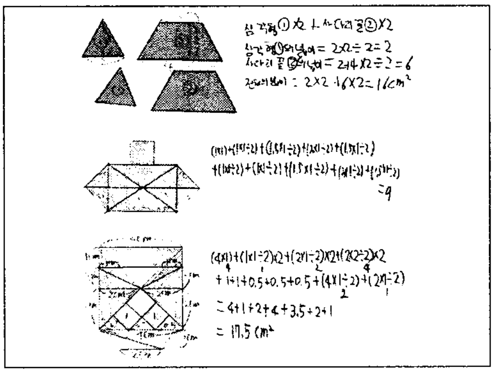
[그림 Ⅳ-3] 합동인 도형으로 분할하여 넓이를 구한 예

그러나 학생들이 편리하다고 판단한 같은 넓이의 도형 만들기는 때때로 무리해서 합동인 도형을 찾는 비효율적인 분할 상황을 만들기도 하였다. 대부분의 학생들은 합동인 도형을 찾는 것이 주어진 도형에 따라 불편할 수 있음을 고려하지 못하였다. 예를 들어 [그림 Ⅳ-5]처럼 커다란 직사각형 하나면 간단할 것을 굳이 1×1의 정사각형으로 나누거나 0.8×1.2÷2의 삼각형으로 분할하는 경우가 있었다.



[그림 Ⅳ-5] 무리해서 합동인 도형으로 분할하여 넓이를 구한 예

셋째, 학생들은 다양한 풀이를 만들기 위해 이미 충분히 구할 수 있는 도형임에도 불구하고 다시 분할하는 등 필요 이상의 분할을 하기도 하였다. [그림 Ⅳ-4]처럼 마름모를 2개의 삼각형으로 분할한 뒤 삼각형 1개와 사다리꼴로 분할하거나 이미 분할하여 얻은 직사각형을 4개의 삼각형으로 다시 분할하는 것이 이에 해당한다. 이 방법은 넓이를 구하는 데 필요한 길이의 수를 많게 하고, 그 계산을 복잡하게 만들기도 하였다.



[그림 Ⅳ-4] 필요 이상으로 분할하여 넓이를 구한 예

1) 이 방법은 실제 분할과 제거의 방법을 이용한 경우에 해당하나, 그 분할이 합동인 도형을 이용한 경우이기 때문에 합동인 도형으로 분할한 예에 제시하였다.

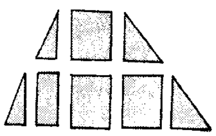
나. 분할의 쟁점: 다양성과 효율성

학생들이 분할을 하면서 가장 많이 겪은 어려움은 다양성과 효율성 중 어느 것을 택하느냐와 관련된 것이었다. 교사는 학생들에게 다양한 방법으로 평면도형의 넓이를 구할 것을 강조하고, 다른 조가 발표한 내용은 소집단 활동 결과를 발표할 때 제외시켰다. 그로 인하여 학생들은 다양한 방법, 다른 학생들이 사용하지 않은 방법으로 도형을 분할하려 하였다. 그러나 이것은 수학적 효율성을 고려하지 못하는 불편한 상황을 가져오기도 하였다. <에피소드 1>은 사다리꼴을 분할하여 직사각형과 삼각형의 합으로 넓이를 구한 해결 방법에 대해 다양성과 효율성 측면의 대립이 나타나 있는 소집단 활동 장면이다.

<u><에피소드 1> 그게 공식이냐?</u>

S1 : 내가 한 방법은 아무도 안 했을껄~ 사다리꼴을 이렇게 나눠서 사각형하고 삼각형으로 만든 다음 다 더했더니 20㎠가 나왔어.

S1의 해결방법



S2 : 야 계산이 너무 복잡해. 그리고 이렇게 하면 공식을 어떻게 만드냐?

S1 : 공식? 쉽지.. 가로×세로×3+밑변×높이÷3+가로×세로+밑변×높이÷2×2.

S2 : 그게 공식이냐? 사다리꼴에 가로, 세로가 어디 있냐?

S3 : 선생님이 윗변, 아랫변 이런 거로 쓰라고 했어.

S1 : 그러면 가로는 윗변이고....음....

S2 : 니껴 이상해.. 이건 빼

S1 : 그래도.. 특이하잖아. 어차피 너네들이 한 것은 다른 조에서 다 했을걸..

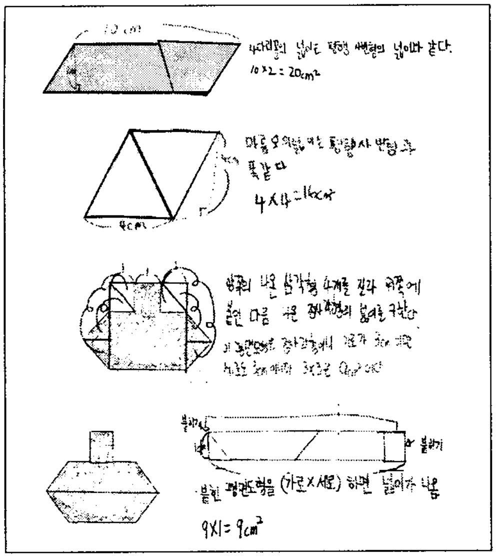
사다리꼴의 넓이는 보통 윗변, 아랫변, 높이가 주어지기 때문에 본 연구에서 넓이를 구할 때 직접 길이를 자로 재서 사용하긴 했지만, 그 공식은 사다리꼴에 일반적으로 주어지는 길이를 이용하여 정리하여야 한다. 그러나 S1학생은 그 점을 고려하지 못하였다. 단지 다른 학생들과 다른 방법을 찾는 것이 수업의 목적이라고 생각하고 있었다. 이에 반해 S2 학생은 무조건 다른 방법 보다는 편리하고 수학적으로 의미가 있는 해결방법이어야 한다고 생각하였다. 그러나 대부분의 학생들이 분할을 이용하여 넓이를 구하는 과정에서 S1과 같이 지나치게 다양성만을 추구하는 것으로 나타났다. 즉 수학적 효율성의 측면을 고려하지 못한 채 특이한 방법, 독특한 방법이 좋은 방법을 판단하는 기준이 되는 결과를 가져오기도 하였다. 이것은 수학적인 효율성과 관련된 사회수학적 규범이 정착되지 못한 까닭으로 생각된다(Yackel & Cobb, 1996).

2. 변형하여 넓이 구하기

가. 학생들의 해결 방법

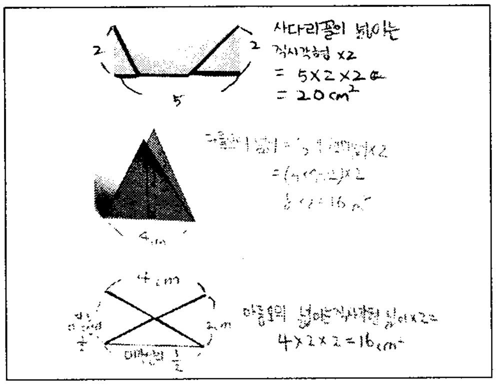
첫째, 등적변형은 넓이를 보존할 때, 도형의 일부를 옮겨, 넓이 구하는 방법을 알고 있는 도형으로 만드는데 이용되었다. 학생들은 직사각형과 평행사변형이 되도록 등적변형을 하였으며, 그 중 직사각형으로 등적 변형하는 경우가 많았다. [그림 Ⅳ-6]는 등적변형을 이용하여 넓이를 구한 예이다. 마름모의 경우에는 등적변형이 비교적 간단하게 이루어진 반면 사다리꼴과 복합도형의 경우, 변형 과정을 이해하지 못하는 경우가 있었다. 예를 들어 [그림 Ⅳ-6]의 세 번째와 네 번째 해결 방법을 설명할 때 학생들은 어떻게 주어진 도형이 직사각형으로 변형되는지 이해하지 못하여 변형 과정을 보여

줄 것을 요구하기도 하였다.



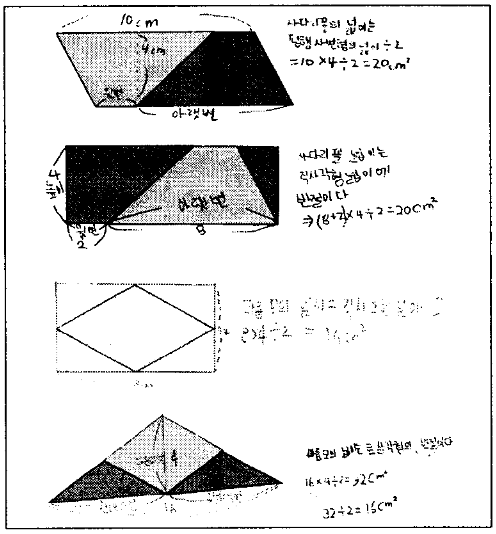
[그림 Ⅳ-6] 등적변형을 이용하여 넓이를 구한 예

둘째, 반적변형을 이용하여 넓이를 구한 경우는 사다리꼴과 마름모에 한정되어 나타났다. 마름모의 경우 대부분의 학생들이 반적변형으로도 넓이 공식을 잘 만들 수 있었던 것에 반해, 사다리꼴은 앞서 등적변형에서와 같이 그 변형 과정을 이해하지 못하거나 변형된 직사각형의 가로의 길이와 처음 사다리꼴의 윗변과 아랫변 길이 간의 관계를 찾지 못하여 넓이 공식을 유도하지 못하는 경우가 있었다. [그림 Ⅳ-7]은 반적변형을 통해 넓이를 구한 예이다.



[그림 Ⅳ-7] 반적변형을 이용하여 넓이를 구한 예

셋째, 배적변형은 주어진 도형과 같은 도형을 한 개 더 이용하여 직사각형, 평행사변형, 삼각형을 만들어 넓이를 구하는 데 이용되었다. 배적변형을 통해 넓이를 구한 경우 새로 만들어진 도형과 처음 주어진 도형 간의 관계를 한눈에 볼 수 있어 등적변형이나 반적변형에 비하여 공식 유도가 편리했다. [그림 Ⅳ-8]은 배적변형을 통해 넓이를 구한 예이다.



[그림 Ⅳ-8] 배적변형을 이용하여 넓이를 구한 예

나. 변형의 쟁점: 처음 도형과 변형된 도형간의 관계

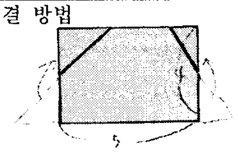
학생들이 변형을 이용하여 넓이를 구하는 가운데 겪는 어려움은 처음 도형과 변형된 도형 간의 관계를 알지 못하는 것에서 발생하였다. 변형은 어느 한 도형으로 완성되기 때문에 일단 하나의 도형으로 만들면 쉽게 넓이를 구할 수 있어 편리하다는 장점이 있다. 특히 복합도형의 경우 변형이 되기만 한다면 여러 도형의 넓이를 구할 필요도 없이 간단하게 넓이를 구할 수 있어 분할이나 제거의 방법보다 편리하다. 그러나 변형된 도형과 처음 도형간의 관계에 관심을 갖는 학생보다는 퍼즐 조각을 맞추듯 조각 낸 도형을 맞추는 과정에서 우연에 의

해 도형을 변형하고 그 변형 결과에만 관심을 갖다보니 넓이를 구하기는 쉬웠지만, 그 관계를 알기 어려워 공식을 유도하지 못하거나 다른 사람에게 자신의 풀이를 설명할 때 어떻게 만들었는지 한참을 생각해야 하는 경우가 종종 있었다. <에피소드 2>는 전체 학습에서 사다리꼴의 넓이 공식을 유도하는 과정에서 처음 도형과 변형된 도형간의 관계를 알지 못하여 곤란을 겪는 장면이다.

<u><에피소드 2> 가로는 뭘까?</u>

S4 : 사다리꼴의 넓이를 구하기 위해 (연필로 없어진 사다리꼴을 그리며) 여기하고 여기 이 부분[연필로 없어진 사다리꼴을 그린 부분]을 (화살표를 그리며) 이쪽[화살표 방향]으로 올리면 직사각형이 되는데, 그래서 사다리꼴의 넓이는 직사각형의 넓이와 같습니다. 5곱하기 4하니까 20이 나옵니다. 사다리꼴의 넓이 내는 공식은 가로 곱하기 세로입니다.

S4의 해결 방법



T : 자 3조의 발표 내용에 대해 이야기 해봅시다. 없어?

학생들 : 특이해요~

T : 특이하다. 그거말고.. 선생님은 하고 싶은 말이 있는데..

(중략)

S1 : 저건 공식이 아니예요. 사다리꼴에는 가로와 세로가 없습니다. 공식은 아랫변, 윗변 이런 것으로 써야 합니다.

T : 그렇지. 사다리꼴에는 가로와 세로가 없어. 그럼 여기 가로의 길이는 사다리꼴의 무엇일까? 가로는 뭘까?

S5 : 아랫변의 반

T : (사다리꼴을 반으로 접어 대서 보여주며) 이게[사다리꼴 아랫변의 반] 같아?

S6 : 아니오.

T : 안 같잖아. 지원이

S7 : 아랫변에서 윗변을 뺀 길이

T : 아랫변에서 윗변을 뺀 길이는 (사다리꼴의 윗변에서 아랫변으로 향하는 평행사변형을 그려 아랫변에 윗변을 표시하며) 이거[아랫변에서 윗변을 뺀 길이]잖아. 이게[아랫변에서 윗변을 뺀 길이] 같아? 이게[아랫변에서 윗변을 뺀 길이] 더 길잖아. 상익이

S8 : 높이

T : 높이? 가로가 더 길잖아 높이보다
여러분 가로가 뭡니까? 수열이

S9 : 오른쪽 옆에 있는 길이.

T : (직접 대주며) 안 같잖아요.
막무가내로 하지 말고 잘 봐봐.
이거[S4의 해결방법] 처음에 어떻게 찾은 거야? (실물 화상기에 도형 조각을 직접 접어 보여주며)사다리꼴을 반으로 접고, 양 옆을 접은 다음, 이 부분[옆으로 접힌 부분]을 오려서 위에 붙인 거잖아. 그리고 여기[변형된 도형의 위에 있는 가로]하고 여기[변형된 도형의 아래 있는 가로]만 같은 게 아니야. 여기[높이를 반으로 나누어 가로로 접은 선]도 똑같이 다 가로잖아. 너희들 조각 있지? 그걸로 직접 해서 찾아봐.

(한참동안 학생들은 가지고 있는 조각으로 도형을 만들어 보고 직사각형의 가로의 길이를 찾는 활동을 한다)

T : 찾았습니까? 뭡니까?

S10 : 저기 1조[그림 Ⅳ-8의 첫 번째 그림]가 한 사다리꼴 2개 더한 것의 반절

T : 그렇긴 한데.. 처음 사다리꼴 식 말로 바꿔 보면?

S10 : 윗변 더하기 아랫변 나누기 2

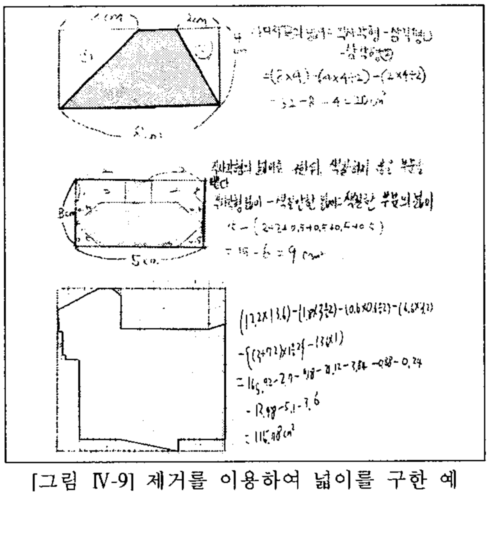
위의 에피소드에서 학생들이 초반에 겪은 어려움은 공식에 대해 잘 이해하지 못하는 데서 발생한 것처럼 보였다. 그러나 공식이 무엇인지 알고 있는 학생들조차 변형 결과 나온 직사각형의 가로의 길이를 묻는 교사의 질문에 제대로 답을 못하였다. 즉 학생들에게 문제는 공

식이 무엇인지 모르는 것이 아니라 변형을 통해 얻은 결과와 처음 주어진 도형간의 관계를 알지 못하는 것에 있었다. 이에 반해 학생들은 변형 과정을 직접 경험하고, 그 과정에서 처음 도형과 변형된 도형간의 관계에 관심을 가짐으로써 길이를 찾을 수 있었다.

3. 제거하여 넓이 구하기

가. 학생들의 해결 방법

학생들이 도형의 넓이를 구하는 데 이용한 제거의 방법은 주어진 도형에 외접하는 도형을 찾고, 빈 부분을 빼내는 형식이었다. 제거의 방법은 그 종류가 문제마다 한정되어 있어 다양한 방법은 나타나지 않았으며 그 이용 빈도 다른 방법에 비해 낮았다. [그림 Ⅳ-9]는 제거의 방법을 이용하여 넓이를 구한 예이다.



[그림 Ⅳ-9] 제거를 이용하여 넓이를 구한 예

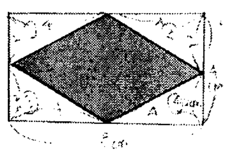
나. 제거의 불편함

대부분의 학생들은 제거를 귀찮은 방법이라고 생각하였다. 일단 제거의 방법을 사용하려면 불필요한 부분까지 넓이를 구해야 하는데, 실생활 문제와 같이 주어지는 길이가 복잡한 경우 변의 길이를 측정하는 일이며 측정된 길이로 계산하는 일 모두가 번거롭다. 물론 주어지는 도형 자체가 외접하는 도형으로 쓰인다면 그래도 비교적 간단한 방법이 될 수 있다. 그러나 그렇지 않은 경우 일단 제거의 방법을 이용하려면 전체를 포함하는 도형과 제거해야 하는 도형을 구해야 하기 때문에 넓이를 구하는 도형의 수가 많아져 학생들 사이에서 제거는 불편한 방법으로 여겨졌다. <에피소드 3>은 마름모의 넓이를 구하는 데 제거의 방법을 이용한 것에 대해 소집단에서 학생들이 분석을 하는 장면이다.

<u><에피소드 3> 귀찮게 하나씩 빼는 것은 안 좋아</u>

S11 : 난 마름모의 넓이를 구하려고 마름모가 들어가게 큰 직사각형을 그리고 직사각형에서 이것[마름모가 아닌 삼각형①], 이것[마름모가 아닌 삼각형②], 이것[마름모가 아닌 삼각형③], 이것[마름모가 아닌 삼각형④]을 뺐어.

S11의 해결방법



S12 : 이게 다 합동이니까 하나씩 빼지 말고 곱하기 4를 해서 빼지 그래?

S13 : 난 이건[S11의 방법] 별로라고 생각해. 어차피 마름모 원래 넓이하고 이 삼각형[마름모가 아닌 삼각형①②③④]들이 같은데 나누기 2로 구하지 귀찮게 하나씩 빼는 것은 안 좋아.

에피소드에서 S11 학생이 제시한 제거의 방법은 S12와 S13의 학생에게 힌트가 되어 또 다른 해결 방법을 찾는 데 도움이 되었다. 제거를 이용하여 넓이를 구하는 방법은 찾기가 비

교적 쉽다. 단지 그 계산이 불편할 뿐이다. 그러나 제거로 넓이를 구한 방법을 서로 평가해 보는 과정은 도형의 일부가 아닌 전체적인 모습을 볼 수 있게 하여, 외접하는 도형과 처음 주어진 도형의 관계, 도형과 도형 내부의 관계를 한눈에 볼 수 있게 했다. 다시 말해 불편하긴 하지만 제거는 도형들 간의 관계를 찾는 데 도움이 되어 때때로 분할, 변형, 또는 두 방법을 혼합하여 사용하는 좀 더 효율적인 다른 해결 방법을 찾는 기회가 되었다.

4. 분할, 변형, 제거: 학생들의 선호도

교사가 주어진 도형의 넓이를 다양한 방법으로 구할 것을 강조함에 따라 학생들은 실제 여러 가지 방법으로 도형의 넓이를 구하였다. 하지만, 그러는 가운데 학생들이 각각 편리하다고 생각하는 방법이 있는 것으로 드러났다. 이는 매 문제마다 학생들이 제시하는 여러 가지 해결 방법 중 가장 먼저 제시하는 해결방법이 거의 일치하는 것으로 확인할 수 있었다. 예를 들어 분할의 방법 중 큰 도형으로 나누는 것을 선호하는 학생은 어떤 도형이 주어지더라도 가장 먼저 큰 도형으로 나누는 방법으로 넓이를 구하였다. 마찬가지로 직사각형의 넓이를 이용할 수 있는 방법을 선호하는 학생은 어떤 도형이 주어지더라도 직사각형의 넓이를 이용할 수 있도록 분할, 변형, 또는 제거하였다. 구체적으로 <에피소드 4>에 나타나듯이 학생들의 개별적인 선호도는 교사가 학생들에게 어떤 방법이 가장 편리한지 물어보았을 때 다양하게 드러났다.

<u><에피소드 4> 어떤 방법이 가장 편리하다고 생각합니까?</u>

T : 지금까지 여러분이 여러 가지 방법으로 사다리꼴의 넓이도 구하고 마름모의 넓이도 구해 봤는데, 어떤 방법이 가장 편리하다고 생각합니까?
S14 : 넓이가 같은 것이 많은 도형으로 나누어질 때
S15 : 합동인 도형이 많을 때
T : 그건 다 같은 말이고. 또?
S16 : 직사각형이나 정사각형 같이 넓이 구하는 공식이 쉬운 것을 이용할 수 있을 때
S17 : 사다리꼴 공식을 안 써도 될 때
S18 : 나누어지는 도형이 클 때
S19 : 나누어지는 도형이 작을 때
S20 : 그거는 복잡해~
T : 둘 다 인정! 또 여러분 어떤 경우가 편리했어요?
(중략)
S21 : 도형을 조금만 빼도 될 때
S22 : 직사각형으로 도형 전부를 만들 수 있을 때
S23 : 밀리미터가 안 나올 때
S24 : 자로 조금만 재어도 넓이를 구할 수 있을 때
T : (칠판에 적은 것을 가리키며) 이 중 어떤 게 답일까?
학생들 : (본인이 말한 것을 다시 큰 소리로 말한다)
T : 선생님이 뭐라고 할 것 같아?
여러분 각자가 생각하는 그 방법들 모두가 다 좋은 방법이고 정답입니다.

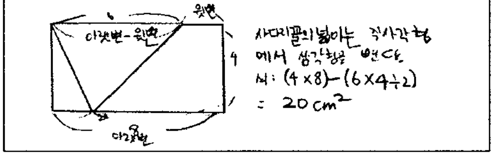
위의 에피소드에서처럼 학생들은 넓이 구하는 편리한 방법에 대해 각각 다른 생각을 가지고 있었다. 분할은 넓이가 같은 도형으로 분할할 수 있을 때, 큰 도형이나 작은 도형으로 나눌 수 있을 때 등의 방법이 있었다. 변형과 관련해서는 직사각형으로 그 모양을 바꿀 수 있을 때라고 생각하였으며, 제거하는 도형의 수가 적을 때 제거는 편리하다고 말하였다. 그 밖에 모든 보존 방법에 적용되는 전략으로는 직사각형 공식을 이용할 수 있을 때, 사다리꼴의 넓이를 구하지 않아도 될 때, 밀리미터가 나오지 않을 때 등이 있었다. 이처럼 학생들이 생각하는 편리한 방법에는 차이가 있으며, 그

방법이 비록 불편하고 비효율적인 방법인 것처럼 보일지라도 학생들은 그 방법을 계속해서 이용하는 경향이 있었다. 이것은 학생들마다 넓이를 구하는 데 있어서 각자 편리하거나 쉽게 느끼는 방법이 있으며 이러한 다양성을 전제로 한 수업의 필요성을 부각시킨다. 그러나 단지 모든 방법을 인정하는 것에 그치기보다는, 다양성 속에서 서로 토론하고 아이디어를 공유하는 가운데 좀 더 효율적이고 좋은 방법을 학습하는 것은 한 단계 발전된 수업을 가능하게 할 것이다.

5. 복합적인 방법으로 넓이 구하기

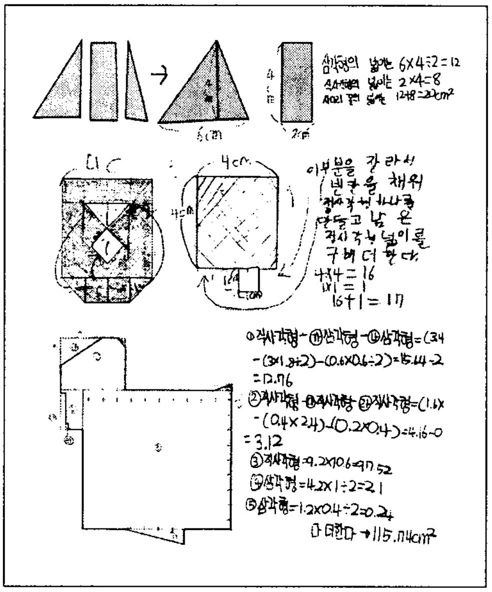
가. 학생들의 해결 방법

첫째, 공식을 만들기 쉬운 방법으로 넓이를 구하기 위해 두 가지 방법을 혼합하여 사용하기도 하였다. 이미 분할, 변형, 제거의 방법으로 넓이는 구하였으나 공식으로 만들기가 어려울 때, 학생들은 다른 방법을 추가적으로 이용하였다. [그림 Ⅳ-10]은 사다리꼴의 넓이를 제거의 방법으로 구하였으나 이를 공식으로 나타내기 어렵게 되자, 제거하는 부분의 삼각형의 밑변의 길이를 (아랫변-윗변)으로 찾을 수 있도록 변형한 뒤 제거하는 방법으로 넓이를 구한 예이다.



[그림 Ⅳ-10] 공식유도를 위해 두 가지 방법을 이용하여 넓이를 구한 예

둘째, 계산의 횟수를 줄이기 위해 두 가지 방법을 혼합하여 사용하기도 하였다. 예를 들어 [그림 Ⅳ-11]과 같이 사다리꼴의 넓이를 삼각형 2개와 직사각형으로 분할하고, 두 삼각형이 높이가 같음을 이용하여 하나의 삼각형과 직사각형의 넓이로 구하거나, 복합도형의 빈 공간을 채워 만들고 그 도형을 분할, 제거하여 넓이를 구할 수 있었다. 이러한 경우 넓이를 구하는 도형의 개수가 줄어들고 더불어 필요한 길이 역시 적어 최소 측정으로 넓이를 구할 수 있는 이점이 있어 편리한 것으로 받아들여졌다.



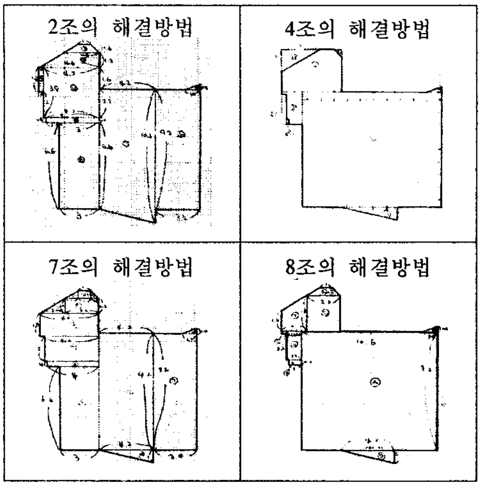
[그림 Ⅳ-11] 계산 횟수를 줄이기 위해 두 가지 방법을 이용하여 넓이를 구한 예

나. 복합적인 방법의 편리함

학생들은 두 가지 이상의 방법을 활용하여 넓이를 구하는 경우, 구하는 도형의 종류나 계산 측면에서 편리하다고 생각하였다. <에피소드 5>는 마지막 수업에서 넓이를 구한 여러 방법을 비교하는 교사의 질문에 복합적인 방법이 편리하다고 답하는 장면이다.

<u><에피소드 5> 뭐가 가장 좋은 것 같아요?</u>

T : 자 지금까지 35평의 넓이를 구한 방법을 발표했는데... 이 중 뭐가 가장 좋은 것 같습니까?



학생들 : (웅성웅성) 8조!! 4조~

T : 어. 소희

S1 : 저는 준희[8조]가 발표한 방법이 좋다고 생각합니다. 도형의 개수가 적어 좋은 것 같습니다.

T : 구하는 도형의 수가 적어서 좋다!! 좋아요. 또? 또 말해봐. 응..

S2 : 저는 4조 것이 좋다고 생각합니다. 1조랑 8조가 발표한 것은 사다리꼴이 있어서 구하기 귀찮고.. 2조는 구하는 도형이 어.. (도형의 수를 잠시 세다가) 많아서 귀찮습니다. 그런데 4조 것은 사다리꼴도 없고 도형의 수도 2조 것보다 적습니다.

T : 다른 생각? 없어요?

S3 : 저도 4조 방법이 좋다고 생각합니다. 7조 방법은 숫자가 커지니까 곱하기하기가 불편한데 4조는 7조보다는 숫자가 작기 때문입니다.

위의 에피소드에서 나타난 것처럼 정리 단계에서 해결 방법을 비교하는 교사의 질문은 불편하다고 생각하는 조건을 제외하게 하여, 학생들에게 도형의 넓이를 구하기 위해 좀 더 편리한 방법을 생각하게 할 수 있었다. 그 결과 학생들은 도형에 따라 편리한 방법이 있기는 하지만, 도형이 복잡할수록 두 가지 이상의 보존 방법을 혼합하여 구하는 것이 편리하다는 것을 알게 되었다.

V. 결 론

본 연구의 목적은 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 다양한 해결 방법을 강조하는 평면도형의 넓이 구하기 수업에서 나타난 해결 과정과 방법을 분석함으로써 평면도형의 넓이 구하기 교수·학습에 대한 시사점을 얻는 것이다. 본 연구를 통해 얻은 시사점을 논의해 보면 다음과 같다.

첫째, 학생들에게 다양한 방법으로 넓이를 구해볼 수 있는 기회를 제공하는 것이 중요하다. 본 연구에서 학생들은 특정한 과정이 제시되지 않은 상태에서 이미 배운 지식을 바탕으로 다양한 방법으로 넓이를 구하고 이 과정을 수학적으로 타당하게 설명할 수 있었다. 이것은 상당수의 학생들이 공식 활용 면에서도 부적합한 수치를 넣고 넓이 문제를 기계적으로 해결하는 경향(박혜경, 김영희, 전평국, 2006)에 대한 대안적인 방법이 될 수 있다. 물론 다양한 방법으로 넓이를 구하는 과정에서 학생들은 어려움을 겪기도 하고, 수학적으로 무의미한 해결 방법을 제시하기도 하였다. 그러나 그러한 경험 가운데 학생들은 넓이의 개념 및 넓이를 구하는 과정을 바르게 이해하고 좀 더 수학적이고 세련된 형태로 다듬어 나갈 수 있었다.

둘째, 넓이 구하기 지도는 직접 조작해 보는 활동을 통해 이루어져야 한다. 직접 조작하여 평면도형의 넓이 구하는 것은 다각형에 대한 탐구를 종합화하고 시각에 의하여 정돈하는 기회를 제공한다(이경화, 2001; NCTM, 2000). 그러나 현행 수업에서는 많은 학생들이 이러한 경험 없이 단순히 넓이를 구하기 위해 길이를 곱하는 것을 배우고 있다(김주봉, 2000). 이에

반해 본 연구에서 직접 도형 조각을 잘라보고, 접어보고, 돌려보고, 보조선을 여러 방향으로 그어 보는 등과 같은 분할, 변형 제거의 과정은 처음 주어진 도형과 바뀐 도형과의 관계를 찾아 넓이를 구하는 데 도움이 되었다. 또한 이러한 조작 활동은 학생들이 흥미를 가지고 수업에 임할 수 있게 하는 것으로 관찰되기도 하였다.

셋째, 학생들에게 공식이 무엇인가에 관한 충분한 지도가 이루어져야 한다. 초등학교 교육과정에서 공식의 등장은 그리 많지 않다. 본 연구의 초기 수업 과정 중 학생들이 흔히 겪은 어려움 중 하나는 공식을 바르게 정리하지 못하는 것이었다. 대다수의 학생들이 사다리꼴의 넓이 구하는 공식에 가로, 세로, 밑변 등과 같은 용어를 사용하여 넓이 공식을 정리하였으며, 일부 학생들은 복합도형의 넓이 구하기에서도 공식을 만들려고 시도하였다. 이것은 공식이 무엇인지 바르게 이해하지 못한 것에서 나온 결과라 생각된다. 따라서 공식을 유도하는 과정 이전에 처음 주어진 도형의 변의 길이와 관련시켜 공식을 정리해야 일반화가 가능함을 학생들에게 이해시킬 필요가 있다.

넷째, 의미 있는 평면도형의 넓이 지도를 위해서는 학생들의 참여와 사고를 이끄는 교사의 역할이 중요하다. 본 연구에서 교사는 수학 문제를 해결하는 방법이 다양함을 강조하고, 그 방법을 서로 비교, 분석하는 과정을 중시하였다. 개별적으로 해결한 방법을 소집단과 대집단에서 "이 방법에 대해 이야기 해봅시다.", "어떻게 생각하나요?"와 같은 질문을 통하여 해결 방법을 비교, 분석하는 과정은 학생들의 높은 수학적 사고를 이끌 수 있다(Wood, Williams & Mcneal, 2006). 또한 이러한 과정은 넓이 구하기 전략을 서로 공유하고 수정할 수 있는 기회를 제공하여, 실제 수업에서 개개인이 해결한 방법 중 불편하다고 여겨져 다음 문제 해결 방법에서 나타나지 않거나 좋은 방법이라 평가되어 다음 문제 해결에 모방되는 결과를 가져오기도 하였다.

마지막으로 본 연구에서 학생들은 다양한 방법으로 평면도형의 넓이를 구할 수 있었다. 그러나 이러한 다양성의 추구는 때때로 수학적 효율성 또는 간편성 등을 고려하지 못하는 결과를 가져오기도 하였다. 강조하건대, 수학적으로 다양한 해결방법을 찾는 것은 다양한 수학적 사고를 가능하게 하여 바람직한 수학 교실 문화를 형성하는 데 기여할 수 있다. 하지만 단지 수학적으로 다양한 풀이를 경험하는 것 자체로는 충분치 않을 수 있다(Wood 외, 2006; Yackel & Cobb, 1996). 그러한 다양성은 "수학적으로 의미 있는" 다양성이어야 하고, 그 의미는 수학적 효율성이나 간편성 등을 고려한 것이어야 할 것이다. 따라서 교사는 학생들이 다양한 해결 방법을 경험하면서 무엇이 수학적으로 가치 있고 효율적인가와 관련된 바람직한 사회수학적 규범 형성에 관심을 가져야 한다(Yackel & Cobb, 1996).

참고문헌

교육부(1998). **초등학교 교육과정 해설(Ⅳ): 수학, 과학, 실과**. 서울: 대한교과서주식회사.

구광조 · 라병소(1997). 초등학교에서의 도형의 넓이 지도. **수학 및 통계연구, 21**, 41-57.

김주봉(2000). 도형의 분할과 지도 방안에 관한 연구. **청주교육대학교 과학과 수학교육 논문집, 21**, 1-18.

박혜경 · 김영희 · 전평국(2006). 초등학교 5학년 학생들의 넓이 측정과 관련된 지식 상태의

분석. **한국수학교육학회 <전국수학교육연구대회 프로시딩>, 79-90.**

방정숙 · 김상화 · 박금란(2006). **초등교사의 수학과 교수법적 내용 지식 정립을 위한 교수 · 학습 자료 개발. 2005년도 교과공동연구 결과보고서.** (과제번호: KRF-2005-030-B00045).

배춘석(2002). **구체적 조작 자료를 활용한 복합도형의 넓이 지도 방안.** 인천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

송미정(2004). **수학학습의 측정 영역에 대한 초등학생의 학업성취도 분석.** 진주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

안선영 · 방정숙(2006). 평면도형의 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용지식과 수업 실제 분석. **수학교육학연구, 16**(1). 25-41.

이선영(2006). **초등학생의 평면도형 넓이 공식 구성 활동 분석.** 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

이경화(2001). 활동과 직관을 강조한 측정 지도. **청주교육대학교 과학과 수학교육 논문집, 22,** 99-118.

장미라(2003). **측정 감각 발달을 위한 학습 자료 개발 연구.** 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

장영은(2003). **도형과 관련된 문제해결 과정에서 초등학생의 오류 유형과 원인 분석 연구.** 전주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

정동권(2001). 평면도형의 넓이 지도를 통한 수학적 사고의 신장. **인천교육대학교 과학교육논총, 13**(13), 1-36.

정필원(2005). **초등학교 평면도형의 넓이 지도에서 퀴즈네르 막대의 활용에 관한 연구.** 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power; An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 권성룡 외 11인 공역 (2005). **수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게?** 서울: 경문사.

Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 122-142). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Grant, T. J,. & Kline, K. (2003). Developing the building blocks of measurement with young children. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 46-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick. W. G. Martin,, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics.* (pp. 179-192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principle and standards for school mathmatics.* Reston, VA: The Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역 (2007). **학교수학을 위한 원리와 규준.** 서울: 경문사.

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements

& G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 3-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindquist, M. M., &Smith, N. L.(1998). *Helping children learn mathematics* (5th ed). Boston: Allyn & Bacon. 강문봉 외 19인 공역(1998). **초등 수학 학습지도의 이해**. 서울: 양서원.

Wood, T., Williams, G., & McNeal B. (2006). Children's mathematics thinking in different classroom cultures. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(3), 222-225.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

An Analysis of Fifth Graders' Solution Methods in Finding the Area of Plane Figure

Yu, Yeon Ja (Jeonju Dae-jeong Elementary School)
Pang, Jeong Suk (Korea National University of Education)

The purpose of this study was to provide teachers with suggestions on how to teach the unit of finding the area of plane figure by analyzing students' different solution methods. The solution methods were analyzed according to how the original area of the given figure was kept: partition, transformation, and elimination.

The partition method was most used. With regard to transformation, students seemed to find it easy to use the area of rectangle. With regard to elimination, students were successful using elimination to find the area of a given figure but had difficulty in producing a formula from the method.

The teacher played a key role to encourage students to employ different solution methods, and gave them opportunities to compare and contrast various methods. A cautionary note is that, with too much emphasis on 'variety', the mathematical efficiency may be lost in the process. It suggests that a teacher should be careful to establish appropriate sociomathe- matical norms with students in order that they can make their own judgment on which solution method is mathematically worth and efficient.

* key words : the area of plane figure (평면도형의 넓이), students' solution methods (학생들의 해결방법), teacher's role (교사 역할)

논문접수 : 2008. 7. 31
논문수정 : 2008. 8. 29
심사완료 : 2008. 9. 6