대한수학교육학회지 <학교수학> 제 10 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.10, No.3, 375-399. Sep. 2008

정적분의 무한소 해석에 대한 고찰

정 연 준* · 강 현 영**

무한소는 현재 정적분 개념과 관련하여 교과서에서는 직접적인 역할을 하지 않고 있다. 그러나 정적분 개념에 대한 학생들의 이해를 조사한 선행 연구들을 보면 많은 학생들이 무한소를 이용하여 정적분을 이해하고 있다는 것을 보여주고 있다. 가르치지 않았음에도 불구하고 학생들이 무한소를 이용하여 정적분을 해석한다는 것은 정적분 자체 내에 무한소 해석을 촉진하는 구조적 요소가 있다고 가정할 수 있다.

이에 따라 본 논문에서는 정적분의 분할—합 과정에 대한 역사적 발달과정에서 무한소의 역할을 고찰하고, 그것을 바탕으로 하여 교수학적 시사점을 살펴보고자 한다. 그리고 이를 토대로 하여 우리나라 교과서 적분법 단원이 어떻게 무한소 해석을 유도하는지 그리고 학생들의 이해 방식은 어떠한지 살펴보았다. 그리고 이상의 논의를 종합하여 직관의 정련화 과정으로서 정적분의 교수-학습과 관련하여 시사점을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

무한소는 현재 정적분을 비롯하여 미적분 학습과 관련하여 교과서 상에서 거의 아무런 역할을 하지 못하고 있다. 일반적으로 학교수학의 적분법 단원에서 무한소나 불가분량에 대한 언급이나 설명은 거의 발견되지 않는다. 교과서에서 관련된 언급이 있더라도 미적분의 역사를 설명하는 과정 중에 잠깐 언급되는 정도에 불과하며, 그것도 본문과는 독립되어 제시되고 있다. 그러한 내용을 지나치더라도 본문의 내용을 파악하는데 아무런 지장이 없다. 무한소에 내재한 개념적 혹은 논리적 문제를 감안한다면 현재의 상황을 이해할 수 있다. 무한소가 미적분의 역사적 발달과정에서 중요한 역할을 했다고 하더라도, 문제가 있는 소재를 교과서에 포함시키는 것은 학생들에게 혼란을 일으킬 여지를 주는 것이기 때문이다. 그러나 이러한 공식적인 교육과정과는 별개로, 우리나라를 비롯하여 미국, 영국 등 세계 여러 나라 학생들의 정적분 이해를 분석한 연구 결과들을 보면, 많은 학생들이 무한소를 이용하여 정적분을 생각하고 있다는 것이 일관되게 확인되고 있다 (김현정 1990; 전미영, 2003; 허학도, 2006; Bezuidenhout & Olivier, 2000; Czarnocha et al, 2001a, 2001b; Foley, 1992; Oberg, 2000 등). 예를 들어 $\pi\int_a^b ((f(x))^2 dx$이 부피의 정확한 값이 되는 이유를 묻는 질문에 대하여 많은 학생들이 부피는 모든 단면의 합이기 때문이라고 대답하거나, x 축 위의 각각의 점에서 원기둥의

---

* 서울대 대학원(swamp_monk@lycos.co.kr)
** 성균관대학교 강사(sunrayk@dreamwiz.com)

단면은 $\pi((f(x))^2$이고 원기둥의 두께는 dx이며 이들의 부피를 모두 더하면 정확한 부피가 된다고 대답하고 있다.

여러 가지 선행 연구 결과에 따르면, 많은 학생들이 교과서에서 제시하지 않은 방식으로 생각하는, 즉 정적분을 이해하는데 무한소를 이용하여 해석하고 있다는 것은 생각해 볼 여지가 있는 현상이다. 가르치지 않았음에도 불구하고 학생들이 무한소를 이용하여 정적분을 해석한다는 것은 정적분 자체 내에 무한소 해석을 촉진하는 구조적 요소가 있다고 가정할 수 있다. 이러한 현상이 왜 일어나는지, 그리고 이러한 현상의 교육적 의미는 무엇인가에 대한 고찰은 정적분에 대한 교수-학습과 관련하여 의미 있는 시사점을 제공할 수 있으리라 생각된다. 지금까지 대부분의 선행 연구에서는 학생들이 무한소를 이용하는 모습만을 보여주었다. Czarnocha et al(2001a)은 학생들의 정적분을 이해하는 방식을 분류하면서, 극한에 대한 이해 방식이 정적분 이해에 영향을 줄 수 있다는 점에 주목하였다. 특히 극한의 도달 가능성에 대한 집착과 무한소 해석의 관련성에 주목하였는데, 극한에 대한 지도를 강화하여 극한에 대한 도달 가능성에 집착하지 않게 하는 것을 정적분의 무한소 해석에 대한 해법으로 제시하였다. 이러한 방법도 한 가지 가능한 방법이 될 수 있겠지만 논의 대상이 대학생이라는 점을 감안하면, 이러한 이들의 해법을 학교수학에 그대로 도입하는 것에는 무리가 있을 수 있다. 또한 정적분 개념의 이해에서 무한소의 역할 등에 대한 분석을 적극적으로 시도하지 않고 있다고 할 수 있다.

이에 따라 본 논문에서는 정적분의 역사적 발달과정에서 무한소의 역할과 기여를 살펴보고자 한다. Toeplitz(1963), Eves(1995) 등 많은 미적분의 역사 연구에서 무한소에 대한 논의는 Archimedes와 Cavalieri에 한정되어 있었다. 이와 달리 Boyer(1949)는 정적분의 역사적 발달과정을 극한 과정과 관련하여 기술하였다. 정적분의 분할—합 과정과 무한소 사이의 관계를 명시적으로 드러내지는 않았지만 Boyer(1949)는 정적분의 무한소 해석 현상을 이해하는데 중요한 단서를 제공하리라 생각된다. 따라서 Boyer(1949)의 논의를 바탕으로 하여 정적분의 분할—합 과정에 대한 역사적 발달과정에서 무한소의 역할을 고찰하고, 그것을 바탕으로 하여 교수학적 시사점을 고찰하고자 한다. 그리고 이를 토대로 하여 우리나라 교과서 적분법 단원이 어떻게 무한소 해석을 유도하는지 그리고 학생들의 이해 방식은 어떠한지 살펴보도록 한다. 그리고 이상의 논의를 종합하여 정적분의 교수-학습과 관련하여 시사점을 제안하도록 한다.

Ⅱ. 정적분의 분할—합 과정과 무한소의 역사적 발달과정

변수가 극한에 접근할 때 변수가 극한에 도달하는지 여부에 대한 문제는 극한 개념의 형성에서 핵심적인 문제였다(박선화, 1998, p.49; Grabiner, 2005, pp.81-87; Williams, 1989, pp.5-6). 역사적으로 극한 상황의 도달가능성에 대한 관심은 처음부터 극한을 이해하려는 시도와 얽혀 있는데, 불가분량이나 무한소는 그러한 시도와 맞물려 발달하였다. 그러나 무한소가 가지고 있는 문제는 극한을 이해하는데 있어서 한계가 있었다. 형식적인 극한의 기반에는 도달 가능성 대신 근접성 개념이 자리 잡고 있다(Williams, 1989, p.6). 극한에 대한 형식적 정의는 절대값과 부등식, 보편 양화를 이용하여 '근접' 개념을 형식화함으로써 극한의 도달가능성에 대한 관심을 폐기하여 이러한 문제를 극복하였다. 수

와 수들 사이의 관계를 바탕으로 하여 극한 과정을 다룰 수 있게 되면서 극한 상태에 도달하는지 여부를 전혀 고려하지 않았고, 따라서 무한소를 이용하지 않고 극한 과정을 다룰 수 있게 되었다. 정적분 개념의 역사적 발달 과정에서도 이러한 모습이 그대로 확인된다.

1. 정적분의 분할—합 과정과 무한소 발견 (고대 그리스)

고대 그리스인들은 이미 기원전 5세기 후반 무렵 곡선 도형의 넓이 계산에 무한 과정이 포함되어 있다는 것을 발견하였다. 이들은 이 무한 과정을 다루기 위하여 독특한 분할—합 과정을 고안하였다. 비슷한 시기에 이들은 불가분량 아이디어를 고안하여 넓이와 부피 계산 문제를 다루었다. 기원전 5세기 후반에 활동을 한 Democritus에 의해서 불가분량 아이디어가 최초로 등장하였는데, 이는 물리적인 원자론을 기하학에 적용한 결과이다(Boyer, 1949, pp.21-22). Democritus는 불가분량 아이디어를 이용하여 원뿔의 부피가 원기둥의 부피의 삼분의 일이 된다는 것을 보였다. 그러나 불가분량 아이디어는 Zeno의 공격을 받고 공식적인 수학의 영역에서 제거되었다. Aristotle은 실무한과 잠재적 무한을 구분하고 잠재적 무한만을 합법적인 논의의 대상으로 한정함으로써 Zeno의 역설을 피할 수 있도록 하였다. 실무한이 배제되면서 그와 함께 불가분량도 배제되었다. 다소 시간이 흐른 후 고대 그리스인들은 고대 그리스식 적분(Boyer, 1991, p.146)이라 할 수 있는 소진법(the method of exhaustion)을 고안하였다. Eudoxus(기원전 약 408~347)는, 현재의 Archimedes 공리에 해당하는, 두 양이 주어졌을 때 어느 한 쪽을 정수배하여 다른 쪽 보다 크게 할 수 있다는 공리를 이용하여 넓이 계산에 나타나는 무한 과정을 다루는 방법을 고안하였다. 이 공리로부터 소진법의 토대가 되는 정리, Euclid 원론 10권의 첫 번째 정리가 유도된다.

> 서로 같지 않은 두 양이 있다고 하자. 큰 것에서 반보다 크게 덜어내고, 남은 양에서 또 반보다 크게 덜어낸다고 하자. 이러한 과정을 계속 반복하다 보면 남은 양이 처음의 작은 양보다 작게 된다.(Heath, 1956, p.14)

소진법의 일반적인 절차는 미지의 양에 대한 상한과 하한을 설정하고 이를 체계적으로 개선하는 방법을 제시하는 것으로 이루어져 있다(Jesseph, 1989, pp.220-221). 소진법을 곡선 도형의 넓이 계산에 사용할 경우, 내접하는 도형과 외접하는 도형의 형태로 한계값이 주어진다. 여기에서 이들 양을 체계적으로 개선하는 방법은 미지의 양과의 차이가 반 이상 줄어들게 하는 것이다. 이러한 과정이 반복된다면 위의 정리에 의해서 알아야 하는 양과의 차이가 임의의 주어진 양보다 작은 양들을 만들 수 있게 된다. 이는 상합과 하합을 이용하는 현대의 적분과 매우 유사하다.

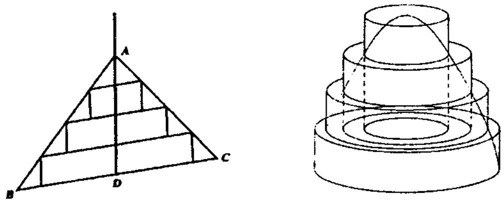
논리적으로 엄밀한 방법을 고안하는데 성공하였지만 고대 그리스인들은 여전히 불가분량을 사용하였다. 그들이 사용한 고전적인 소진법은 이중귀류법을 이용한 방법으로 "발견을 위한 분석적 수단이 아니라 종합적인 설명 방식"이며 따라서 "수렴하는 값을 결정하는 방법이 내부에 포함되어 있지 않다(Boyer, 1949, p.36)." 주어진 곡선 영역의 넓이를 계산하는 별도의 방법이 필요하다. 임의적인 추측을 제기하고 소진법을 이용하여 그 답을 점검하는 것은 사실상 불가능하다. 이러한 상황에서 불가분량은 소진법을 적용하여 구하고자 하는 곡선 영역의 넓이를 계산하는 별도의 방법을 제공하였다. 소진법은 그렇게 발견된 결과를 검

증하는 역할을 하였다. Archimedes는 이질적인 두 가지 방법, 불가분량과 소진법을 결합하여 2000년 가까운 시간 동안 그 누구도 쫓아갈 수 없는 성과를 이루었다.

2. 정적분의 분할—합 과정과 무한소의 결합 (17세기)

Archimedes가 완성한 고전적인 소진법은 17세기가 되면서 전환점을 맞이하게 된다. 소진법을 적용하는 과정에서 그리스 수학자들은 차이를 원하는 만큼 줄일 수 있다는 것을 명확하게 인식했지만, 17세기 수학자들처럼, 이 과정이 문자 그대로 무한 단계 동안 실행되어 완료된다고 생각하지 않았다(Boyer, 1949, p.34). 곧 철저하게 잠재적 무한의 관점에서 넓이 계산에 나타나는 무한 과정을 다룬 것이다. 중세 스콜라 철학의 영향에 의해 무한에 대한 긍정적 관점이 확립되면서 고전적 소진법에 큰 변화가 오게 된다. 17세기 수학자들은 실무한과 무한소에 대하여 달라진 관점을 Archimedes의 방법과 조화시키려 하였다(Boyer, 1949, pp.96-97). 고전적인 소진법에서는 계산하고자 하는 양과 수렴하는 양 사이의 유한한 차이만 언급되며, 미지의 양을 소진시키는 절차 역시 유한한 단계로 이루어져 있다. 17세기 수학자들은 미지의 양을 소진시키는 과정이 문자 그대로 무한 단계 동안 실행되어 완료되며 그러한 무한 과정의 결과를 무한소를 이용하여 설명하는 관점을 발전시켜 나갔다. 이를 통해서 정적분의 분할—합 과정과 무한소가 결합되는데, 여기에는 정적분의 분할—합 과정상에 중대한 변화가 동반되었다.

고전적인 소진법은 내접 다각형과 주어진 도형의 차이가 절반 이상씩 줄어들도록 해야 하는데, 17세기 수학자들은 축을 등분할하고 분할의 수를 무한히 늘여서 차이가 무한히 작아지게 하는 방법을 점진적으로 발달시켰다. 이와 같은 최초의 수정이 Stevin(1548~1620)에게서 발견되며, Valerio(1552-1618)는 이러한 방법을 볼록 곡선과 입체의 부피 계산으로까지 확장하였다(Boyer, 1949, pp.100-101; pp.104-106). 특히 Valeirio는 축을 등분할하여 만든 외접하는 도형과 내접하는 도형의 차이가 가장 큰 평행사변형 혹은 원기둥과 같고, 분할의 수를 크게 하여 그 차이를 무한히 작게할 수 있다는 것을 명확하게 지적하였다. Valerio의 연구는 17세기 수학자들에게 크게 영향을 주었다(Baron, 2003, p.106).

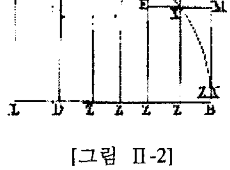


[그림 Ⅱ-1]

성(聖)-Vincent의 Gregory(1584~1667)는 한 걸음 더 나아가 소진법 과정을 실제로 무한히 분할하는 것으로 간주하였다(Boyer, 1949, pp.135-137). Valerio의 영향을 받은 그 역시 소진법 과정에 평행 사변형을 사용하였다. 그러나 그는 연속체의 본질과 무한 분할의 결과에 대한 스콜라 철학의 논의를 통해서, Stevin과 Valerio와 달리 오차가 어떠한 작은 양보다 작게 되도록 분할하는 것에서 멈추지 않고, 소진법의 과정을 무한히 분할하는 것을 뜻한다고 해석하였다. 그는 유한한 크기의 평행 사변형과 내접하는 n 다각형 대신 폭이 무한히 작은 평행사변형과 변이 무한히 많은 내접 다각형을 사용했다. Gregory는 무한히 작은 평행사변형을 이용하여 만든 내접 다각형에 의해서 도형 내부를 말 그대로 완전히 소진시켰다. 그는 3차원 도형에 매우 가는 평행육면체들을 내접시킨 후 이 평

행 육면체들을 그들이 내접한 도형을 다 소진하도록 수를 늘릴 수 있다고 하였다. 이것은 소진법이라는 것을 말 그대로 도형의 내부를 소진시키는 것으로 간주한 최초의 사례이다.[1] Gregory는 평면 도형이 무한히 많은 '가는' 사변형으로 이루어져 있다고 생각하였다.

Gregory의 접근법은 변하는 등분할을 이용함으로써 정적분에 내재한 극한 과정을 체계화하였다는 점에서 극한에 기반한 정적분 개념에 근접한 것이라 할 수 있다(Boyer, 1949, p.138). 그런데 Gregory는 이 과정을 기하학적으로 다루면서 극한 과정의 결과를 무한소를 이용하여 받아들였다. 이는 적분 개념의 역사적 발달과정에서 중대한 계기라 할 수 있다. 정적분의 합 과정을 무한소를 이용하여 해석하는 모습은, Newton과 Leibniz에 앞서 적분의 토대를 닦은 Roberval, Pascal, Wallis, Barrow 등 17세기의 여러 수학자들에게서 쉽게 찾을 수 있다. 예를 들어 고전적인 기하학의 전통을 상대적으로 강하게 고수하였던 Barrow 역시 무한소를 정적분의 극한 과정과 결합하여 다루었다(Malet, 1996, pp.49-50). 그 역시 주어진 축을 등분할하여 나온 직사각형들을 이용하여 내접 다각형과 외접 다각형을 이용하였다[그림 Ⅱ-2].



[그림 Ⅱ-2]

내접 다각형과 외접 다각형의 차이는 맨 왼쪽에 있는 직사각형 *ADZR*에 해당한다. 이때 무한등분을 할 경우, 밑변 *DZ*가 무한히 작게 되기 때문에 직사각형 *ADZR*의 넓이는 임의의 유한한 크기 *ADLK*보다 작게 된다. Barrow는 이러한 추론을 바탕으로 하여 내접 다각형과 외접 다각형이 주어진 곡선 영역에 수렴한다는 것을 설명하였다. Roberval, Wallis는 산술적인 방식을 도입하여 분할 과정에서 나타나는 평행사변형 혹은 직사각형들의 넓이를 계산하였다.[2]

정적분의 분할—합 과정과 연결되지 않은 고전적인 불가분량 아이디어가 17세기 적분 개념의 발달에 중요한 역할을 한 것은 분명한 사실이다. 불가분량 아이디어는, Kepler에서 명확하게 나타난 바 있지만, Cavalieri와 Torricelli를 거치면서 크게 발전한다. 이들의 연구는 다른 연구자들에게 널리 알려져 불가분량이라는 수학의 미지의 영역을 개척하도록 당시 수학자들을 고무하였다. 특히 다항함수 $y=x^n$의 정적분 계산 결과에 해당하는 Cavalieri의 연구 결과는 구적법에 일반적인 해법이 존재한다는 것을 강하게 암시하여 당대의 수학자들로 하여금 이에 대한 연구를 하도록 크게 자극하였다(Muntersbjorn, 2000, pp.237-238). 그러나 Cavalieri의 고전적인 불가분량 아이디어는 바로 변형된다. Cavalieri의 연구는 Torricelli를 통해서 서유럽의 수학자에게 전파되었는데, 이러한 전파 과정에서 불가분량이 변형되었고, 다른 수학자들이 Cavalileri로의 불가분량으로 이해한 것은 Torricelli에 의해 변형된 것이다

1) "소진(exhaustion)"이라는 용어는 Eudoxus가 고안한 방법을 설명하기 위해 Gregory가 최초로 도입하였다(Baron, 2003, p.34).

2) Roberval의 방법은 Baron(2003, pp.154-156), Walker(1932, pp.35-38)에 Boyer의 설명보다 구체적으로 제시되어 있고, Wallis의 방법은 Maanen(2003, pp.66-67)에서 구체적으로 제시되어 있다. Boyer(1949, p.169)는 Wallis와 Roberval의 아이디어가 비슷하지만, Wallis에게서 극한 아이디어가 보다 뚜렷하게 드러난 것으로 본다.

(Andersen 1985, pp.356-357; Malet, 1996, pp.12-50). Cavalieri는 모든 선이나 모든 면들이 Euclid 원론에 규정된 양에 부합되도록 고심하였다. 그래서 그는 모든 선들이나 모든 면들이 평면 도형이나 입체 도형과 같다고 주장하지 않았다. 다만 비의 관계가 유지된다고 주장하였을 뿐이었다. Torricelli는 이를 단순화하여 평면도형이 선들의 합과, 입체 도형이 면들의 합과 같다고 놓았다. Cavalieri의 불가분량은 주어진 기하학적 대상보다 한 차원 낮은 것이었다. 선의 불가분량은 점이고, 평면 도형의 불가분량은 선분이고, 입체의 불가분량은 단면이다. Cavalieri의 불가분량은 두께를 지니고 있지 않다. 이에 비하여 Torricelli의 불가분량은 두께를 지니고 있고, 주어진 도형보다 한 차원 아래의 것이 아니라, 주어진 도형의 무한히 작은 부분이다.[3] 선분은 한 변이 무한히 작은 직사각형 혹은 평행사변형이고, 입체의 단면은 두께가 한없이 작은 기둥이다. Pascal, Wallis 등 불가분량을 지지하였던 수학자들이 다루었던 불가분량은 Torricelli의 불가분량, 곧 무한소에 해당한다. Torricelli는 자신의 이러한 방식을 Cavalieri의 것으로 돌렸고 후대의 수학자들을 이러한 의견을 그대로 받아들였다. 17세기 서유럽의 수학자들이 고려하였던 불가분량은, 앞에서 논의한 바 있는, 적분의 분할—합 과정과 연결된 무한소였다. 무한소를 지지하는 수학자들은 무한소가 기하학적 대상을 무한 분할하여 나온 것이지만 기존의 도형의 성질을 가지고 있다고 믿었다. 이러한 관점에 입각하여 17세기 중반 이후 많은 수학자들이 무한소를 포함한 증명과 고전적인 소진법에 따른 증명이 실질적으로 동일하다고 주장하였다(Malet, 1996, p.75). Pascal이 이러한 주장을 제일 먼저 하였다(Malet, 1997, p.73). Pascal은 불가분량을 무한소로 이해한다면 불가분량 방법에 어떠한 어려움도 포함되어 있지 않다고 주장하였다. 이러한 무한소는 한 차원 아래의 불가분량으로 이해되어서는 안 된다. Wallis는 다음과 같이 주장하였다.

> [불가분량] 방법에 따르면, 선은 무한히 많은 점으로 이루어진 것으로 간주되며, 평면은 무한히 많은 선으로, 입체는 무한히 많은 평면 혹은 면으로 이루어진 것으로 간주된다. … 이제 (폭이 없는) 선이 면을 채울 수 있는 것으로, (두께가 없는) 면이나 평면이 입체를 완성할 수 있는 것으로 이해되어서는 안 된다. 그러한 선들은 (폭이 매우 좁은) 작은 면으로 이해되어야 한다.(Malet, 1996, pp.23-24에서 재인용)

Newton과 Leibniz는 이러한 무한소 아이디어를 토대로 하여 미적분을 고안하였다. 이들은 무한소를 이용하여 미적분을 확립하였지만 무한소의 문제점을 잘 알고 있었다. 이들은 Pascal, Wallis 등 이전의 수학자에 비해서 무한소와 관련하여 보다 유보적인 태도를 보이기도 하였다. 그러나 전체적으로 이러한 태도를 일관되게 확립하지는 못하였다. Leibniz는 명확하게 정적분을 무한소의 합으로 정의하는 등 무한소 아이디어를 활발하게 사용하였다. 그러나 미적분의 토대를 설명하는 가운데 Leibniz는 미적분에 정말 무한소에 대한 고려가 필요하다는 것을 부정하고, '원하는 대로 작게 할 수 있는 유한하지만 "무시할 수 있는" 오차가 나오게 하는 절차'가 미적분의 토대가 될 수 있다고 주장한 바 있다(Jesseph, 1998, p.30). 즉 무한소를 극한 과정과 관련지은 것이다. Newton은 보다 명확하게 극한 개념을 도입하여 미적분 개념을 설명하였다. Newton은 무한소를 사

3) Malet(1996, p.19)는 이러한 성질을 지닌 것을 불가분량과 구분하여 무한소라고 불렀다. 여기에서는 Malet의 용어를 따르겠다.

용하여 미적분을 확립하였지만 곧 무한소 대신 비의 극한 아이디어를 통해서 자신의 유율법을 정립하고자 하였다.[4] 그러나 Newton 역시, 무한소에 암시되어 있는 것과 같은, 극한 상태의 도달 가능성 문제를 완전히 극복하지 못하였다. Newton의 유율 개념을, 일관되게 비의 극한으로 설명하지 못하고, 유율을 궁극적인 비로 설명하기도 하였다(Boyer, 1949, p.195). 그러나 본질적으로 Newton의 시도는 극한을 운동에 대한 직관에 호소하여 설명하고자 하였기 때문에 그 둘의 차이를 명확하게 드러내기 어려웠다(Sherry, 1982, p.162). 극한 상황에서는 운동학적 직관 혹은 기하학적 직관의 대상들이 사라지기 때문에, 운동학적 직관 혹은 기하적 직관으로만 극한을 설명하는데 한계가 있었다.[5]

3. 형식화된 극한에 기반한 정적분 확립

Newton의 극한 관념은 18세기 이후 극한에 대한 인식의 원천이 되었고, 1810년까지 극한 개념의 역사는 Newton의 극한 관념에 내재한 문제를 극복하는 시기에 해당한다(Grabiner, 2005, pp.81-87). 18세기를 거치면서 Newton의 극한 관념에 내재하였던 운동학적 표현은 대수적 언어로 대체되었고, 극한 주위를 진동하는 변량을 포함하도록 극한 개념이 확장되었고, 변량이 극한에 도달하는지에 대해 관심을 포기함으로써 형식적인 극한 개념의 단초가 마련되었다. 이러한 변화를 통해서 수치적인 방식으로 극한을 다룰 수 있게 되면서, 극한을 무한분할이나 사라지는 양 사이의 비와 같은 극한 과정의 결과로 볼 필요가 없게 됨으로써 무한소에 호소할 필요가 사라지게 된다(Sherry, 1982, p.166). 형식적 극한 정의는 절대값과 부등식, 보편 양화를 이용하여 '근접' 개념을 형식화하여 직관적인 극한 관념의 문제를 극복하였다(Williams, 1989, p.6).

Cauchy는 이렇게 형식화된 극한 개념을 바탕으로 하여 정적분을 정의하였다. 우선 Cauchy는 연속함수를 형식화된 극한을 바탕으로 하여 정의하고 필요한 성질들을 유도하였다. 그리고 정적분 정의와 관련하여 Cauchy는 연속함수에 대하여 정적분을 정의하면서 주어진 구간을 n개의 부분 $x_1-x_0, x_2-x_1, \cdots, X-x_{n-1}$으로 나누어서 만든 합

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

가, 분할이 커질 때, 보이는 행동의 변화를 설명하였다(Grabiner, 2005, p.146). Cauchy는 S의 값이 명확하게 n과 구간의 분할 방식에 의존하지만, $f(x)$의 연속성(현대적 의미로는 평등

4) Boyer는 이러한 변화 과정을 다음과 같이 설명한다. "Newton이 처음에 유한하지도 않고 정확하게 0도 아닌 무한히 작은 양들을 마음 속에 가지고 있었다는 것을 알 수 있다. 다음 세기에 그 방법을 놓고 비평가들은 그것들을 '사라진 양들의 유령'이라고 불렀다. ... 그 이후 Newton은 일반적으로 유한한 수의 비에 대하여 관심을 기울였다. 이 비를 알면, 그것을 이루는 무한소 양 대신에 방정식에 나오는 양의 속도 또는 유율로 생각할 수 있는 양과 같이, 같은 비를 갖게 되어 쉽게 생각할 수 있는 다른 유한한 양들로 대체할 수 있다."(Boyer, 1949, p.200)

5) Principia에서 제시한 Newton의 유율에 대한 다음과 같은 설명에서 이점이 잘 드러난다. "사라지는 양들 사이에 궁극적인 비가 없다는 반론이 제기될 수도 있다. 왜냐하면 양이 사라지기 전의 비는 궁극적이지 않고, 양이 사라지면 아무 것도 아니기 때문이다. 그러나 같은 논리로 어떤 지점에 도착해서 거기에서 운동이 끝나는 물체에 궁극적인 속도가 없다고 주장할 수 있을 것이다. 왜냐하면, 그 물체가 그 위치에 도착하기 전의 속도는 궁극적 속도가 아니고 도착했을 때는 속도가 없기 때문이다. 그러나 답은 간단하다. 궁극적 속도라는 것은 물체가 최종 위치에 도착해서 운동이 멈추기 전의 속도도 아니고 그 후의 속도도 아니며 바로 도착한 그 순간의 속도이다. 즉 그 물체가 마지막 지점에 도착할 때 즉 운동이 끝날 때의 속도이다." (Newton, 1952, p.31)

연속)을 사용하여 분할이 충분히 크면 S 값의 변동이 줄어들고 따라서 분할 방식의 중요성이 줄어들어서 S가 유일한 극한을 가진다는 것을 증명한다. "요소 $[x_k - x_{k-1}]$들의 수치적 값을 작게 하고 그들의 수를 증가하게 하면, S의 값은 궁극적으로 모든 실질적인 의도에 대하여 고정된다. 즉 다르게 말하면 궁극적으로 어떤 극한에 도달한다.(Grabiner, 2005, p.147에서 재인용)" Cauchy는 전통적인 표기를 도입하여, 정적분을 $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$로 표기하는 한편, 정적분 기호 $\int$ 와 $\int f(x)dx$가 무한소 곱의 합이 아니라 합의 극한을 나타낸다는 점을 주지시켰다.

정적분 분할—합 과정과 무한소 관념의 역사적 발달과정에 대한 이상의 논의에서 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다. 첫째, 무한소 아이디어는 등분할을 바탕으로 하는 정적분의 분할—합 과정과 긴밀하게 연결되어 있다. 등분할을 기반으로 하는 정적분의 분할—합 과정은 무한소 관점을 촉진시킨다. 등분할을 기반으로 하는 정적분의 분할—합 과정을 발달시킨 17세기의 수학자들은 무한소를 통해서 극한 과정의 결과를 해석하였다. 이에 비해 Newton과 Leibniz 이전 수학자들 중에서 가장 강력한 성과를 거두었던 Fermat는 무한소에 대하여 비판적인 입장을 보였다.[6] Fermat는 동시대의 다른 수학자들과 달리 등분할에 기반하지 않은 정적분의 분할—합 과정을 발달시켰다.[7] 구간을 다른 크기로 자르는 방법을 이용할 경우 무한 분할의 결과를 무한소를 이용하여 분석하기 힘들 것으로 생각된다. 이 점은 고대 그리스의 소진법에도 그대로 적용된다.

둘째, 형식적인 극한에 바탕을 둔 현대적 정의는 수치적 접근을 통해서 극한 상태를 가정하지 않고 정적분의 분할—합 과정을 다룰 수 있게 한다. 연속성과 연속함수에 대한 형식적인 이해를 바탕으로 하여, 기하학적 도형과 운동학적 직관에 호소하지 않고 정적분을 다룰 수 있게 되면서 무한소를 가지고 정적분을 설명할 때 나타나는 문제를 극복할 수 있게 되었다. 이 점은 정적분 등을 그래프를 이용하여 설명하고 있는 학교수학의 관행에 비추어 볼 때 특히 중요하다. 그러한 교수법이 정적분이라는 것을 전달할 수 있겠지만 정적분이 가지고 있는 수학적 의미를 적절히 전달할 수 있다고 가정할 수 없기 때문이다.

III. 고등학교 교과서의 적분법 단원 분석

우리나라의 현행 7차 교육과정에서는 정적분 지도와 관련하여 다음과 같은 학습목표를 제시하고 있다(교육부, 2001, pp.115-116).

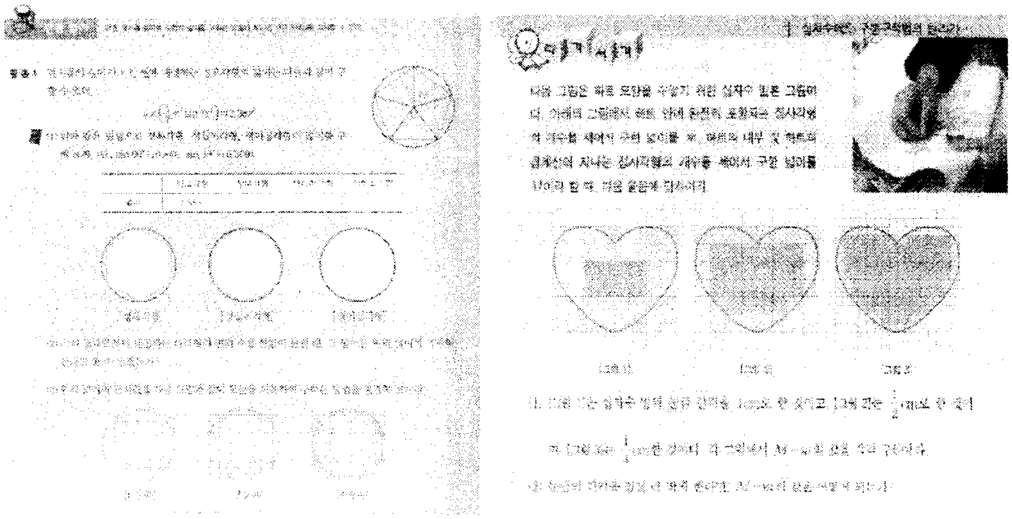
① 구분구적법을 이해하고 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다
② 정적분의 뜻을 안다; 구분구적법을 이용하여 정적분을 이해하도록 하게 한다.
③ 정적분과 부정적분의 관계를 이해한다.
④ 정적분의 기본정리를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

6) Fermat는 한 편지에서 Wallis의 무한소에 기반한 방법에 대하여 다음과 같이 평가하였다. "… 그의 모든 정리는 통상적인 Archimedes의 방식으로 증명하면 그의 책에서 보다 짧게 증명할 수 있다. 그가 대수적 기호를 사용하는 이 방법을 보다 설득력 있고 보다 우아한 예전의 방법보다 선호하였는지 알 수 없다."(Malet, 1996, p.12)

7) Fermat는 거듭제곱수의 합이 아니라 등비수열의 합을 정적분 계산에 이용하였다.

일반적으로 정적분 지도와 관련하여 직관적 지도가 강조되며[8], 곡선 영역의 넓이 계산을 통해서 정적분이 도입된다. 즉, 다음 [그림 Ⅲ-1]와 같이 곡선으로 된 도형의 넓이에 대한 무한 근사과정 혹은 근삿값의 극한을 통해서 정적분이 지도된다(우정호 외, 2002, 이강섭 외, 2002, 박규홍 외, 2002, 최용준 외, 2002, 임재훈 외 2002). 곡선으로 된 도형의 길이, 넓이, 부피를 정확하게 계산하고 정의하는 문제가 정적분의 역사적 기원이라는 점을 감안하면 자연스러운 접근 방식이라 할 수 있을 것이다.

정적분은 직접 제시되지 않고 구분구적법을 먼저 다룬 뒤, 구분구적법의 일반화로 제시된다. $y=x^2$ 등과 같은 단조인 연속함수에 대한 구분구적법 논의를 바탕으로 하여, 구체적인 설명 없이 연속함수에 대한 Riemann 합이 수렴한다는 점이 바로 제시되고 정적분이 정의된다. 구분구적법은 '어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 넓이 또는 부피를 알고 있는 기본 도형으로 주어진 도형을 세분하여 근사값을 구하고, 이 근사값의 극한값으로 그 도형의 넓이와 부피를 구하는 방법(최용준 외, 2002, p.137)'이다. 대부분의 교과서에서 공통적으로 구간 $[0,1]$ 위의 함수 $y=x^2$의 그래프와 x축 사이의 넓이 계산을 구분구적법의 예로 다룬다.



[그림 Ⅲ-1]

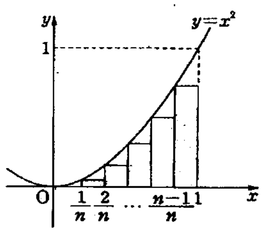
8) 교사용 지도서에서 정적분 지도의 유의점을 다음과 같이 안내하고 있다(임재훈 외, 2002, 수학 II 교사용 지도서, p.207).
① 앞에서 다룬 구분구적법을 유계인 폐구간 위에서 정의된 연속함수로 일반화하여 정적분의 정의를 직관적으로 다루게 한다. 특히, $f(x)<0$인 구간에서 정적분의 값은 음수가 되므로 이를 유의하여 정적분의 값이 도형의 넓이와 일치하지는 않음을 알게 한다.
② 일반적으로 함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

가 항상 존재한다. 이의 엄밀한 증명은 고등학교 과정을 넘으므로 이를 직관적으로 이해하게 한다.

다음 [그림 Ⅲ-2]과 같이, 주어진 구간을 n 등분으로 작도하여 만든 직사각형들의 넓이의 합으로 정적분을 설명한다.

$$S_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$
$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

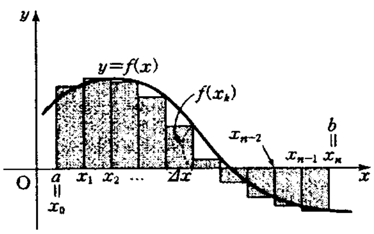


[그림 Ⅲ-2]

그 다음 'n의 값을 한없이 크게 하면, S_n은 구하는 도형의 넓이 S에 한없이 가까워지고' 따라서 $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{3}$이다. 이러한 결과를 바탕으로 하여 일반적으로 Riemann 합

$$S_n = \Delta x\cdot f(x_1)+\Delta x\cdot f(x_2)+\cdots+\Delta x\cdot f(x_{n-1})+\Delta x\cdot f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

을 제시한 후 Riemann 합의 극한이 존재한다는 점을 지적하고 그 극한으로 정적분을 정의하는 것이다.



[그림 Ⅲ-3]

이상과 같은 전개 방식이 정적분의 핵심적인 아이디어를 직관적으로 제시하기 위하여 선택한 것이지만, 이러한 전개 방식에는 살펴볼 문제가 있다. 정적분의 분할—합 과정과 무한소 관계의 역사적 발달과정에 대한 논의에서 두 가지 결론을 이끌어 냈다. 첫째, 등분할을 바탕으로 하는 정적분의 분할—합 과정은 정적분의 극한 과정을 무한소를 이용하여 해석하도록 촉진한다. 둘째, 형식적인 극한과 연속함수를 기반으로 하여 정적분을 정의할 수 있게 되면서 극한에 대한 도달 가능성에 대한 관심을 극복하고 무한소를 이용하여 정적분의 극한 과정을 설명하지 않고 정적분을 다룰 수 있게 되었다. 현행 교과서들은 무한소 해석을 배제한 형식화된 정적분 정의를 지도하면서도 이를 기하적인 설명을 토대로 제시한다. 형식화된 함수와 극한을 토대로 정의된 바를 기하학적 직관에 호소하여 설명하고 있는 것이다. 곧 현행 교과서들은 정적분 정의에 사용되는 Riemann 합의 행동에 대한 이해를 곡선 영역을 채우는 n의 값의 변화에 따른 S_n의 값의 변화를 통해서 이해하기를 바라고 있다. 그런데 $y=x^2$의 예에서 볼 수 있는 것과 같이 S_n에 극한 과정을 적용하여 수치의 극한을 다루지만, S_n의 값의 변화를 설명하는 방식에는 근삿값과 정확한 값이라는 도식과 곡선 영역을 채우는 직사각형들 이외에는 없다고 할 수 있다. 이 두 가지 이외에 n이 커질수록 S_n이 정확한 넓이와 부피의 값에 수렴할 것이라는 일반적인 언급을 뒷받침하는 바가 없는 것이다. 근삿값과 정확한 값의 관계를 통해서 Riemann 합 과정을 지도하고 있지만, 정작 근삿값을 통해서 정확한 값을 유도하는 과정에 대해서 설명을 제시하는 바는 기하학적 직관 이외에는 없는 것이다. 극한 과정에 대한 기하학적 설명은 완전히 채우는 것, 곧 극한 과정에 대한 도달 가능성을 강하게 함축한다. 또한 등분할을 바탕으로 하는 정적분 분할—합 과정은 무한소 해석을 촉진한다. 즉,

현재의 직관적인 정적분 지도는 암묵적으로 학생들로 하여금 정적분에 대한 무한소 해석을 촉진한다. 근사값인 Riemann 합에서 정확한 값이 되는 정적분 값이 유도되는 것을 설명할 수 있는 것은 Riemann 합을 이루는 직사각형들이 주어진 곡선 영역을 다 채우기 때문이다. 이때 이 직사각형들은 무한소 직사각형이 되어야만 한다. 그러나 현재의 정적분 정의는 무한소 해석을 제외한 체 이러한 내용을 드러내어 논의하고 있지 않다. 따라서 정적분에 대한 무한소 해석은 비공식적인 설명으로 바로 학생 스스로가 발견해야 하는 것이며, 정적분을 이해하고자 노력하는 학생일수록 이러한 해석을 취하게 될 가능성이 높을 것이다.

정적분과 관련된 역사를 보면, 핵심적인 문제 중 하나가 '극한 상태에 도달하는가에 대한 관심'의 극복이었고, 형식적인 극한 개념의 기반에는 도달 가능성 대신 근접성 개념이 자리잡고 있다. 극한에 대한 형식적 정의는 절대값과 부등식, 보편 양화를 이용하여 '근접' 개념을 형식화하여 이 문제를 극복하였고, 현재의 정적분 지도는 이러한 극한 개념을 바탕으로 하고 있다. 이러한 점에 비추어 볼 때 현재 정적분의 직관적 지도는 다소간의 아이러니를 담고 있다고 할 수 있다.

Ⅳ. 학생들의 정적분에 대한 무한소 해석 분석

정적분 단원 분석에 의하면 정적분에 대한 직관적 지도가 정적분의 분할—합 과정을 기하적으로 설명함으로써 무한소 해석을 유도할 가능성을 지니고 있으며, 정적분의 극한값 획득 과정을 이해하려고 노력할수록 무한소 해석을 하게 될 가능성 역시 높아진다. 무한소 해석은 엉뚱한 생각을 통해서 얻어지는 것이 아니라 정적분에 대한 직관적 지도가 명확히 드러내지 않고 있으면서도 함의하고 있는 것을 학생들이 정적분을 이해하는 과정에서 얻게 되는 결과물이다.[9)]

Oberg(2000, p.2)가 지적한 바와 같이, 학생들의 정적분 이해를 조사한 연구는 많지 않다. 그러나 정적분의 이해를 집중적으로 조사한 연구들 중에서 Orton(1983)을 제외한 여러 가지 연구(Czarnocha et al, 2001a, 2001b; Foley, 1992; Oberg, 2000)는 모두 학생들이 정적분에 대한 무한소 해석을 하고 있다는 것을 명확하게 보여주고 있다. 이들은 개별 학생들의 정적분 이해를 분석할 수 있는 과제들을 고안하여 학생들이 과제를 해결하는 과정을 분석하여 학생들의 이해를 드러내고자 하였다. 이들의 조사 결과를 종합하면 학생들의 정적분에 대한 무한소 해석은 크게 Riemann 합의 극한을 무한히 작은 폭을 가진 직사각형들의 무한합으로 해석하는 것과 Riemann 합의 극한을 선들의 무한합으로 생각하는 것이라는 두 가지 유형으로 분류할 수 있다(Czarnocha et al, 2001b, p.301). 2절의 무한소와 불가분량 구분에 따르면 각각 무한소와 불가분량을 사용한 해석이라 할 수 있다.[10)] 부피를 단면적의 합으로 생각하는 것과 무한소 원기둥의 합으로 간주하는 사례를 제시한 것이

9) 정적분에 대해서 학생들이 생각하는 바를 명확하게 드러내는 것은 매우 어려운 작업이다. 직접적으로 관찰할 수 없는 이른바 '이해 상태'를 대상으로 하는 것이기 때문이며, 또한 정적분이 어려운 수학적 주제로서 학생들 스스로 자신이 특정한 상태에 있다고 판단하기 어렵기 때문이다. 학생들의 이해 상태를 간접적으로 논의할 수밖에 없으므로, 여러 연구 결과들을 종합하는 방식으로 이러한 단점을 보완하고자 한다.
10) 절 제목을 비롯하여 앞에서 언급한 무한소는 불가분량과 무한소 둘 모두를 가리킨 것이다.

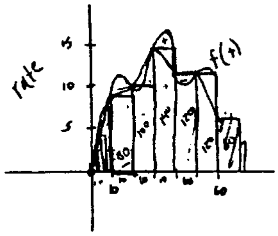
있는데, 이것 역시 각각 불가분량과 무한소를 이용한 해석에 속한다. 넓이와 관련하여 정적분을 다음과 같이 설명하는 것도 각각 무한소와 불가분량을 이용한 해석에 속한다.

> 음 ... 가장 가까운 답은 x축 위에 있는 선분의 길이를 함수 그 자체로 하면 나와요. 그러면 무한히 많은 ... 넓이가 나오고 이것을 더해야 해요. 그러면 정적분이 나오죠. 그것은 .... 넓이가 없고 높이만 있는 직사각형을 다룰 수 있게 하죠. [...] 그래서 선분의 길이를 모두 더하면, 음 넓이가 나와요. (Czarnocha et al, 2001a, p.107)

> 이들 직사각형들을 무한히 작게, 더 작게 만들어요. 그러니까 선이 될 때까지, 이들이 단위가 되도록 해요. 그리고 이 단위들을 더하면 되요. ... 빈 공간이 작을수록 더욱 정확한 근사값이 되고, 빈 공간이 없게 되는 순간 정확한 값이 나오게 되요. (Czarnocha et al, 2001a, p.107)

두 번째 사례에서 나타난 단위는 아마도 분할이 무한히 진행되어 직사각형이 선분처럼 보이는 것을 염두에 둔 표현으로 생각된다. Oberg(2000)에서도 이와 비슷한 반응이 확인된다.

> 학생 B : 음, 직사각형들을 더욱 작게 만들어서 그들이 정말, 정말 가깝게 되도록 해야 되요. … 그러니까 [밑변을 가리키며] 여기 이들이 10이 아니라 5가 되거나 0이 될 때까지 계속 작게 만들어야지요.
> 연구자 : 0이 될 때까지?
> 학생 B : 직사각형 사이의 거리가 0이 될 때까지요. 그래서 이 선 위에 있는 점 뒤에 점이 있는 것처럼 되는 것처럼요.



이러한 대답은 무한소 해석이 정적분의 분할—합 과정이 무한히 실행된 것, 곧 무한 분할이 이루어진 것으로 간주하는 것과 연결되어 있다는 점을 분명하게 보여준다. 여기에서 무한 분할의 결과를 선분으로 간주하느냐 폭이 무한히 작은 직사각형으로 간주하느냐는 확정되지 않은 문제이다. 그런데 다음 [그림 Ⅳ-1]과 같은 질문에 대한 우리나라 학생들의 반응을 보면 무한 분할의 결과를 무한소 직사각형으로 간주하는 것이 보다 우세한 성향인 것으로 추측된다. 김현정(1990)에 따르면, 다음 [그림 Ⅳ-1]과 같은 문제에 대하여 ②라고 대답한 고등학교 학생(2학년)은 전체의 61.8%이었고, 대학교 1학년 학생의 경우는 96%였다. 전미영(2003)은 동일한 문제로 교사에게 질문하였는데, ②번이라고 대답한 비율이 95%였다.[11] 불가분량 해석과 무한소 해석을 비교하도록 하였다는 점에서 제한점이 있는 조사이지만, (좁은 의미의) 무한소 해석이 정적분의 분할—합 과정의 결과를 수용하는 유용한 방편이라는 점을 잘 보여준다. 시각적으로 보면 무한분할의 결과를 선분이라고 생각하는 것이 자연스러울 수 있지만, 직사각형을 이용하는 정적분의 분할—합 과정이 무한히 실행된 결과를 나타내는 것으로 해석되면서 최종 결과가 선분이 아니라 무한소 직사각형으로 간주된 것으로 판단된다.

---

11) 김현정은 고등학생 124명, 사범대학 수학교육과 학생 98명을 조사하였고, 전미영은 서울지역의 9개교에 근무하는 중고등학교 수학교사 60명을 대상으로 설문을 실시하였다.

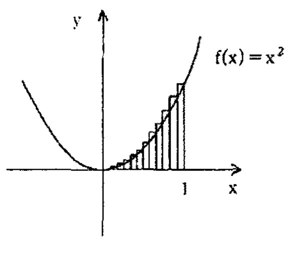
Oberg(2000)는 초급 미적분을 수강한 대학생들 5명을 대상으로 하여 그들의 정적분에 대한 이해에 대하여 면담 조사를 통하여 심층적으로 조사하였다. Oberg는 정적분의 다양한 특성을 대표하는 20개의 과제를 개발하여 그 과제들을 해결하는 과정에서 나타난 학생들의 이해를 분석하였다. 여기에서 흥미로운 것은 Oberg가 조사한 학생들 중에서 한 학생만이 성공적으로 정적분을 Riemann 합의 극한으로 설명하였는데, 그 학생이 위에 제시된 것과 같이 설명한 것이다. Foley(1992)는 미적분을 수강한 대학생들의 정적분에 대한 '개념적 지식'을 조사하였다. 계산보다는 계산의 정당화가 개념적 지식을 평가하는데 효과적일 것이라고 생각하여 학생들에게 회전체의 부피에 대한 정적분 계산을 정당화하도록 요구하였다. Foley는 전체 31명의 학생 중에서 20명의 학생이 Riemann 합을 언급하며 정당화를 한 것으로 평가하였다. 그런데 Foley가 '분할과 합'을 이용하여 설명한 것으로 제시한 학생들의 대답 중 상당수가 불가분량 혹은 무한소 아이디어를 포함하고 있었다.

> 음, 원의 넓이는 πr^2이다. 이 도형은 중심을 가로지르는 선을 따라서 쌓은 서로 다른 크기의 수많은 원기둥으로 이루어져 있다. x 축 위의 임의의 점에서 각각의 원기둥의 반경은 x^2이고, 원기둥의 두께는 dx이다. 적분은 Riemann 합의 극한이기 때문에, 각각의 원기둥의 넓이를 모두 더하면, 전체 도형의 부피가 된다(Foley, 1992, pp.29-30).

또한 김현정(1990)과 전미영(2003)의 연구 결과에서 주목할 부분이 있는데, Riemann 합에 익숙한 사람들일수록 불가분량이 아니라 무한소 해석을 하는 비율이 높다는 점이다. 이상과 같은 결과들은 정적분의 분할—합 과정에 대한 기하학적 이해와 무한소 해석이 긴밀하게 관련되어 있다는 논의 결과를 상당히 지지하는 것으로 생각된다. 무한소 해석은 엉뚱한 사고의 산물이 아니라 기하적인 설명을 기반으로 하는 교수과정에서 자연스럽게 드러나는 결과물이라

(2) $y=x^2$과 x 축, $x=1$ 부분으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구분구적법에 의하여 구하는 과정이다. n 등분한 직사각형을 모아 면적을 구하면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)$$



이 때 작게 나눈 이 직사각형은 밑변의 길이가 0 에 근접해 가며 그 극한의 경우는 선분과 같이 된다. 결국 구하고자 하는 도형의 넓이는 무한히 많은 선분들의 합이라고 볼 수 있는가?

① 도형의 넓이는 선분들의 합이 된다.
② 도형의 넓이는 밑변의 길이가 무한소인 직사각형의 넓이의 합이 된다..
③ 모르겠다.

[그림 IV-1]

고 할 수 있다.

Bezuidenhout와 Olivier(2000)는 설문 조사를 통해서 미적분을 수강한 대학생들의 무한소 해석 정도를 조사하였는데, 이들의 조사 결과에 의하면 전체 70명의 학생 중에서 23명이 무한소 해석을 하였다. 허학도(2006)는 서울 지역 고등학교 2학년 학생 40명을 대상으로 하여 $y=x^2$의 그래프 아래의 넓이를 구분구적법으로 구하는 과정을 제시한 후 그 결과를 '도형의 넓이는 무한히 많은 선분들의 합'이라는 불가분량 관점으로 해석하는 것이 옳은가 질문한 바 있다. 이러한 물음에 대하여 전체 중에서 47.5%에 해당하는 19명이 불가분량 해석에 찬성하였다. 흥미로운 것은 반대한 학생들 중에서 전체의 20%가 넘는 9명의 학생이 선분이 아니라 폭이 무한히 작은 직사각형이 된다는 이유에서 불가분량 해석에 반대하였다는 점이다. 곧 70% 가까운 학생들이 정적분에 대한 무한소 해석을 수용한 것이다.

앞에서 논의한 바에 의하면 정적분에 대한 무한소 해석은 정적분에 대한 직관적인 지도에 이미 내재되어 있다. 정적분 이해를 조사한 여러 연구에서 보면, 학생들 중에서 상당수가 정적분을 불가분량 혹은 무한소의 합으로 간주하고 있는 모습이 공통적으로 확인되었다. 이러한 결과는 정적분에 대한 무한소 해석이 교수학적 요인과 관련되어 있다는 본 연구자들의 주장을 지지하는 것으로 생각되지만, 선행연구들은 정적분 이해 조사를 목적으로 한 것으로서 교수학적 요인의 관련성에 대한 보다 진전된 논의가 어렵다. 이에 본 연구자들은 학생들의 정적분에 대한 무한소 해석의 양상과 교수학적 요인의 관련성을 보다 명확하게 파악하기 위하여 2007년 12월 서울 강북지역에 있는 A고등학교 2학년 학생 74명을 대상으로 설문 조사를 실시하였다.[12] 조사 대상들은 세 학급으로 이루어져 있고, 수학 수업은 학생들 성적에 따라서 상위 그룹, 중위 그룹, 하위 그룹으로 분반되어 진행되는데, 각 그룹당 한 학급을 조사 대상으로 삼았다. 제대로 설문 조사에 응하지 않은 경우 등을 제외한 69명의 설문지를 분석 대상으로 삼았다. 분석의 편의를 위해서 69명을 상위 그룹과 중—하위 그룹 두 집단으로 나누어 분석을 하겠는데, 30명이 상위 그룹, 39명이 중—하위 그룹에 속한다. 무한소 해석이 정적분을 이해하고자 하는 시도의 산물이며 동시에 직관적인 정적분 지도에 내재되어 있는 것을 학생들이 발견한 결과이라면, 상위 그룹의 학생들에게서 무한소 해석이 더욱 활발하게 발견되어야 한다고 생각하였기 때문에 학생들을 수준별로 나누어 조사하였다. 설문 내용은 다음과 같이 구성되었다. 먼저 $y=x^2$의 그래프 아래의 넓이를 구하는 과정을 제시한 후, 정적분의 극한 과정의 역사적 발달과정과 선행 연구들을 바탕으로 하여 세 가지 관점에 기반하는 계산 과정에 대한 설명을 제시하였다. 곧 '무한 과정이기 때문에 불가능하다'는 유한적 관점, 무한소 아이디어를 이용하여 극한 과정을 분석하는 기하적 관점, Riemann 합의 n의 변화 대하여 전체 값의 변화를 분석하는 형식적 관점에 기반한 설명[13]을 제시하고 여러 개의 보기를 제시

12) 면담 조사는 심층적인 결과를 얻을 수 있지만 많은 학생들의 상태를 조사하는데 한계가 있다. 본 연구자들은 역사적 분석 결과와 선행 연구들을 분석하여 학생들의 가능한 반응을 유형화하고 이를 보기로 제시하여 응답률을 높이는 한편, 여러 문항을 통해서 교차 검증하여 학생들의 일관된 것인지 검증할 수 있도록 설문지 문항을 구성하였다. 이를 통해서 깊이 있는 분석과 전체적인 상황에 대한 정보를 균형있게 획득할 수 있도록 하고자 하였다.

하고 보기에서 옳다고 생각되는 것을 선택하도록 하는 한편, 극한 과정에 대한 세 가지 설명 중에서 옳다고 생각되는 관점을 선택하도록 하였다. 그리고 정적분의 정의를 내리도록 하는 한편, 정적분을 이용하여 부피를 계산하는 식을 제시하고 그 식이 나온 이유를 설명하도록 하였다. 이 두 문항은 앞의 문항에서 드러난 정적분에 대한 이해가 특정한 과제들에서 일관되게 적용되는지 확인하기 위한 것이다. 이상과 같은 문항들에 대한 상위 그룹 학생들의 반응과 중—하위 그룹 학생들의 반응에서 다음과 같은 차이가 발견되었다. 극한 과정에 대한 올바른 설명을 묻는 문항에 대하여 상위 그룹 30명 중에서 19명이 형식적 관점을, 9명이 기하적 관점을, 2명이 유한적 관점을 선택하였다. 이에 비하여 중—하위 그룹 39명 중에서 28명이 형식적 관점을, 7명이 기하적 관점을, 4명이 유한적 관점을 선택하였다. 그러나 이러한 관점들의 의미를 명확하게 파악한 것이라 하기는 어렵다. 학생들의 이해 방식을 구체적으로 알아보기 위하여 몇 가지 관점에 대한 설명을 제시하고, 옳은 것으로 생각되는 보기들을 선택하도록 하였다. 다음 보기 중에서 (가)와 (나)는 유한적 관점과 직관적 관점의 문제점을 지적하는 것으로, 수치적 관점을 선택한 학생들이 정적분 정의에 비추어서 이들 관점의 틀린 점에 대한 지적을 식별할 수 있는지 확인하기 위한 것이다. (라)와 (마)는 직관적 관점과 수치적 관점을 직접 비교하도록 하였다. (다)는 무한소와 무한분할의 아이디어를 직접적으로 연결시켜서 직관적 관점에 좀 더 설득력을 부여하여, 직관적 관점과 수치적 관점의 비교를 객관적으로 할 수 있도록 하기 위한 것이다.

(가) 포물선 아래 영역 중에서 직사각형들에 포함되지 않는 부분이 항상 있지만, 그 부분은 n이 커지면 무한히 작아진다. 이 사실을 이용하면 정확한 넓이를 구할 수 있다. 따라서 갑의 주장은 잘못되었다.

(나) 선분의 넓이는 0이고, 0은 아무리 많이 더해도 0이므로 선분들의 넓이의 합도 0이다. 계산 결과는 옳지만 계산 과정에 대한 을의 설명은 잘못되었다.

(다) 무한하게 등분할 경우 선분이 되는 것이 아니라 밑변의 길이가 무한히 작은 직사각형이 된다고 한다면 을의 설명이 더욱 적절하게 된다.

(라) 을의 설명이 병의 설명보다 더 정확한 설명이다.

(마) 을과 병의 설명은 동일하다.

(나)와 (다), (라), (마)를 동시에 선택하는 것은 일관된 인식을 지닌 반응이라 하기 어려운데, 전체 학생 중에서 19명이 (나)와 (나) 다음에 있는 문항을 동시에 선택하였다. 형식적 관점을 선택한 학생 47명 중에서 (가)를 선택한 학생은 24명이고, 더욱이 (가), (나)를 동시에 선택한 학생은 4명에 불과하다. 이상과 같은 결과는 학생들의 반응이 이해를 바탕으로 한 것이라기보다는 순간적인 선택에 불과하다는 것을 강하게 시사한다. 정적분과 무한소 자체가 어려운 주제라는 점을 감안하면 이상과 같은 결과는 당연한 것이라 할 수 있다.

---

13) "등분의 수를 아무리 크게 하여도 직사각형들에 포함되지 않는 부분이 항상 있기 때문에, 이 방법으로는 정확한 넓이를 알 수 없다. 1/3이 정확한 값이라고 보장할 수 없다.", "n이 무한이 되면 직사각형들의 밑변이 0이 되어 직사각형들이 모두 선분이 된다. 이 선분들은 주어진 도형의 내부를 빈틈없이 완전히 채우고, 이 선분들의 전체 합이 1/3이다. 그래서 구하고자 하는 넓이는 1/3이다.", "S_n은 구하고자 하는 도형의 넓이의 정확한 값은 아니지만 n이 커질수록 정확한 넓이에 무한정 가까이 접근한다. 그런데 S_n은 1/3에 한없이 가까이 접근한다. 따라서 1/3이 구하고자 하는 넓이이다." 등이다.

x축을 중심으로 y값을 반지름으로 하는
원기둥들의 합과 같다.
이때 중심의 위치가 (x, 0)인 원의 넓이는
$\pi r^2 = \pi y^2 = \pi (x^2)^2 = \pi x^4$ 이다.
구간을 무한히 등분하였으므로 거의 원기둥들의 높이는
거의 0에 가까우므로 구하는 부피는 $\int_0^2 \pi x^4 dx$.

회전체를 x축에 수직하게 여러번 자르면
그 단면은 모두 원인데 그 원의 각각의
넓이는 (y값)$^2\pi$ 이다. y값이 x^2이므로
$x^4\pi$ 이다. 그 단면적인 0에서부터
2까지 있으니까 다 더해준다.

[그림 Ⅳ-2] 상위그룹 학생들의 반응의 예

구간을 정한후 그 구간을 n등분한다.
그 후 함수와 축 사이의 넓이를 직사각형들의
(구간을 정한 축)
합으로 나타낸다. 그 합을 구한후 오차를
없애기 위해 $n \to \infty$로 한다.
단, 축의 위부분은 양수값 축의 아래부분은 음수값.

[그림 Ⅳ-3] 중—하위 그룹 학생들 반응의 예

그러나 이러한 결과에도 불구하고 상위 그룹의 학생일수록 무한소 해석을 선호하고 필요할 경우 무한소 해석을 보다 능숙하게 사용한다는 것을 확인할 수 있었다. 이러한 점은 정적분을 이용한 부피 계산 공식을 설명하는 문항에서 명확하게 드러났다. 이 문항에 대하여 상위 그룹 30명 중에서 21명이 무한소 해석을 이용하여 대답하였다.

이와 달리 중—하위 그룹 학생 39명 중에서 4명만이 무한소 해석을 이용하여 설명하였고, 6명의 학생은 일반적인 부피 계산 공식을 설명으로 제시하였고, 25명의 학생들은 응답을 하지 않았다.[14] 정적분을 정의하도록 요구하는 문항에 대해서도 이와 비슷한 결과가 나왔다. 상위 그룹 학생 중에서 12명이 무한소 해석을 제시한 반면, 중—하위 그룹 학생 중에서 3명만이 무한소 해석을 제시하였다. 중—하위 그룹 학생들은 정적분을 단순히 넓이로 설명하거나 정적분 기호만을 제시하는 경우가 많았다.

이상과 같은 조사 결과는 여러 가지 측면에서 매우 제한점을 가지고 있지만, 정적분에 대한 직관적인 지도 시 학생들이 무한소 해석을 통해 이해하고 있다는 것을 충분히 뒷받침한다고 생각된다. Czarnocha et al(2001a, p.108)은 학생들의 무한소 해석을 공간에 대한 원자론적 관점이라는 형이상학적 요인과 관련지은 바 있다. 그러한 측면도 관련이 있을 수 있겠지만, 지금까지의 논의를 살펴보면 실질적으로는 교수학적 측면이 더 큰 영향을 주었다고 보는 것이 타당할 것이다. 학교 수학을 비롯하여 초급 수준의 미적분에서는 일반적으로 정적분을 넓이의 근사 계산의 극한 맥락을 통해서 지도한다. 형식적인 내용을 근간으로 하지만 앞에서 살펴본 바와 같이 이러한 설명 방식은 기본적으로 극한값을 획득하는 기제에 대하여 명확하게 설명하기 어렵다. 이러한 상황에서 학생들은 분할—합 과정에서 사용되는 직사각형들로 내부를 소진시키기 때문에 정적분이 정확한 값이 된다고 추론할 수밖에 없다. 이는 역사적으로도 17세기의 수학자들이 선택한 설명 방식이기도 하다. 거듭 강조하지만 정적분에 대한 무한소 해석은 단순히 학습의 실패 혹은 잘 알지 못하는 학생들의 엉뚱한 상상이 아니다. 정적

14) 3명의 답은 이해하기 어려웠고, 1명은 주어진 정적분에 대한 계산을 하였다.

분의 형식적인 내용을 기하학적인 설명을 통해서 지도하는 직관적인 교수법에 근간을 두고 있는 것이며, 따라서 설명하려는 바를 이해하려고 열심히 생각한 결과물이라 할 수 있다. 그러나 현대 미적분에서는 무한소를 직접 언급하지 못하고 있으며 따라서 무한소 해석은 학교수학에서 공식적으로 허용되지 못한다. 이러한 점에서 무한소 해석은 가르치는 사람과 교육과정이 의도하지 않은 것임에도 불구하고 정적분을 이해하는 과정에서 학생들이 자연스럽게 발견한 결과인 것이다. 이는 역사적 발달과정과 이미 언급하였던 선행연구들을 통해서도 알 수 있다.

V. 교육적 시사점 논의

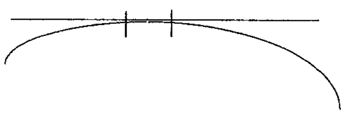
학교수학에서는 해석학 수준에서 형식화된 연속함수와 극한에 대한 논의를 통해서 지도하는 것은 불가능하며 따라서 적절한 직관적인 지도가 필요하다는 것은 분명하다. 분할의 세분화에 따른 Riemann 합의 변화에 대한 직관적인 지도 방안의 구체화가 정적분 지도의 관건이라 할 수 있을 것이다. 물론 형식화된 수학의 관점에서 직관적인 지도방법에는 자명하게 논리적인 문제 있을 수 있다. 그렇다고 하여 수학의 그러한 측면을 학습 과정에서 모두 제외시킬 수 없음은 이미 많은 사람들에 의해 주장되어왔다. 수학의 발달과정에서 직관적인 소박한 해석은 완전히 근절될 수 없는 것이다.

1. 수학에서 직관의 정련화

Klein은 '직관은 수단이며, 추상은 결과'라고 하면서, 수학을 가르칠 때 직관적인 관념에서 출발할 것을 주장하였다(Pyenson, 1983, p.58). Klein에 따르면, 형식적인 설명은 이론적인 명제에 대한 간단하고 엄밀한 증명을 전달하는데 알맞지만, 학습자를 위하여 그것의 의미와 안목을 전달하는 데에는 적당하지 않다. 산술에서조차도 직관 없이 순수하게 논리적인 연구에 도달할 가능성은 없으며, 추상적인 공식에서 기호를 재인식하려 할 때에도 항상 직관을 사용해야 한다.

Klein은 수학적인 개념의 발달을 설명하기 위하여 '소박한 직관(naive intuition)'와 '정련된 직관(refinement intuition)'이라는 개념을 도입하였다. '소박한 직관'은 어떤 특별한 형식을 갖기 전에 수학적 대상에 대한 개념을 표현하는 것이다. '정련된 직관'은 수학적 대상의 존재를 설명하는 공리 또는 형식적인 과정을 표현하는 것이다. Klein은 직관적인 관념에서 출발하여 추상을 증가시켜 정련해 갈 것을 강조한다(1893, p.42). 수학은 '소박한 직관'에서 '정련된 직관'으로의 발전, 즉 직관과 형식적인 과정을 결합하는 것이 필수적임을 강조하였다.

특히 '소박한 직관'은 미적분학이 발생하는 시기동안 활발하였는데, Newton은 모든 경우에 연속함수가 도함수를 가지는지 여부에 얽매이지 않고, 움직이는 점의 속도의 존재성을 가정하였다(Klein, 1893, p.41). '소박한 직관'은 수학에서 추상적인 것을 어떤 구체적인 것으로 대신한다. 예를 들어, [그림 V-1]과 같이 한 개의 띠를 상상해 볼 때, '폭이 없는 길이'를 그릴 수 없지만, 어느 정도 폭이 있는 길고 가는 띠를 그릴 수 있다. 그러한 길고 가는 띠는 항상 접선을 가진다. 즉, 항상 구부러진 띠와 만나는 작은 부분을 가지는 곧은 띠를 상상할 수 있다.



[그림 V-1]

Poincare(1905)에 따르면, 직관적인 정신은 옛날이나 지금이나 같지만, 달라진 것은 우리들이 갖는 요구가 증가하였다는 것이다. 직관은 엄밀성이나 확실성을 줄 수 없다는 것을 점차 알게 된다. 직관은 확실성을 부여하지 않기 때문에 직관에서 논리로의 변화가 일어나지 않으면 안되었고, 정의를 엄밀하게 하지 않으면 추론에 엄밀성을 부여할 수 없다는 것을 알게 되었다. 예를 들어, 도함수를 갖지 않는 연속함수가 있다는 논리적으로 필연적인 주장이 직관적으로는 모순이다. 선조들은 모든 곡선에 접선이 존재하므로 '모든 연속 함수는 반드시 도함수를 갖는다'라고 주장하는데 주저함이 없었다. 이러한 직관이 틀릴 수 있는 것은 곡선을 머릿속에 그려 보려고 할 때, 굵기가 없는 곡선을 그려볼 수 없고, 또 마찬가지로 직선도 굵기가 있는 막대 같은 것으로 머릿속에 그려 볼 수밖에 없기 때문이다. 그런데 우리는 선에 굵기가 없다는 것을 잘 알고 있다. 그래서 그 직선과 곡선의 굵기를 점점 가늘어지게 하여 극한에 이르도록 노력한다. 이런 일은 어느 정도는 가능하지만 결코 극한에 도달 할 수는 없다. 그렇기 때문에 우리들은 하나는 곧고 또 하나는 굽은 2개의 띠를 서로 관통하지 않고 접촉하는 위치에 놓고 상상할 수 밖에 없다. 그래서 곡선은 언제나 접선을 갖는다는 잘못된 결론을 내리게 되고, 우리는 엄밀한 해석에 의존할 수 밖에 없는 것이다(pp. 62-63).

미적분의 여러 가지 주제들은 직관의 의해 발명되고 그 직관은 수학의 논리에 의해 정련화되는 과정을 거쳐 왔다고 볼 수 있을 것이다. 이러한 과정에서, 미적분의 모든 주제에는 연역적 논리에 의해 부과된 수학적 엄밀함과 무한 관념의 본질적인 특색이 유도하는 모순과 변칙 사이의 갈등이 공통적으로 포함되어 있다 (Baron, 2003, pp.2-3).

역사적으로 곡선으로 된 도형의 길이, 넓이, 부피를 정확하게 계산하고 정의하는 문제가 정적분의 기원이었다. 그러나 무한 분할이 정적분에 내포되어 있기 때문에 정적분에 대한 이해는 '감각적 직관'(Boyer, 1949, p.9)을 넘어서는 추론을 요구한다. 정적분은 연속적인 양과 변화에 대한 우리의 감각을 도식화하려는 시도의 결과물이며, 그래서 초기 단계에서 정적분은 기하학과 운동 개념, 불가분량과 무한소를 이용한 설명과 밀접한 관계를 지니고 있었다 (Boyer, 1949, p.11).

미적분의 여러 가지 아이디어는 직관과 경험을 통해 형성되었다. 그러나 직관적으로 얻어진 아이디어에는 모순과 변칙이 숨어 있었고, 이로 인해서 잘 정의된 추상적인 구조에 자리를 내주게 된 것이다. 미적분의 형식화를 촉진시키는 것은 직관을 통해서 얻어진 것이었지만, 논리적으로 적절하지 않았던 개념들은 최종적으로 형식화 단계에서 제외된 것일 뿐이었다.

2. 직관의 정련화 과정으로서 정적분의 교수-학습 과정

이미 살펴본 바에 따르면, 정적분 개념의 역사적 기원은 고대 그리스까지 거슬러 올라가지만 적분 구간을 분할하여 만든 내접 다각형과 외접 다각형을 이용하는 현재의 형태는 17세기에 나타났다. 17세기의 수학자들은 무한소를 이용하여 Riemann 합의 극한 과정을 분석하였고, 무한소는 최종 극한 상태 곧 무한분할의 결과로 생성되는 것으로 간주되었다. 무한소에 집착하면서 극한 과정에 대한 인식이 약화되기도 하였지만, 무한소는 소진법의 엄밀한 형식으로 표현될 수 있는 극한 과정과 연결되어 있었다. 무한소를 통해서 Riemann 합 곧 근삿값을 통해서 정확한 값을 얻을 수 있는 이유가

설명된 것이다. 그러나 극한에 대한 이러한 인식은 극한에 대한 도달 가능성, 무한분할을 기반한 것으로, 무한과 무한소로 인한 모순과 변칙을 허용한다. 형식화된 극한 개념을 바탕으로 하는 Cauchy의 정적분 정의는 기하학적 의미와 지시체를 고려하지 않고 단순히 Riemann 합의 행동을 수치적으로 분석함으로써 무한과 무한소로 인한 문제를 극복할 수 있게 하였다.

0이 아니면서 모든 양의 실수보다 작은 수의 존재성을 요구하는 무한소 관점은 해석학의 토대가 되는 실수의 공리 체계를 거부한다는 점에서 문제가 될 수밖에 없다. 그렇지만 이러한 문제에도 불구하고 극한 과정에 대한 무한소 해석은 여전히 극한 과정을 쉽게 설명하는 한편, 극한 과정의 결과 나타나는 개념적인 관계를 효과적으로 설명하는 수단으로서 계속 사용되고 있다. 예를 들어 Mac Lane(1986, pp.155-156)은 무한소를 이용하여 정적분을 설명하면서 미적분의 기본정리의 직관적인 아이디어를 다음과 같이 제시한다.

> 문제가 되는 양을 시간 t에 대한 함수 $F(t)$라 하면, 시간 $t=a$에서 $t=b$까지 양의 전체 변화는 F의 두 함숫값의 차 $F(b)-F(a)$이다. 함수 $F(t)$가 각각의 시간 t에서 도함수 $F(t)=f(t)$를 가진다고 할 때, 각각의 순간 무한히 작은 간격 dt 동안의 순간적인 변화는 시간 간격 dt와 순간적인 변화율 $F(t)$의 곱이며, 잇달아 있는 순간적인 변화 전체는 정적분 $\int_a^b f(x)\,dx$ 이다. 따라서 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Cauchy 역시 형식화된 극한 개념을 토대로 미적분을 형식화하였지만, 실제적인 미적분 지도에서 무한소를 고려하여 얻을 수 있는 간결함을 엄밀함과 조화시키고자 노력하였다 (Ferzola, 1986, pp.93-94). 극한을 엄밀하게 정의하였지만 Cauchy는 무한소를 폐지하지 않고 오히려 무한소를 극한이 0인 변수로 정의하여 무한소를 포함하는 기존의 논의를 엄밀하게 하고자 하였다.

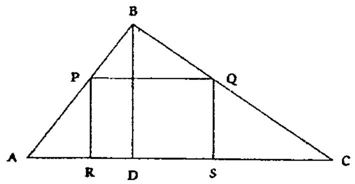
수학의 발달과정에서 직관적인 소박한 해석은 완전히 근절될 수 없다. 학생들이 새로운 개념의 논리적인 구조와 보다 높은 내적 일관성과 포괄성을 가지는 이차적 직관, 즉 정련된 직관을 구성하도록 돕는 것이다. 그 자체로는 문제가 있지만 보완할 수 있는 형식적 논의와 함께 지도하여 수학에서 직관과 형식의 의미가 동시에 전달될 수 있도록 해야 한다.

이상과 같은 논의에 비추어 볼 때 무한소를 통한 Riemann 합 과정의 해석과 형식화된 극한 개념을 바탕으로 한 정적분의 재개념화가 정적분에 내재한 무한과정을 직관적으로 지도할 수 있는 방안을 제공한다고 볼 수 있을 것이다. 그러나 Riemann 합 과정을 무한소를 가지고 해석하는 것에서 그치지 않고 그러한 해석이 가지고 있는 문제점과 정적분 정의가 그러한 문제점을 어떻게 극복할 수 있는지에 대해 지도되어야 한다는 점 또한 중요하다. 이러한 과정을 적절히 거친다면 학생들은 정적분에 대한 심상과 정의가 지니고 있는 의미를 직관적으로 파악할 수 있을 것이다. 무한소를 이용한 극한 과정에 대한 직관적인 해석은 형식적인 조작의 의미를 비형식적으로 설명하는 한편, 정적분에 대한 형식적인 논의는 비형식적인 설명의 한계를 드러냄으로써 형식적인 논의가 가지고 있는 본래의 의미를 파악하는데 도움이 될 것이다. 따라서 현재의 정적분 지도와 관련하여 다음과 같이 방안을 제시하고자 한다.

첫째, 구분구적법을 도입하는 과정에서 구분구적법의 결과를 무한소를 이용하여 분석하는 과정을 거치도록 한다. 예를 들어 $[0,1]$ 위의 $y=x^2$의 그래프와 x축 사이의 넓이를 계산하는 식을 세운 뒤 "$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{3}$이 $y=x^2$의 그

래프와 x축 아래의 넓이의 정확한 값이 되는 이유는 무엇인가?"는 질문을 제기하고 무한소를 이용한 설명을 제시하고 이에 대한 토론을 유도한다. 이때 무한소가 가지고 있는 논리적인 문제점을 솔직히 지적하면서도 최종적인 결론을 내리지 않고 유보적인 입장을 지키면서 무한소를 인정할 경우 정적분의 무한과정을 쉽게 설명할 수 있다는 점을 충분히 드러낸다. 무한소를 이용하여 Riemann 합 과정을 설명하면 Riemann 합과 정적분의 관계가 근삿값과 정확한 값의 관계로 간주될 수 있다는 점을 보이는 한편, 다른 결과를 예측할 수 있다는 점을 보인다. 동일한 구간에서 $y=x^2$과 $y=2x^2$의 그래프와 x축 사이의 넓이를 비교하도록 하거나, 단면의 길이나 넓이가 동일한 평면도형들의 넓이와 입체들의 부피 사이의 관계를 무한소를 통해서 추측하도록 하는 활동을 하는 것이 적절할 것이다.

둘째, 무한소 아이디어의 문제점을 분석한다. 여기에서는 단순히 무한소의 논리적인 문제점을 다루는 것이 아니라 Riemann 합 과정과 연결되지 못할 경우, 역설이 생긴다는 것을 보인다. 그리고 그로 인하여 잘못된 결과를 초래할 수 있고 그러한 결과가 나오는 이유를 파악하기 어렵다는 점을 드러낸다. 다음의 예는 Riemann 합 과정과 연결되지 않은 무한소 추론의 위험성을 드러내는 대표적 사례이다 (Toeplitz, 1963, pp.60-61). 다음 [그림 V-2]과 같이, 높이가 합동이 아닌 두 직각삼각형 (A, B)으로 나누는 삼각형을 살펴보자. A와 B가 무한소, 곧 높이들의 합으로 이루어졌다고 하자. 쉽게 확인할 수 있듯이, A는 모든 높이의 합이고 B 역시 동일하다. 그런데, 그림에 나타나 있는 것처럼 그러한 높이들은 서로 동일하다. 즉 A의 모든 높이에 대하여 이와 동일한 높이 하나가 B에 있다. 따라서 A와 B의 수직선들이 쌍으로 서로 같고 수직선들의 합도 같으므로 $A=B$ 이다. 이 예와 달리 $y=x^2$과 $y=2x^2$의 그래프와 x축 사이의 넓이를 비교하는 상황은 무한소들 사이의 관계와 Riemann 합 사이에 동일한 관계가 성립한다는 점을 확인할 수 있다. 곧 무한소가 Riemann 합 과정의 극한으로 간주될 수 있는 것이다.



[그림 V-2]

끝으로, 무한소를 이용한 극한 과정의 해석과 정적분 정의를 차이점을 설명한다. 무한소의 경우 Riemann 합 과정과 연결될 경우 오류가 없다는 점을 지적하는 한편, 무한소 해석과 정적분 정의가 내포하고 있는 수치적 접근의 차이를 드러낸다. 수치적 접근으로는 Riemann 합이 넓이에 수렴한다는 것을 쉽게 파악하기 어렵고 무한소 해석이 심리적으로 무한과정의 결과를 보장한다는 점을 지적하는 한편, 무한소 해석이 가지고 있는 문제점과 수치적 접근이 이를 어떻게 극복하는지를 지적한다.

Ⅵ. 요약 및 결어

Czarnocha et al(2001b)는 정적분에 대한 무한소 해석 현상을 극한에 대한 이해를 중심으로 분석하였다. 극한은 미적분을 조직하는 도구로서 정적분과 도함수 등 미적분의 핵심적인 개념들을 정의하는데 사용되는데, 극한에 내재한 무한 과정으로 인하여 학생들이 극한을 이해하는데 어려움을 느낀다는 점이 널리 알려져 있

다(Cornu, 1991; Davis & Vinner, 1986; Williams, 1989). 극한과 수열의 최종항을 구분하지 못하여, 극한값을 a_{∞}의 값으로 간주하거나 또는 무한히 많은 항들을 고려해야 하기 때문에 극한값에 도달할 수 없다고 결론을 내리는 것 등이 대표적인 학생들의 반응이다. 학교수학에서 극한을 'x가 x_0에 접근할 때 $f(x)$가 L에 접근한다'와 같은 비형식적이고 동적인 표현을 이용하여 극한을 지도하면서 학생들에게 극한에 대한 동적 이미지가 강하게 주입되는 것이 그러한 어려움을 초래하는 교수학적 요인으로 지적되고 있다. Czarnocha et al(2001b)는 극한에 대한 이러한 인식이 정적분 이해에 영향을 준다고 본다. 극한값을 수열의 최종항의 값과 분리하지 못하고 극한에 대한 도달 가능성에 지나치게 주목한 결과 무한소를 이용하여 정적분을 해석하여 정적분이 Riemann 합의 극한이 아니라 무한분할의 결과 곧 극한 상태의 무한합으로 인식된다는 것이다.

극한 지도를 강화하자는 Czarnocha et al (2001b)의 주장은 정적분의 분할—합 과정에서 왜 정확한 값이 되는지에 대한 심상을 부여하기보다는 극한에 대한 형식적인 접근을 통해서 Riemann 합을 보도록 할 수 있다. 극한에 대한 명확한 이해를 바탕으로 하여 정적분에 대하여 정확한 설명을 할 수 있지만, 정적분을 설명하는 Riemann 합의 필요한 이유나 의미를 이해하지 못한 채 형식으로만 남을 가능성이 있다. 따라서 정적분을 이해하는 과정에서 무한소 해석이 가지는 문제점이 무엇이고 형식적인 극한 정의가 그러한 문제점을 어떻게 극복하는지를 안다면 정적분에 대한 이해가 보다 명확하다고 할 수 있을 것이다.

수학적 실체의 존재와 그 전체적인 성질은 형식적으로 부과된 것에 따르며 이는 새로운 교수학적 상황을 만든다. 학생들은 형식적인 측면에 일치하도록 수학적 개념을 이해하고 사용하는 것을 배워야 하지만 이는 그리 쉬운 일이 아니다. 수학의 발달에 있어서 직관은 중요한 생산적인 아이디어의 원천이지만 수학적 사고 과정에 있어서 직관이 불가능하거나 직관과 모순되는 표상을 야기하기도 한다. 이러한 상황을 극복하도록 학생을 도울 수 있는 방안은 관련된 심리적 어려움을 의식시키는 것이다. 그러한 인식의 장애나 갈등을 경험하고 반성하여 분명히 깨닫고 재구성하도록 하는 것일 것이다.

수학적 개념의 발달 과정은 직관이 정련되어 가는 과정이라고 할 수 있다. 직관을 통해 아이디어를 발견하고 발견된 아이디어나 사실에 확실성을 부여하기 위하여 형식적인 방법, 즉 논리적인 작업을 실행하는 것이다. 수학에서는 그 타당성이 경험적이 아니라 논리적으로 확립되는 개념과 명제를 사용하고 가끔 우리의 자연스러운 상식적인 사고방식과 모순되는 것으로 보이지만 수용해야 함을 인식해야 한다. 이러한 논리적인 과정을 통해 발견된 수학적 사실들은 보다 정교화되고 통합되어 새로운 수학적 대상으로 변화해 가는 끊임없는 과정이 바로 수학적 지식의 발달과정인 것이다. 따라서 학생들이 새로운 개념의 논리적인 구조와 보다 높은 내적 일관성과 포괄성을 가지는 이차적 직관, 즉 정련된 직관을 구성하도록 해야 한다. 그 자체로는 문제가 있지만 보완할 수 있는 형식적 논의와 함께 지도하여 수학에서 직관과 형식의 의미가 동시에 전달될 수 있도록 해야 한다.

이미 언급한 대로 학생들은 자연스럽게 무한소를 이용하여 정적분을 해석하고 있다. 정적분의 무한과정에 대한 무한소 해석은 근사값에 불과한 Riemann 합을 통해서 정확한 넓이를 계산할 수 있는 이유를 심리적으로 생생하게 보

여줄 수 있다. Riemann 합 과정에 대한 이해를 추구한 결과 상당수의 학생들이 17세기의 수학자들처럼 무한소를 통한 해석에 도달하였다. 그러나 학생들은 정적분의 무한소 해석과 엄밀한 정의의 관계를 제대로 파악하지 못하고 있다. 17세기의 수학자들의 경우 무한소 해석에 치중하면서 정적분의 극한 과정에 대한 이해가 후퇴하는 모습을 보이기도 하였듯이, 학생들에게서 동일한 문제가 발생한 가능성이 있다. 따라서 Riemann 합 과정을 무한소를 가지고 해석하는 것에서 그치지 않고 그러한 해석이 가지고 있는 문제점과 정적분 정의가 그러한 문제점을 어떻게 극복할 수 있는지에 대해 지도되어야 한다. 이러한 과정을 적절히 거친다면 학생들은 정적분에 대한 심상과 정의가 지니고 있는 의미를 직관적으로 파악할 수 있을 뿐만 아니라 형식적인 논의가 가지고 있는 본래의 의미를 파악하는데 도움이 될 것이다.

참고문헌

교육부(2001). **고등학교 교육과정 해설; 수학**, (주)대한교과서

임재훈 외 9일(2002). **수학 II 교사용지도서**, (주) 두산

우정호 외 5인(2002). **수학 II 교사용지도서**, (주) 대한교과서

최용준 외 1인(2002). **수학 II 교사용지도서**, (주) 천재교육

박규홍 외 5인(2002). **수학 II 교사용지도서**, (주) 교학사

이강섭 외 6인(2002). **수학 II 교사용지도서**, (주) 지학사

김현정(1990). **무한개념의 수학 교육적 고찰**, 서울대학교대학원 석사학위 논문

전미영(2003). **고등학교 학생과 수학교사의 무한개념 이해에 관한 연구**, 고려대학교대학원 석사학위 논문

박선화(1998). **수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구**, 서울대학교대학원 박사학위 논문

우정호(2006). **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부

허학도(2006). **직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애**, 서울대학교대학원 석사학위 논문

Andersen, K.(1985). Cavalieri's Method of Indivisibles, *Archive for history of exact sciences 31*, pp.291-367

Baron, M.(2003). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, New York: Dover Publications, Inc.

Bezuidenhout, J. & Olivier, A.(2000). Students' Conception of the Integral, PME 24, vol.2, pp.73-80

Boyer, C. B.(1949). *The History of Calculus of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publication Inc. USA: New York.

__________(1991). A History of Mathematics, New York : John Wiley & Sons,

Cornu, B.(1991). Limit, *Advanced Mathematical Thinking, by David Tall*, pp.207-226, Kluwer Academic Publishers.

Czarnocha et al, (2001a). Conceptions of area : In students and history, *The College Mathematics Journal*, 32(2), pp.99-109

Czarnocha et al, (2001b). The Concept of Definite Integral : Coordination of Two Schemas, PME 25, Vol. 2, pp.297-304

Davis, R. B. & Vinner, S.(1986). The Notion of Limit : Some Seemingly Unavoidable

Misconception Stages, *Journal of Mathematical Behavior 5*, 281-303

Eves H.(1995). An introduction to the history of mathematics, 수학사, 이우영 · 신항균 옮김, 경문사

Ferzola, A. P.(1986). Evolution of the Mathematical Concept of a Differential and an Outline of How a Modern Definition of this Concept Can Be Used in the Formulation of Elementary Calculus Course, Doctoral Dissertation

Foley, M.(1992). Assessment of Higher Order Thinking in Mathematics : The Definite Integral, Doctoral Dissertation, Texas A&M University

Heath(1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* Dover Publications Inc., New York

Grabiner, J.(2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus,* Dover Publication Inc. USA: New York

Jesseph, D.(1989). Philosophical Theory and Mathematical Practice in the Seventeenth Century, *Studies in History and Philosophy of Science,* Vol. 20, No.2, pp.215-244

__________(1998). Leibniz on the Foundations of the Calculus : The Questions of the Reality of Infinitesimal Magnitudes, *Perspectives on Science,* vol. 6(1&2), pp.6-40

Klein, F(1893). *Lectures on Mathematics,* Macmillan & Company.

Maanen, J. V.(2003). Precursors of Differentiation and Integration, *A History of Analysis,* H. N. Jahnke ed. AMS, pp.41-72

Mac Lane, S.(1986). Mathematics, *Form and Function*, Springer-Verlag, New-York

Malet, A.(1996). *From indivisibles to infinitesimals : studies on seventeenth-century mathematizations of infinitely small quantities,* Universitat Autonoma de Barcelona, Servei de Publicacions

__________(1997). Barrow, Wallis, and the Remaking of Seventeenth Century Indivisibles, *Centaurus* 39, pp.67-92

Muntersbjorn, M. M.(2000). The quadrature of parabolic segment 1635-1658 : a response to Herbert Breger, E. Grosholz & H. Breger (eds.), *The Growth of Mathematical Knowldege*, Kluwer Academy Publisher, pp.231-256

Newton, I.(1952). *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, translated by Andrew Motte, revised by Florian Cajori, ENCYCLOPÆDIA BRITANICA, INC.

Oberg, T.(2000). An investigation of undergraduate calculus students' conceptual understanding of the definite integral, Doctoral Dissertation, The University of Montana

Orton, A.(1983). Students' Understanding of Integration, *Educational Studies in Mathematics 14,* pp.1-18

Poincare, H(1905). La Valeur de la Science, 김형보 역(1983), **과학의 가치,** 서울: 단국대학교출판부

Pyenson, L (1983). *Neohumanism and the persistence of Pure Mathematics in Wilhelmian Germany,* American Philosophical Society.

Sherry D. M.(1982). A Philosophical history of the calculus, doctoral dissertations,

Claremont University
Tall, D. & Vinner, S.(1981). Concept Image and Conept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics educations,* vol.12, pp.151-169
Toeplitz, O.(1963), *The calculus - a genetic approach,* The Press of Chicago University
Walker, E.(1932). A Study of the TRAITÉ DES INDIVISIBLES of Gilles Persone de Roberval, Doctral Dissertation, Teacher College, Columbia University
Williams, S.(1989). Understanding of the limit concept in college students, Doctoral Dissertation, The University of Wisconsin

A Study on Infinitesimal Interpretation of Definite Integral

Joung, Youn Joon (Graduate School of Seoul National University)
Kang, Hyun Young (Lecturer of SungKyunKwan University)

Infinitesimal did not play an explicit role concerning definite integral in the textbook nowadays. But studies which investigate understanding of students on definite integral show that many students comprehend definite integral with infinitesimal. Formally infinitesimal is not taught at mathematics classroom, but many students identify definite integral as infinite sum of infinitesimals. This means that definite integral itself contains some structural elements that allow infinitesimal interpretation. In this study we investigate the role of infinitesimal in the historical development of partition-sum in definite integral, extract didactical issues concerning understanding of definite integral, and analyse Korean mathematics textbooks. Finally we propose some suggestions on the teaching of definite integral which contains the process of refinement intuition.

* key words : Infinitesimal(무한소), Definite Integral(정적분), Historical Development of Definite Integral(정적분의 역사적 발달), the process of refinement intuition (직관의 정련화 과정).

논문접수 : 2008. 7. 31
논문수정 : 2008. 8. 29
심사완료 : 2008. 9. 6